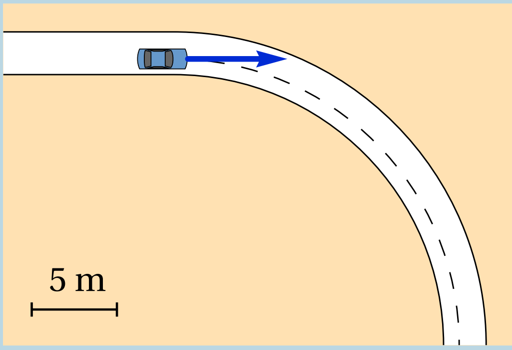
3 Movimento curvilíneo

Problema 2
Um motorista entra numa curva a 72 km/h, e trava, fazendo com que o valor da velocidade diminua a uma taxa constante de 4.5 km/h cada segundo. Observando a figura, faça uma estimativa do raio de curvatura da estrada e calcule o valor da aceleração do automóvel 4 segundos após ter iniciado a travagem.



O raio é aproximadamente 16.7 m. A aceleração tangencial (taxa de aumento da velocidade) é igual a

$$a_\mathrm{t} = -4.5\,\frac{\mathrm{km/h}}{\mathrm{s}} = -\frac{4500}{3600}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = -1.25\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Resolvendo a equação que relaciona a aceleração tangencial com a velocidade e o tempo obtém-se a velocidade após os 4 segundos (72 km/h equivale a 20 m/s)

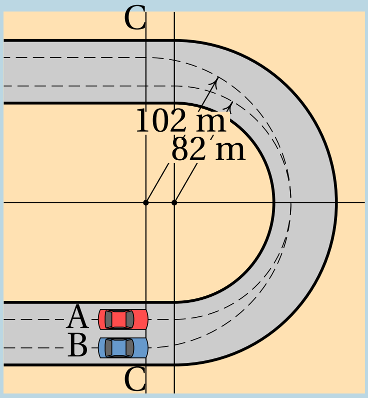
$$\int_{20}^{v} \mathrm{d}v = -\int_{0}^{4} 1.25\,\mathrm{d}t \quad\Longrightarrow\quad v = 15$$

E a aceleração total é

$$a = \sqrt{a_\mathrm{t}^2 + a_\mathrm{n}^2} = \sqrt{1.25^2 + \frac{15^4}{16.7^2}} = 13.53\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Este valor é uma aproximação, porque o raio foi calculado de forma aproximada.

Problema 5
Dois carros A e B passam por uma curva usando trajetórias diferentes. A figura mostra a curva delimitada pela reta C. O carro B faz um percurso semicircular com raio de 102 m; o carro A avança uma distância em linha reta, a seguir segue um semicírculo com raio 82 m e termina com outro trajeto em linha reta. Os dois carros deslocam-se à velocidade máxima que podem ter para conseguir fazer a curva, que para o tipo de pneus usados corresponde à velocidade que produz uma aceleração normal de $0.8\,g$, onde g é a aceleração da gravidade. Calcule o tempo que demora cada um dos carros a fazer a curva.



Como cada carro faz a curva com velocidade constante, o tempo que demora é

$$\Delta t = \frac{\Delta s}{v}$$

A velocidade de cada carro é a que conduz ao valor máximo da aceleração normal, ou seja

$$\frac{v^2}{R} = 0.8\,g \qquad \Longrightarrow \qquad v = \sqrt{7.84\,R}$$

No caso do automóvel B, o percurso é metade da circunferência de 102 metros de raio

$$\Delta s = 102\,\pi \qquad v = \sqrt{7.84 \times 102} = 28.279$$

E como tal, o tempo que demora é

$$\Delta t = \frac{102\,\pi}{28.279} = 11.33\ \text{s}$$

No caso do automóvel A, o percurso é metade da circunferência de 82 metros de raio, mais dois segmentos retos de 20 m cada um

$$\Delta s = 2 \times 20 + 82\,\pi \qquad v = \sqrt{7.84 \times 82} = 25.355$$

E o tempo que demora o carro A é

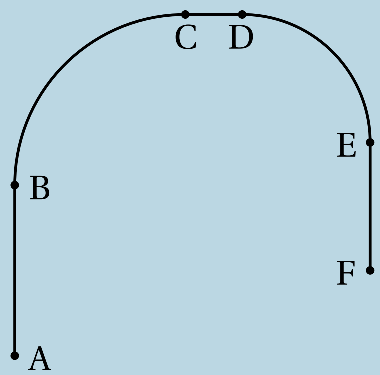
$$\Delta t = \frac{40 + 82\,\pi}{25.355} = 11.74\ \text{s}$$

Problema 7

Uma partícula segue a trajetória que mostra a figura, partindo do repouso em A e aumentando a velocidade com aceleração constante até o ponto B. Desde B até E mantém velocidade constante de 10 m/s e a partir de E começa a abrandar, com aceleração constante, até parar no ponto F. A distância AB é 60 cm, CD é 20 cm e EF é 45 cm; o raio do arco BC é 60 cm e o raio do arco DE é 45 cm. Determine:

(a) O módulo da aceleração da partícula em cada um dos trajetos AB, BC, CD, DE e EF.

(b) O tempo total do movimento desde A até F e a velocidade média nesse percurso.



(a) No trajeto AB,

$$a_\text{t} = v\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s} \quad\Longrightarrow\quad a_\text{t}\int_0^{0.6}\mathrm{d}s = \int_0^{10} v\,\mathrm{d}v \quad\Longrightarrow\quad a_\text{t} = 83.33\ \text{m/s}^2$$

o módulo da aceleração é 83.33 m/s^2. No trajeto EF,

$$a_\text{t} = v\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s} \quad\Longrightarrow\quad a_\text{t}\int_0^{0.45}\mathrm{d}s = \int_{10}^{0} v\,\mathrm{d}v \quad\Longrightarrow\quad a_\text{t} = -111.11\ \text{m/s}^2$$

o módulo da aceleração é 111.11 m/s^2. No trajeto CD, o módulo da aceleração é nulo, porque o movimento é retilíneo e uniforme. No trajeto BC, a aceleração tem unicamente componente normal:

$$a_\text{n} = \frac{v^2}{r} = \frac{10^2}{0.6} = 166.67\ \text{m/s}^2$$

o módulo da aceleração é 166.67 m/s^2. No trajeto DE, a aceleração também tem unicamente componente normal:

$$a_\text{n} = \frac{v^2}{r} = \frac{10^2}{0.45} = 222.22\ \text{m/s}^2$$

o módulo da aceleração é 222.22 m/s^2.

(*b*) A distância total percorrida é a soma dos três segmentos AB, CD e EF, mais os dois arcos BC e DE, ambos com ângulo de π/2 radianos:

$$d = 0.6 + 0.2 + 0.45 + \frac{\pi}{2}\,(0.6 + 0.45) = 2.90\ \text{m}$$

O tempo que a partícula demora a percorrer o trajeto BCDE é:

$$t_1 = \frac{0.2 + \dfrac{\pi}{2}\,(0.6 + 0.45)}{10} = 0.185\ \text{s}$$

Para calcular o tempo que demora no trajeto AB, integra-se uma equação de movimento

$$a_\text{t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \quad\Longrightarrow\quad t_2 = \frac{1}{a_\text{t}}\int_0^{10}\mathrm{d}v = \frac{10}{83.33} = 0.120\ \text{s}$$

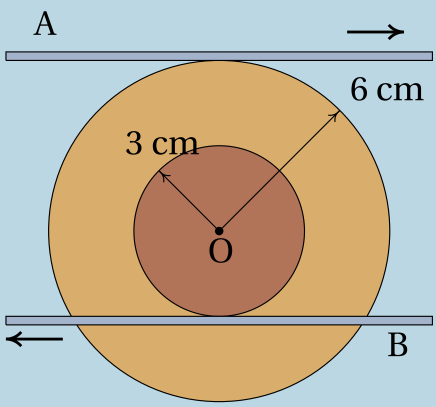
e usa-se o mesmo procedimento para calcular o tempo que demora no trajeto EF:

$$a_\text{t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \quad\Longrightarrow\quad t_3 = \frac{1}{a_\text{t}}\int_{10}^{0}\mathrm{d}v = \frac{10}{111.11} = 0.090\ \text{s}$$

A velocidade média é igual à distância percorrida dividida pelo tempo que demorou:

$$v_m = \frac{d}{t_1 + t_2 + t_3} = \frac{2.90}{0.185 + 0.120 + 0.090} = 7.34\ \text{m/s}$$

Problema 8
A roda na figura tem duas partes com raios de 3 cm e 6 cm, que estão em contacto com duas barras horizontais A e B. A barra A desloca-se para a direita, com valor da velocidade de 10 m/s e a barra B desloca-se para a esquerda com valor da velocidade de 35 m/s, enquanto a roda mantém o contacto com as duas barras, sem derrapar. Determine para que lado se desloca o centro O da roda e calcule os valores da velocidade do ponto O e da velocidade angular da roda.



Admitindo sentido positivo de esquerda para direita, as velocidades das barras A e B são

$$v_\text{A} = 10 \qquad v_\text{B} = -35$$

E a velocidade do ponto da roda em contacto com a barra A, em relação ao ponto da roda em contacto com a barra B, é igual a

$$v_\text{A/B} = v_\text{A} - v_\text{B} = +45$$

Por ser positiva, conclui-se que a roda está a rodar no sentido horário e com velocidade angular

$$\omega = \frac{v_\text{A/B}}{\overline{\text{AB}}} = \frac{45}{0.09} = 500$$

em unidades SI (radianos por segundo). A velocidade do ponto O, relativa ao ponto da roda em contacto com a barra B é positiva, porque a velocidade angular é no sentido horário, e com valor

$$v_{\mathrm{O/B}} = \overline{\mathrm{OB}}\,\omega = 0.03 \times 500 = +15$$

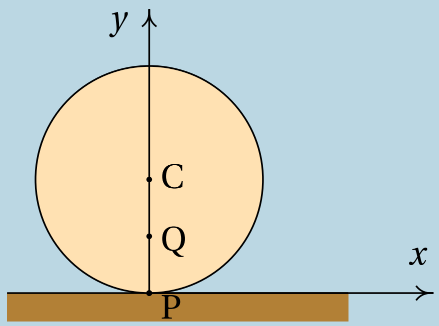
Finalmente, a velocidade do ponto O é

$$v_{\mathrm{O}} = v_{\mathrm{O/B}} + v_{\mathrm{B}} = 15 - 35 = -20$$

em m/s. O sinal negativo indica que o ponto O desloca-se para a esquerda.

Problema 9

Uma roda com 20 cm de raio desloca-se, sem derrapar, sobre uma superfície plana, ao longo do eixo dos x. No instante $t = 0$ o centro da roda encontra-se em $x = 0$ e $y = 20$ cm e os pontos P e Q da roda são os pontos que estão em $x = 0$ com $y = 0$ e $y = 10$ cm. O valor da velocidade do centro da roda é 2 m/s, constante. (*a*) Calcule quanto tempo demora a roda a dar duas voltas completas. (*b*) Represente os gráficos das trajetórias dos pontos P e Q durante o tempo que a roda demora a dar duas voltas.



(*a*) Como a velocidade do ponto P é nula, a velocidade de C relativa a P é igual a 2 m/s e a velocidade angular da roda é

$$\omega = \frac{2}{0.20} = 10$$

e por ser constante, o tempo que a roda demora a dar duas voltas é

$$\Delta t = \frac{\Delta\theta}{\omega} = \frac{4\,\pi}{10} = 1.26\,s$$

(*b*) O ângulo que a reta CP faz com a vertical é dado pela expressão

$$\theta = \omega\, t = 10\, t$$

E a posição dos pontos P e Q, relativas a C, são

$$\vec{r}_{\mathrm{P/C}} = -0.2\left(\sin\theta\,\hat{\imath} + \cos\theta\,\hat{\jmath}\right) = -0.2\left(\sin(10\,t)\,\hat{\imath} + \cos(10\,t)\,\hat{\jmath}\right)$$
$$\vec{r}_{\mathrm{Q/C}} = -0.1\left(\sin(10\,t)\,\hat{\imath} + \cos(10\,t)\,\hat{\jmath}\right)$$

A posição do ponto C, em função do tempo é

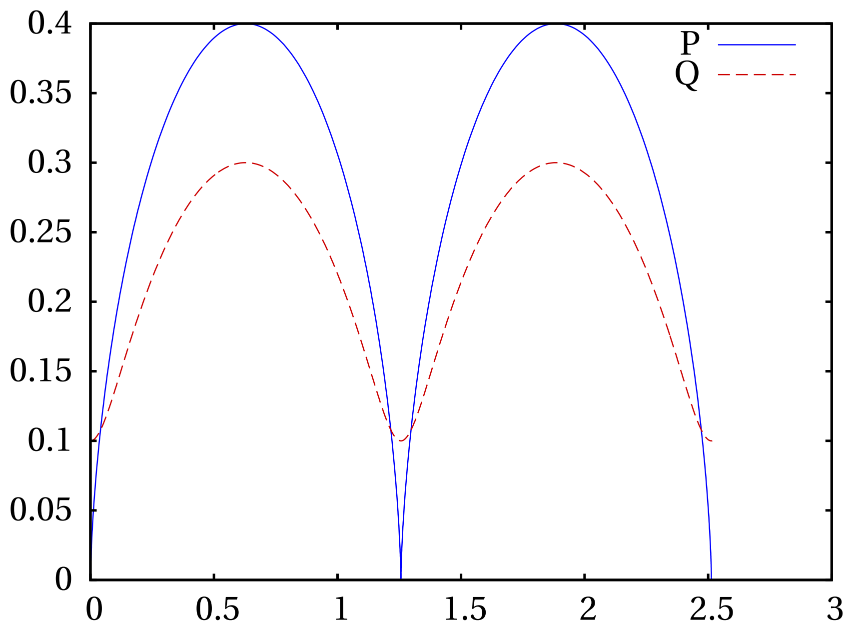
$$\vec{r}_{\mathrm{C}} = 2\,t\,\hat{\imath} + 0.2\,\hat{\jmath}$$

Assim sendo, as posições dos pontos P e Q, em função do tempo, são

$$\vec{r}_{\mathrm{P}} = (2\,t - 0.2\,\sin(10\,t))\;\hat{\imath} + (0.2 - 0.2\,\cos(10\,t))\;\hat{\jmath}$$
$$\vec{r}_{\mathrm{Q}} = (2\,t - 0.1\,\sin(10\,t))\;\hat{\imath} + (0.2 - 0.1\,\cos(10\,t))\;\hat{\jmath}$$

O gráfico das trajetórias desses dois pontos, durante duas voltas, obtém-se com o seguinte comando do Maxima

```
(%i1) plot2d([[parametric, 2*t-0.2*sin(10*t), 0.2-0.2*cos(10*t)],
     [parametric, 2*t-0.1*sin(10*t), 0.2-0.1*cos(10*t)]],
     [t,0,1.26], [legend,"P","Q"]);
```



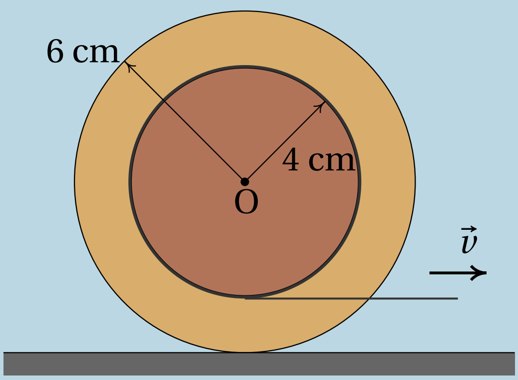
Problema 10

Um cilindro com raio de 4 cm está colado a uma roda com 6 cm de raio que se encontra sobre uma superfície horizontal plana, tal como mostra a figura. Uma corda foi enrolada à volta do cilindro e está a ser puxada horizontalmente para a direita, com velocidade constante $\vec{v}$ de valor 2.5 cm/s. O movimento da corda faz rodar a roda sobre a superfície horizontal, sem derrapar.

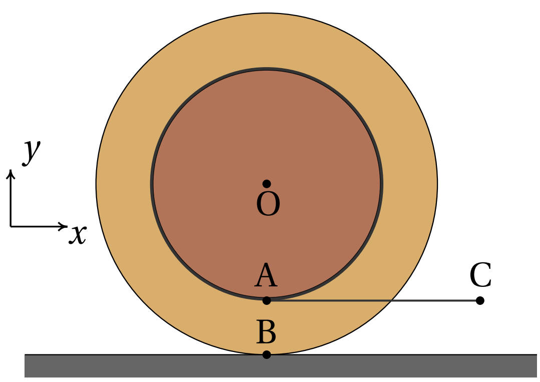
(*a*) Determine o valor da velocidade angular da roda.

(*b*) Diga em que sentido se desloca o ponto O, no eixo da roda e do cilindro, e determine o valor da sua velocidade.

(*c*) Determine quantos centímetros de corda são enrolados à volta do cilindro a cada segundo.



(*a*) Como a roda não derrapa, a velocidade do ponto B na figura ao lado é nula. Como tal, a velocidade $\vec{v}_{A/B}$ de A relativa a B, é $\vec{v}_A - \vec{v}_B = \vec{v}_A$. Escolhendo o sistema de eixos indicado na figura e distâncias em centímetros, a velocidade do ponto A, que é a mesma velocidade com que a corda está a ser puxada no ponto C, é igual a:



$$\vec{v}_{A/B} = \vec{v}_A = 2.5\,\hat{\imath}$$

Essa velocidade está também relacionada com a velocidade angular pela expressão:

$$\vec{v}_{A/B} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{BA} = (\omega\,\hat{k}) \times (2\,\hat{\jmath}) = -2\,\omega\,\hat{\imath}$$

onde o versor $\hat{k}$ aponta para fora da figura. Igualando as duas expressões anteriores, obtém-se a velocidade angular:

$$\omega = \frac{2.5}{-2} = -1.25\ \mathrm{s}^{-1}$$

o sinal negativo indica que o vetor $\vec{\omega}$ aponta para dentro da figura, ou seja, a rotação é no sentido dos ponteiros do relógio.

(*b*) Como a velocidade angular da roda é no sentido dos ponteiros do relógio, o ponto O desloca-se para a direita com velocidade de valor igual a:

$$v_\mathrm{O} = \overline{\mathrm{OB}}\,\omega = 7.5\ \mathrm{cm/s}$$

(*c*) A velocidade do ponto C, em relação ao ponto O, é:

$$\vec{v}_{\mathrm{C/O}} = \vec{v}_\mathrm{C} - \vec{v}_\mathrm{O} = 2.5\,\hat{\imath} - 7.5\,\hat{\imath} = -5\,\hat{\imath}$$

o sentido dessa velocidade, no sentido negativo do eixo dos x, indica que os pontos O e C estão a aproximarem-se, ou seja, a corda está a enrolar-se ainda mais e cada segundo enrolam-se 5 cm de corda.