

11. Ciclos limite e dinâmica populacional



A aranha caranguejo é um predador que consegue mudar a sua cor para camuflar-se das suas presas. Na fotografia, uma aranha caranguejo, pousada numa flor, apanha duas moscas que estavam a acasalar. Os sistemas predador presa são um exemplo de sistema de duas espécies; a evolução da população das duas espécies pode ser estudada com a teoria de sistemas dinâmicos.

11.1. Ciclos limite

Num sistema conservativo, todos pontos de equilíbrio estável são **centros** e existem **ciclos**, que correspondem a movimentos oscilatórios.

Na prática, um sistema conservativo é apenas uma idealização. Existem forças dissipativas que tornam um centro em **foco atrativo**; os ciclos passam a ser espirais que se aproximam do foco atrativo e o movimento oscilatório descrito por essas espirais tem amplitude de oscilação decrescente, aproximando-se para zero. A energia diminui ao longo da curva de evolução até o valor mínimo local no ponto de equilíbrio estável.

Também podem existir forças externas que aumentam a energia mecânica do sistema. Nesse caso o centro torna-se um **foco repulsivo** e os ciclos são substituídos por espirais que se afastam do ponto. Essas curvas de evolução com forma de espiral representam movimento oscilatório com amplitude crescente; ao longo das curvas a energia aumenta a medida que o estado se afasta do mínimo local de energia.

A conjugação dos dois efeitos: forças dissipativas mais forças externas que fornecem energia, pode produzir a combinação exata que mantém o sistema em movimento oscilatório com amplitude constante. Um exemplo típico é um relógio de pêndulo: a dissipação de energia devida à resistência do ar e atrito no eixo é compensada por um mecanismo que produz um momento sobre o pêndulo.

Isso explica porque os sistemas não conservativos também podem ter ciclos no espaço de fase. Mas comumente esses ciclos são isolados; nomeadamente, existem apenas para um valor específico da amplitude e não para qualquer amplitude arbitrária. Esse tipo de ciclos isolados, nos sistemas não lineares, são designados **ciclos limite**.

11.1.1. Equação de Van der Pol

Uma equação não linear conhecida há muito tempo e que dá origem a ciclos limite é a equação de Van der Pol, que surgiu no estudo dos circuitos elétricos e outros sistemas mecânicos:

$$\ddot{x} + 2\varepsilon(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0 \quad (11.1)$$

onde ε é um parâmetro positivo. Se x^2 for maior que 1, o segundo termo é dissipativo e implica diminuição da amplitude de oscilação. Se x^2 for

menor que 1, o sistema terá fornecimento de energia e a amplitude de oscilação aumentará. Assim sendo, espera-se que, independentemente do estado inicial, o sistema termine oscilando com amplitude próxima de 1. A equação de van der Pol é equivalente ao seguinte sistema dinâmico autônomo:

$$\dot{x} = y \quad \dot{y} = -x - 2\varepsilon(x^2 - 1)y \quad (11.2)$$

Existe um único ponto de equilíbrio, na origem. A matriz Jacobiana nesse ponto é:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2\varepsilon \end{bmatrix} \quad (11.3)$$

e os valores próprios são $\lambda = \varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 - 1}$.

A origem é ponto repulsivo, que pode ser foco ($\varepsilon < 1$), nó ($\varepsilon > 1$) ou nó impróprio ($\varepsilon = 1$). O retrato de fase e o estado em função do tempo, no caso $\varepsilon = 0.17$, com condições iniciais $x = y = 0.1$ são representados com o seguinte comando:

```
(%i1) plotdf ([y, -x-2*0.17*(x^2-1)*y], [x,y], [direction,forward],
             [x,-4,4], [y,-5,5], [nsteps,900], [trajectory_at,0.1,0.1],
             [versus_t,1])$
```

A figura 11.1 mostra o resultado.

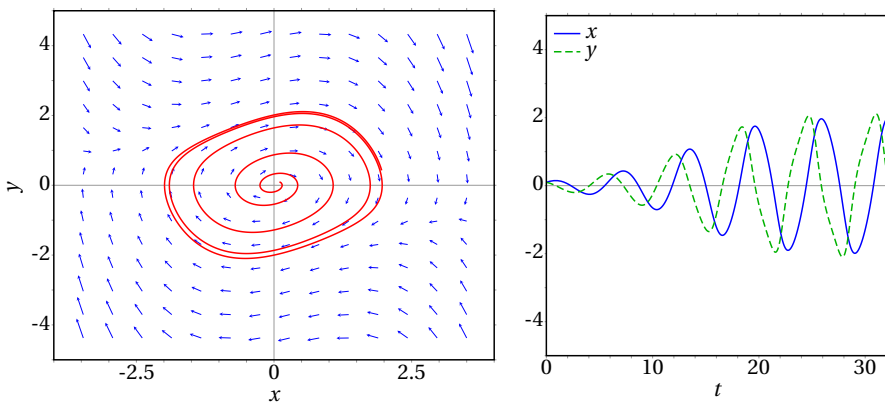


Figura 11.1.: Solução da equação de van der Pol para um valor pequeno do parâmetro, $\varepsilon = 0.17$, com estado inicial próximo da origem.

O sistema oscila, com amplitude inicialmente crescente, mas após algumas oscilações estas são cada vez mais uniformes. No retrato de fase, a órbita cresce aproximando-se de um ciclo limite com forma de retângulo de vértices arredondados.

O retrato de fase e a solução em função do tempo, para o mesmo valor do parâmetro, $\varepsilon = 0.17$, mas com um estado inicial que está fora do ciclo limite, obtém-se com o seguinte comando:

```
(%i2) plotdf ([y,-x-2*0.17*(x^2-1)*y], [x,y], [direction,forward],
             [x,-4,4], [y,-5,5], [nsteps,900], [trajectory_at,-3,3],
             [versus_t,1])$
```

A figura 11.2 mostra o resultado. A amplitude das oscilações decresce até ficar uniforme e igual à solução obtida no caso anterior.

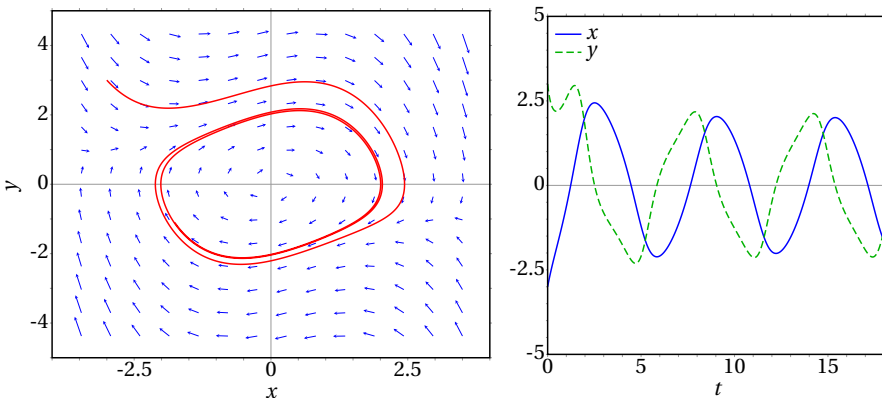


Figura 11.2.: Solução da equação de van der Pol para um valor pequeno do parâmetro, $\varepsilon = 0.17$, com estado inicial afastado da origem.

Nos dois casos das figuras 11.1 e 11.2 o sistema aproxima-se do mesmo ciclo; no primeiro caso a aproximação é feita desde dentro do ciclo e no segundo caso desde fora. Esse tipo de ciclo é um **ciclo limite atrativo**. Existem também ciclos limite repulsivos, no caso em que as órbitas perto desse ciclo afastam-se dele.

Se o parâmetro ε for maior que 1 e o estado inicial estiver próximo da origem, o sistema aproxima-se muito mais rapidamente do ciclo limite, já que a origem passa a ser um nó repulsivo. Por exemplo, para $\varepsilon = 1.7$ e estado inicial $x = y = 0.1$:

```
(%i3) plotdf ([y,-x-2*1.7*(x^2-1)*y], [x,y], [direction,forward],
             [x,-4,4], [y,-6,6], [nsteps,1500], [trajectory_at,0.1,0.1],
             [versus_t,1])$
```

A figura 11.3 mostra o resultado. Em comparação com o caso $\varepsilon = 0.17$, as oscilações já não são parecidas com uma função sinusoidal e o ciclo limite tem uma forma mais complicada no espaço de fase.

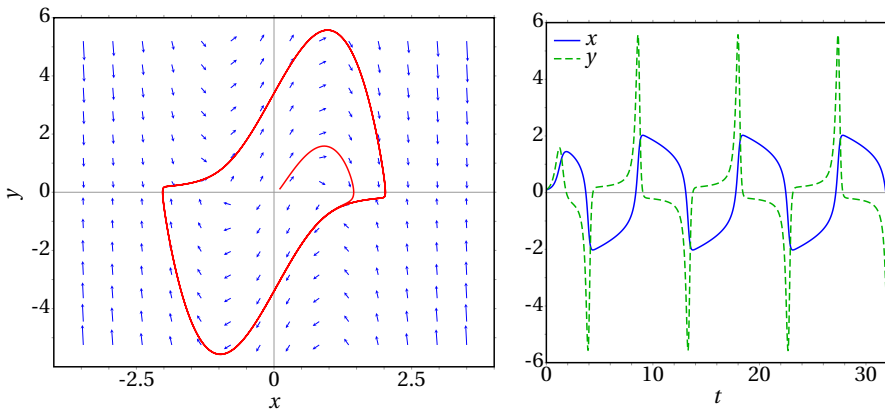


Figura 11.3.: Solução da equação de van der Pol para um valor elevado do parâmetro, $\varepsilon = 1.7$, e com estado inicial próximo da origem.

Em função do tempo, quanto menor for o parâmetro ε , mais parecidas serão as oscilações a uma função periódica de frequência única (função seno ou cosseno). Quanto maior for o parâmetro ε , mais complicadas serão as oscilações, como no caso da figura 11.3, correspondendo à sobreposição de funções sinusoidais com várias frequências diferentes.

O circuito, ou sistema físico, descrito pela equação de van der Pol é um sistema auto-regulado. Nomeadamente, independentemente do estado inicial do sistema, o estado final será um movimento oscilatório com amplitudes e frequências específicas do circuito.

11.1.2. Existência de ciclos limite

Num ponto do espaço de fase, que não seja ponto de equilíbrio, passa exatamente uma curva de evolução. As curvas de evolução de um sistema dinâmico contínuo, no espaço de fase, nunca se podem cruzar.

Essas propriedades são úteis para descobrir a existência de ciclos limite. Por exemplo, no retrato de fase apresentado na figura 11.4, a origem é um foco repulsivo; na vizinhança da origem as curvas de evolução são espirais que apontam para fora da origem. No entanto, nas regiões mais afastadas da origem, as curvas de evolução aproximam-se da origem, indicando que na realidade o sistema é estável.

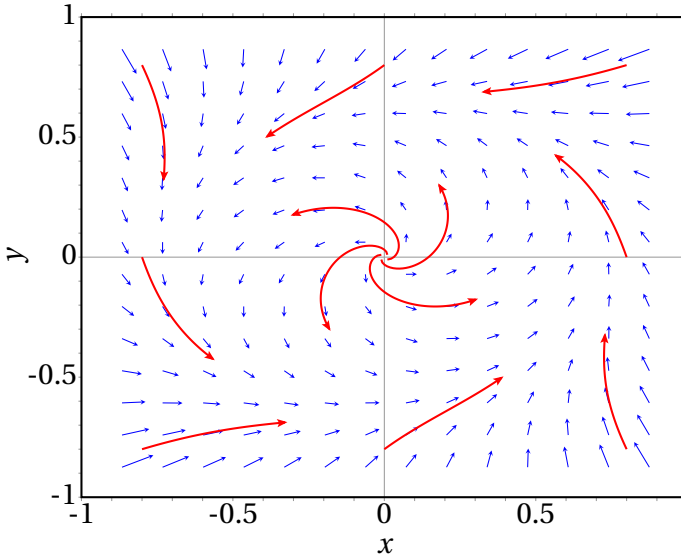


Figura 11.4.: Retrato de fase de um sistema com um ciclo limite.

Como as curvas que saem do ponto de equilíbrio não se podem cruzar com as curvas que se aproximam dele, deverá existir um ciclo limite para onde todas as curvas de evolução aproximam-se-ão assintoticamente, sem se cruzarem nem se tocarem.

Em alguns casos consegue-se demonstrar matematicamente a existência do ciclo limite, usando coordenadas polares, como mostra o exemplo a seguir.

Exemplo 11.1

Demonstre que o sistema com equações de evolução:

$$\dot{x} = -y + x(1 - 2x^2 - 3y^2) \quad \dot{y} = x + y(1 - 2x^2 - 3y^2)$$

tem um ciclo limite.

Resolução. Os pontos em que as duas componentes da velocidade de fase são nulas são:

```
(%i4) f1: -y+x*(1-2*x^2-3*y^2)$
(%i5) f2: x+y*(1-2*x^2-3*y^2)$
(%i6) solve ([f1,f2]);
(%o6)      [[x=0, y=0]]
```

Existe então um único ponto de equilíbrio, na origem. O retrato de fase obtido com as funções f_1 e f_2 é apresentado na figura 11.5, que mostra o ciclo limite.

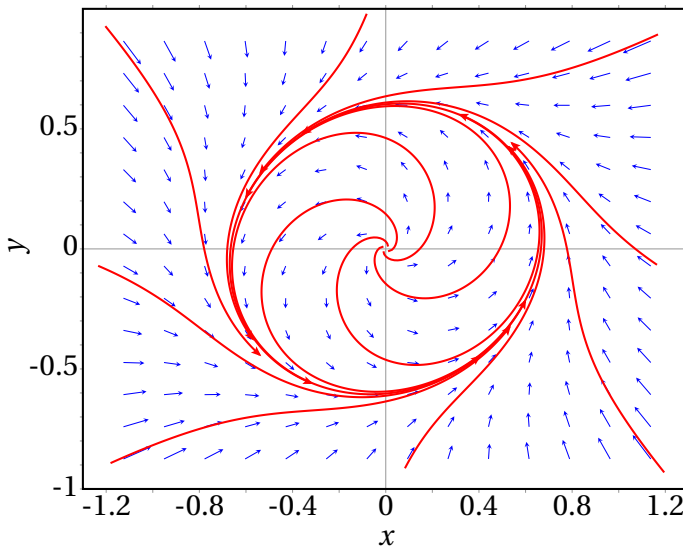


Figura 11.5.: Retrato de fase do sistema $\dot{x} = -y + x(1 - 2x^2 - 3y^2)$, $\dot{y} = x + y(1 - 2x^2 - 3y^2)$.

A existência do ciclo limite neste sistema pode ser compreendida melhor se as equações de evolução são escritas em coordenadas polares em vez de coordenadas cartesianas. Em função da distância à origem r e do ângulo θ com o semieixo positivo dos x , as coordenadas de um ponto no espaço de fase são:

```
(%i7) x: r*cos(u)$
```

```
(%i8) y: r*sin(u)$
```

onde u foi usada para designar o ângulo θ . As derivadas \dot{r} e $\dot{\theta}$ serão designadas por v e w e são definidas no Maxima com a função `grdef`:

```
(%i9) grdef (r,t,v)$
```

```
(%i10) grdef (u,t,w)$
```

A seguir escrevem-se as equações de evolução. Como as funções nos lados direitos das equações já foram inseridas e associadas às variáveis `f1` e `f2`, basta usar os nomes dessas variáveis. No entanto, quando essas expressões foram inseridas, as coordenadas cartesianas não tinham sido substituídas ainda pelas coordenadas polares; para que a substituição seja feita agora, é necessário usar a função `ev` (que significa *evaluate*):

```
(%i11) eq1: diff (x,t) = ev(f1);
```

```
(%o11) cos u v - r sin u w = r cos u (-3 r^2 sin^2 u - 2 r^2 cos^2 u + 1) - r sin u
```

```
(%i12) eq2: diff (y,t) = ev(f2);
```

```
(%o12) r cos u w + sin u v = r sin u (-3 r^2 sin^2 u - 2 r^2 cos^2 u + 1) + r cos u
```

Para obter as equações de evolução em coordenadas polares (expressões de \dot{r} e $\dot{\theta}$ em função de r e θ) basta agora resolver estas duas equações para as derivadas v e w :

```
(%i13) solve ([eq1, eq2 ], [v,w]);
```

```
(%o13) [[v = -3 r^3 sin^2 u - 2 r^3 cos^2 u + r, w = 1]]
```

A segunda equação, $w = 1$, mostra que a taxa de aumento do ângulo θ é constante. Ou seja, o estado roda no espaço de fase com velocidade angular constante, igual a 1, no sentido positivo (contrário aos ponteiros do relógio). Enquanto o estado roda, a variação do valor de r é \dot{r} que é a expressão obtida para v no resultado (%o13). É útil observar o gráfico da expressão obtida para v em (%o13), em função de r e com algum valor fixo de θ . Por exemplo, com $\theta = \pi/4$ o gráfico é obtido com o comando:

```
(%i14) plot2d (subst (u = %pi/4, rhs(%o13[1][1])), [r, 0, 1])$
```

É apresentado na figura 11.6. A derivada \dot{r} é nula em $r = 0$, como era espe-

rado, porque em $r = 0$ há um ponto de equilíbrio, ou seja, quando o valor de r for zero, permanecerá constante. No intervalo entre 0 e aproximadamente 0.6, v é positiva; isso quer dizer que r aumenta, ou seja, o ponto de equilíbrio é repulsivo porque se r estiver próximo de zero, mas sem ser zero, começará a aumentar, afastando o estado do ponto de equilíbrio. E enquanto o estado se afasta da origem, devido ao aumento de r , roda com velocidade angular constante; isso implica que o ponto de equilíbrio é foco repulsivo.

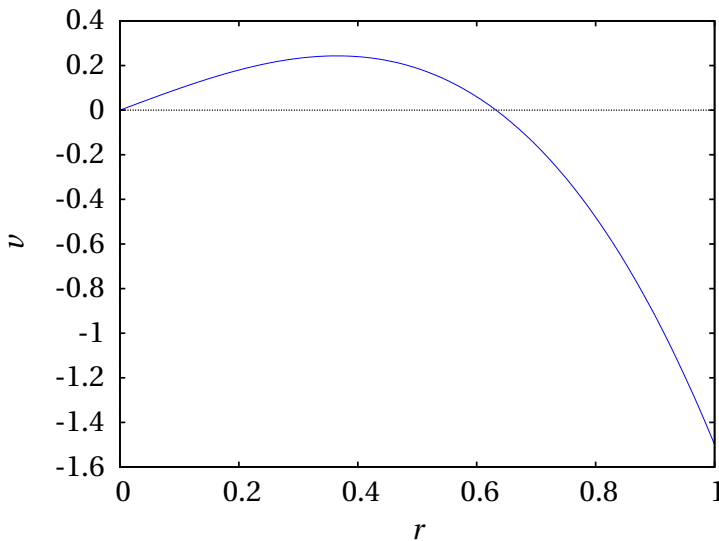


Figura 11.6.: Variação de \dot{r} , em função de r , para $\theta = \pi/4$.

Enquanto o estado do sistema se afasta da origem, r aumenta atingindo um valor superior a 0.6 onde, de acordo com o gráfico 11.6, a derivada de r em ordem ao tempo (v) passa a ser negativa, ou seja, r começa a diminuir. Conclui-se então que enquanto o estado roda à volta da origem, não se afastará nunca de um valor próximo de 0.6, dando origem assim a um ciclo limite. Em geral, cada raiz diferente de zero no gráfico de \dot{r} em função de r indica a presença de um ciclo limite. No caso geral podem existir vários ciclos limite; neste exemplo só existe um porque a função v tem apenas uma raiz diferente de zero; e neste caso o ciclo limite é atrativo porque v passou de positiva para negativa nessa raiz. Nas raízes onde passasse de negativa para positiva existiriam ciclos limite repulsivos.

Neste exemplo em que \dot{r} depende também de θ , a posição da raiz obser-

vada na figura 11.6 varia ligeiramente para diferentes valores de θ . Isso indica que o ciclo limite não é uma circunferência. De facto, neste exemplo a raiz de ν diferente de zero está numa elipse com semieixo maior no eixo dos x e com $\sqrt{2}/2$ unidades, e semieixo menor no eixo dos y e com $\sqrt{3}/3$ unidades (ver problema 1 no fim do capítulo). Em $\theta = 0$ o ciclo limite está no interior dessa elipse, onde \dot{r} é positiva; como tal, enquanto θ aumenta, r também aumenta e o ciclo passa para fora da elipse, onde \dot{r} passa a ser negativo e r começa a diminuir e o ciclo volta a entrar dentro da elipse, quando θ está na vizinhança de π radianos.

11.1.3. Inexistência de ciclos limite

Se existir um ciclo limite, na região dentro dele deverá existir pelo menos um foco, um centro ou um nó. Isso implica que se numa região do espaço de fase não existir nenhum foco, centro ou nó, nessa região não pode existir nenhum ciclo limite. O determinante da matriz jacobiana é igual ao produto dos valores próprios; assim sendo, num sistema de segunda ordem, se num ponto de equilíbrio o determinante da matriz jacobiana for negativo, esse ponto será necessariamente ponto de sela.

Conclui-se que num sistema de segunda ordem, se dentro de uma região do espaço de fase não existir nenhum ponto de equilíbrio onde o determinante da matriz jacobiana seja positivo, nessa região não poderá existir nenhum ciclo limite. Esse método é útil para demonstrar que num sistema não existem ciclos limite.

Exemplo 11.2

Demonstre que o sistema seguinte não possui nenhum ciclo limite.

$$\dot{x} = y^2 - x \qquad \dot{y} = y + x^2 + yx^3$$

Resolução. Para encontrar os pontos de equilíbrio usam-se os seguintes comandos no Maxima:

```
(%i15) f: [y^2-x, y+x^2+y*x^3] $
```

```
(%i16) solve (f);
```

que produzem unicamente uma solução real, na origem. Conclui-se que o único ponto de equilíbrio é a origem. Para determinar que tipo de ponto

de equilíbrio é, determina-se a matriz jacobiana nesse ponto:

```
(%i17) J: jacobian (f, [x,y])$
(%i18) subst ([x=0,y=0], J);
(%o18)      
$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```

como a matriz é diagonal, os seus valores próprios são os números na diagonal, 1 e -1. Ou seja, a origem é um ponto de sela e, como tal, não existe nenhum ciclo limite porque não existe nenhum ponto de equilíbrio atrativo ou repulsivo.

11.2. Dinâmica populacional

As variações da população numa região é um problema que pode ser estudado por meio de equações diferenciais. A população é uma variável discreta, mas quando se estudam populações de muitos milhares ou milhões de indivíduos, é uma boa aproximação admitir que a população a cada instante, $x(t)$, é uma variável real. A derivada \dot{x} representa o aumento, ou diminuição, da população a cada instante; o quociente \dot{x}/x é a taxa de aumento da população por unidade de tempo, ou seja, o aumento da população durante uma unidade de tempo, por cada indivíduo. Essa taxa de aumento é determinada pelas taxas de natalidade, T_n , mortalidade, T_m , imigração, T_i e emigração, T_e :

$$\frac{\dot{x}}{x} = T_n - T_m + T_i - T_e \quad (11.4)$$

Para poder resolver a equação é necessário usar algum modelo matemático para a taxa de aumento, em função da população x e do tempo t . O modelo populacional mais simples, proposto por Malthus no século XVIII, consiste em admitir uma taxa de aumento a constante e positiva

$$\frac{\dot{x}}{x} = a \quad (a > 0) \quad (11.5)$$

Esta equação resolve-se facilmente por separação de variáveis e a solução é uma função exponencial crescente:

$$x(t) = x_0 e^{at} \quad (11.6)$$

Não existem pontos de equilíbrio neste modelo e a população aumenta sem limite. No século XIX, Verhulst introduziu um modelo chamado **modelo logístico**, em que as taxas de natalidade mais imigração permanecem constantes, mas as taxas de mortalidade mais emigração aumentam de forma diretamente proporcional à população existente. Ou seja, a equação diferencial do modelo é

$$\dot{x} = x(a - bx) \quad (11.7)$$

onde a e b são constantes positivas. O pressuposto deste modelo é que a taxa de natalidade é um fator intrínseco, enquanto que o aumento da população origina conflitos e problemas que conduzem ao aumento da taxa de mortalidade.

Neste modelo há dois pontos de equilíbrio, soluções da equação $x(a - bx) = 0$, ou seja, $x = 0$ e $x = a/b$. A matriz jacobiana tem um único elemento,

$$J = \frac{d(x(a - bx))}{dx} = a - 2bx \quad (11.8)$$

O primeiro ponto de equilíbrio, $x=0$, é repulsivo porque nesse ponto $J = a > 0$ e o segundo ponto, $x = a/b$, é atrativo porque conduz a $J = -a < 0$. Como tal, a população atingirá sempre o valor constante a/b .

Estes modelos, propostos inicialmente para estudar populações humanas, aplicam-se a qualquer espécie biológica ou no estudo da propagação das epidemias.

11.3. Sistemas de duas espécies

Sejam duas populações diferentes que interagem. A função $x_1(t)$ representa o número de elementos da espécie 1, no instante t , e $x_2(t)$ o número de elementos da espécie 2, no instante t .

Admitindo que os fatores ambientais permanecem inalterados e que a evolução das duas espécies depende apenas da interação entre elas, as equações de evolução do sistema são um sistema autónomo com duas variáveis de estado:

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \quad \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) \quad (11.9)$$

As funções f_1 e f_2 não podem ser duas funções quaisquer, mas têm de

verificar as seguintes condições:

$$\lim_{x_1 \rightarrow 0} f_1(x_1, x_2) = 0 \quad \lim_{x_2 \rightarrow 0} f_2(x_1, x_2) = 0 \quad (11.10)$$

já que quando uma das populações for extinta, não podem nascer nem morrer mais elementos dessa espécie e a respetiva taxa de aumento deve ser nula. Essas condições implicam que em cada um dos eixos x_1 e x_2 , no espaço de fase, a velocidade de fase é paralela ao respetivo eixo; se o estado inicial estiver num dos eixos, a sua evolução será ao longo desse eixo. Por outro lado, apenas é necessário que as funções $f_1(x_1, x_2)$ e $f_2(x_1, x_2)$ estejam definidas para valores positivos de x_1 e x_2 , já que as populações não podem ser negativas.

Admite-se que as duas funções são contínuas no primeiro quadrante do plano $x_1 x_2$. Os quatro termos na matriz jacobiana,

$$\mathbf{J}(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \quad (11.11)$$

têm a seguinte interpretação: os termos na diagonal, $\frac{\partial f_1}{\partial x_1}$ e $\frac{\partial f_2}{\partial x_2}$, são as taxas de crescimento de cada uma das duas espécies, independentemente da outra. Os termos fora da diagonal, $\frac{\partial f_1}{\partial x_2}$ e $\frac{\partial f_2}{\partial x_1}$, têm a ver com a influência de cada espécie no crescimento da outra. Por exemplo, se $\frac{\partial f_1}{\partial x_2}$ for negativa, quer dizer que a existência de elementos da espécie 2 faz diminuir a população da espécie 1.

Os sistemas de suas espécies são classificados em três categorias:

1. **Sistemas com cooperação.** $\frac{\partial f_1}{\partial x_2}$ e $\frac{\partial f_2}{\partial x_1}$ são ambas positivas. Cada espécie propicia o aumento da população da outra espécie.
2. **Sistemas com competição.** $\frac{\partial f_1}{\partial x_2}$ e $\frac{\partial f_2}{\partial x_1}$ são ambas negativas. Cada espécie propicia a extinção da outra espécie.
3. **Sistemas predador presa.** $\frac{\partial f_1}{\partial x_2}$ e $\frac{\partial f_2}{\partial x_1}$ têm sinais opostos. Uma das espécies (predadores) propicia a extinção da outra (presas); o aumento da população de predadores é maior quantas mais presas houver e a diminuição da população de presas é maior quantos mais predadores houver.

11.3.1. Sistemas predador presa

Se a população das presas for x_1 e a população dos predadores for x_2 , nas equações de evolução 11.9, $f_1(x_1, x_2)$ é a taxa de crescimento da população de presas, decrescente em ordem a x_2 , e $f_2(x_1, x_2)$ é a taxa de crescimento da população de predadores, crescente em ordem a x_1 .

Essas propriedades de f_1 e f_2 possibilitam a existência de ciclos, tal como se mostra na figura 11.7. Mas para que possa existir um ciclo no sistema deve existir um centro, foco ou nó dentro desse ciclo.

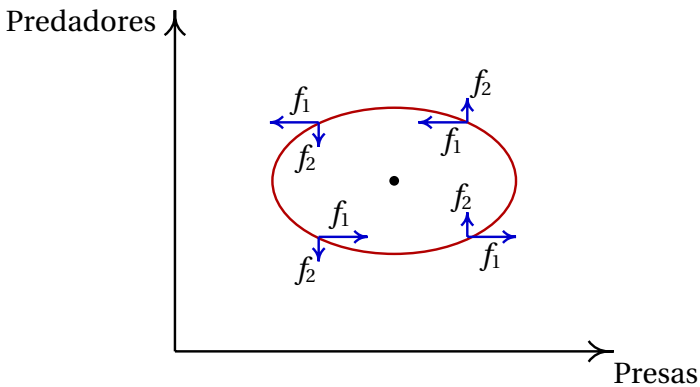


Figura 11.7.: Possível ciclo num sistema predador presa.

A origem também é um ponto de equilíbrio. Como sobre cada um dos eixos coordenados o estado evolui na direção desse eixo, a origem e quaisquer outros pontos de equilíbrio nos eixos devem ser nós ou pontos de sela. Se um desses pontos for estável, existe um estado de equilíbrio estável em que uma das espécies é extinta e a população da outra permanece constante.

Exemplo 11.3

Análise o modelo de **Lotka-Volterra**:

$$\dot{x} = x(a - cy) \quad \dot{y} = y(bx - d)$$

com 4 parâmetros positivos a , b , c e d .

Resolução. Observando as equações, conclui-se que se trata de um sistema predador presa, em que x representa a população de presas, com crescimento exponencial, e y é a população de predadores, com extinção exponencial.

Começa-se por determinar os pontos de equilíbrio

```
(%i19) f: [x*(a-c*y), y*(b*x-d)]$
(%i20) vars: [x,y]$
(%i21) equil: solve (f,vars);
(%o21)       $\left[ \left[ x=0, y=0 \right], \left[ x=\frac{d}{b}, y=\frac{a}{c} \right] \right]$ 
```

ou seja, existem 2 pontos de equilíbrio na região de interesse (primeiro quadrante, semieixos positivos e origem): (0,0) e $(d/b, a/c)$.

```
(%i22) J: jacobian(f, vars)$
```

Na origem, a matriz do sistema linear que aproxima o sistema original é

```
(%i23) subst (equil[1], J);
(%o23)       $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -d \end{bmatrix}$ 
```

Os valores próprios são a e $-d$ e, como tal, a origem é ponto de sela (instável). No segundo ponto de equilíbrio, a aproximação linear tem matriz e valores próprios:

```
(%i24) subst (equil[2], J);
(%o24)       $\begin{bmatrix} 0 & \frac{cd}{b} \\ \frac{ab}{c} & 0 \end{bmatrix}$ 
(%i25) eigenvalues (%);
(%o25)       $\left[ \left[ -\sqrt{-ad}, \sqrt{-ad} \right], [1, 1] \right]$ 
```

Como os quatro parâmetros são positivos, os valores próprios são imaginários; assim sendo, o segundo ponto de equilíbrio é um centro.

Qualquer situação inicial (na região onde as duas variáveis são positivas) faz parte de um ciclo, em que as populações das duas espécies oscilam. Para representar o retrato de fase e a evolução das variáveis, é necessário dar alguns valores numéricos aos parâmetros, por exemplo:

```
(%i26) plotdf (subst ([a=6,b=3,c=2,d=15], f), vars, [x,0,10], [y,0,10],
[nsteps,1000], [direction,forward], [trajectory_at,7,1], [versus_t,1]);
```

A figura 11.8 mostra os gráficos obtidos.

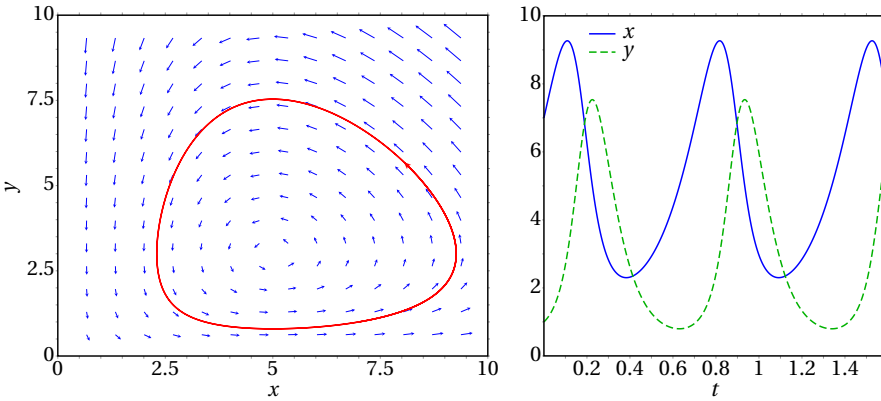


Figura 11.8.: Retrato de fase do modelo de Lotka-Volterra e gráfico das populações em função do tempo.

Inicialmente, as populações de presas e de predadores aumentam, mas quando o número de predadores aumentar por cima do seu valor médio, a população de presas começará a decrescer. Quando o número de presas for menor que o seu valor médio, a falta de presas fará com que a população de predadores diminua; quando diminuir por baixo do seu valor médio, a população de presas voltará a aumentar e o ciclo repetir-se-á.

O modelo de Lotka-Volterra produz ciclos, que podem fazer oscilar a população entre um valor muito pequeno e um valor muito elevado. Situação essa que não é muito realista num sistema predador presa. Um sistema mais realista deverá ter apenas ciclos limite, como no exemplo seguinte.

Exemplo 11.4

Analise o modelo seguinte, de **Holling-Tanner**, e mostre que tem um ciclo limite

$$\dot{x} = x \left(1 - \frac{x}{7} \right) - \frac{6xy}{7+7x} \quad \dot{y} = 0.2y \left(1 - \frac{y}{2x} \right)$$

Resolução. Observando as equações, conclui-se que é um modelo predador presa, em que x representa a população de presas, com crescimento

logístico, e y é a população de predadores, também com crescimento logístico.

Determinação dos pontos de equilíbrio:

```
(%i27) f: [x*(1-x/7) - 6*x*y/(7+7*x), 0.2*y*(1-y/2/x)]$
(%i28) equil: solve (f);
(%o28) [[y=0, x=0], [y=0, x=-1], [y=0, x=7],
        [y=-14, x=-7], [y=2, x=1]]
```

Assim sendo, existem 3 pontos de equilíbrio: (0, 0), (7, 0) e (1, 2). Os valores e vetores próprios no ponto (7, 0) são:

```
(%i29) vars: [x,y]$
(%i30) J: jacobian (f, vars)$
(%i31) eigenvectors (subst (equil[3], J));
(%o31) [[[[1/5, -1], [1, 1]], [[1, -8/5], [1, 0]]]]
```

o ponto de equilíbrio em (7, 0) é então ponto de sela. Observe-se que o vetor próprio (1, 0), paralelo ao eixo dos x , corresponde ao valor próprio negativo, -1 . Isso quer dizer que, quando os predadores y se extinguirem, a população de presas evolui aproximando-se do valor de equilíbrio $x = 7$. Mas se a população de presas estiver próxima desse valor limite $x = 7$ e existirem alguns poucos predadores, o estado evolui na direção $(-1, 8/5)$ (o vetor próprio obtido em (%o30) multiplicado por -1 também é vetor próprio), afastando-se do ponto de equilíbrio (valor próprio positivo, $1/5$) e aproximando-se do ponto de equilíbrio em (1, 2).

A matriz jacobiana na origem não pode ser calculada, porque obtêm-se denominadores nulos; a análise de estabilidade da origem será feita no fim desta resolução.

O ponto (1, 2) é foco repulsivo, como mostra o cálculo dos valores próprios nesse ponto:

```
(%i32) map (rectform, eigenvalues (subst (equil[5], J)));
(%o32) [[ [3/70 - sqrt(551)i/70, sqrt(551)i/70 + 3/70], [1, 1] ]]
```

Se y for maior que $2x$, e o valor de x for elevado, as duas componentes da velocidade de fase são negativas (por exemplo, `limit(subst(y=3*x,f),x,inf)` é $(-\infty, -\infty)$). E se y for menor que $2x$ e x for elevado, a componente x da velocidade de fase é negativa. Isso implica que na região afastada da origem, o estado aproxima-se sempre da origem, mas como no ponto $(1, 2)$ há um foco repulsivo, conclui-se que deve existir um ciclo limite atrativo à volta do foco.

O retrato de fase (figura 11.9) é obtido com o seguinte comando:

```
(%i33) plotdf (f, vars, [x,-0.1,10], [y,-0.1,8])$
```

Usou-se -0.1 para o valor mínimo de x , para evitar os denominadores nulos obtidos quando $x = 0$. A figura 11.9 mostra o gráfico obtido.

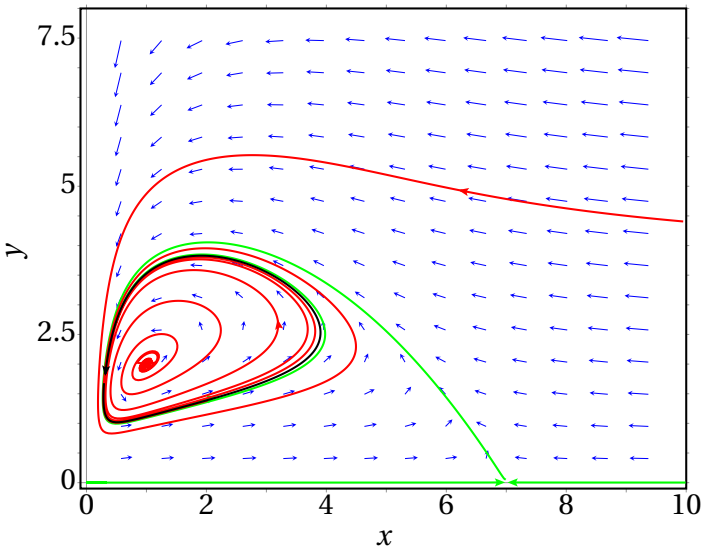


Figura 11.9.: Retrato de fase do modelo de Holling-Tanner.

O ciclo limite tem uma cor mais escura na figura 11.9 e as curvas de evolução que entram e saem do ponto de sela em $x = 7$ têm uma cor mais clara. No eixo dos y há uma descontinuidade na derivada de y e, por isso, não existem curvas de evolução nesse eixo, mas para $x > 0$ a origem comporta-se como ponto de sela.

11.3.2. Sistemas com competição

Num sistema com competição, a taxa de aumento de cada uma das espécies diminui com o aumento da outra população. Consequentemente, não podem existir ciclos, como no caso dos sistemas predador presa.

Exemplo 11.5

Explique os possíveis retratos de fase do seguinte sistema com 6 parâmetros positivos a, b, c, d, e, f :

$$\dot{x} = x(a - bx - cy) \quad \dot{y} = y(d - ey - fx)$$

Resolução: As equações mostram que se trata de um sistema de duas espécies em competição. Para evitar conflitos com valores de variáveis usados nos exemplos anteriores, convém apagar os valores numéricos associados anteriormente a variáveis do Maxima.

```
(%i34) remvalue (all)$
(%i35) fg: [x*(a-b*x-c*y), y*(d-e*y-f*x)]$
(%i36) vars: [x,y]$
(%i37) equil: solve (fg, vars);
(%o37) [[x=0, y=0], [x=a/b, y=0], [x=0, y=d/e],
        [x=-a*e-c*d/(c*f-b*e), y=a*f-b*d/(c*f-b*e)]]
```

O único ponto de equilíbrio fora dos eixos é o quarto; pode usar-se o comando `subst` para simplificar o resultado, definindo 3 novas constantes,

```
(%i38) ponto: subst ([c*f-b*e=c1, a*e-c*d=-c2, a*f-b*d=c3], equil[4]);
(%o38) [[x=c2/c1, y=c3/c1]]
```

esse ponto só estará no primeiro quadrante se as três constantes c_1, c_2 e c_3 , forem todas positivas ou todas negativas. A matriz da aproximação linear nesse ponto é

```
(%i39) J: jacobian (fg, vars)$
(%i40) A: subst (equil[4], J)$
```

que pode ser simplificada com as funções `ratsimp` e `factor` (para aplicar uma função a cada elemento de uma lista ou matriz usa-se o comando `map`):

```
(%i41) A: map (ratsimp, A)$
(%i42) A: map (factor, A);
(%o42) 
$$\begin{bmatrix} \frac{b(ae - cd)}{cf - be} & \frac{c(ae - cd)}{cf - be} \\ -\frac{f(af - bd)}{cf - be} & -\frac{e(af - bd)}{cf - be} \end{bmatrix}$$

```

Apareceram novamente as três constantes c_1 , c_2 e c_3 definidas previamente; substituindo essas variáveis obtém-se:

```
(%i43) A: subst([c*f-b*e=c1, a*e-c*d=-c2, a*f-b*d=c3], A);
(%o43) 
$$\begin{bmatrix} -\frac{bc_2}{c_1} & -\frac{cc_2}{c_1} \\ -\frac{c_3f}{c_1} & -\frac{c_3e}{c_1} \end{bmatrix}$$

(%i44) factor (ratsimp (determinant (A)));
(%o44) 
$$-\frac{c_2c_3(cf - be)}{c_1^2}$$

```

Como $(cf - be)$ é igual a c_1 , o determinante da matriz jacobiana no ponto de equilíbrio é igual a $-c_2c_3/c_1$. Como já foi dito, as 3 constantes devem ter o mesmo sinal para que exista ponto de equilíbrio fora dos eixos, ou seja, para que exista a possibilidade das duas espécies coexistirem. Se c_1 , c_2 e c_3 são todas positivas, o ponto de equilíbrio é um ponto de sela (equilíbrio instável). Se as 3 constantes são todas negativas, o ponto de equilíbrio pode ser atrativo, para alguns valores dos parâmetros.

Por exemplo, se as 3 constantes são positivas com os valores (3, 2, 2) obtém-se o retrato de fase no lado esquerdo da figura 11.10:

```
(%i45) plotdf( subst([a=2,b=1,d=2,e=1,c=2,f=2], fg), vars,
[x,0,3.1], [y,0,3.1]);
```

Se no instante inicial a população de uma das espécies for menor, essa espécie será extinta (o sistema aproxima-se do ponto de sela num dos eixos). Se inicialmente as duas populações forem iguais, atinge-se o ponto de equilíbrio em que as duas populações são iguais a $2/3$ ($x = c_2/c_1$, $y = c_3/c_1$).

Um exemplo do caso em que o ponto de equilíbrio é nó atrativo é quando as 3 constantes têm os valores $(-3/4, -1, -1)$; o retrato de fase no lado direito da figura 11.10 foi produzido com seguinte comando:

```
(%i46) plotdf( subst([a=2,b=1,d=2,e=1,c=0.5,f=0.5],fg), vars,
               [x,0,3.1], [y,0,3.1]);
```

Neste caso, as duas espécies coexistem de forma harmoniosa atingindo sempre o ponto de equilíbrio em que as duas populações são iguais a $4/3$ ($x = c_2/c_1$, $y = c_3/c_1$).

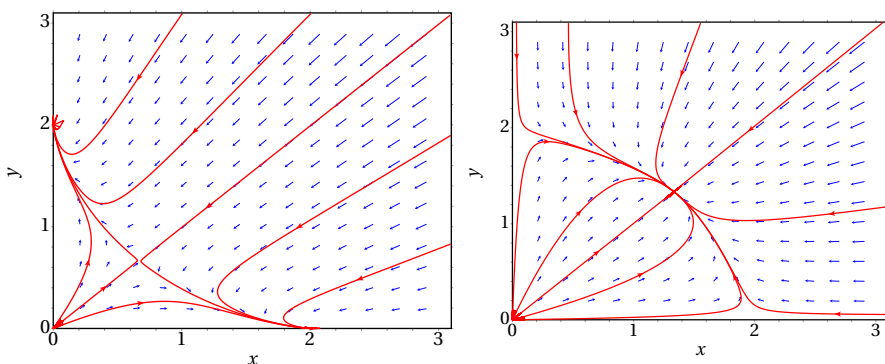


Figura 11.10.: Retratos de fase do exemplo 11.5, nos casos de equilíbrio instável (esquerda) e estável (direita).

Perguntas

- Um sistema, no espaço de fase (x, y) , tem um ciclo limite com raio constante, igual a 2 unidades. Após uma mudança de variáveis para coordenadas polares (r, θ) , com origem no centro do ciclo limite, a equação obtida para o ângulo foi: $\dot{\theta} = 3$. Qual poderá ser a expressão obtida para a derivada do raio r ?

| | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------|
| A. $\dot{r} = 2r^2 - r$ | C. $\dot{r} = 2r - 2r^2$ | E. $\dot{r} = 3r - r^2$ |
| B. $\dot{r} = 3r^2 - 2r$ | D. $\dot{r} = 2r^2 - 4r$ | |
- Um sistema com variáveis de estado (x, y) tem um ciclo limite e um único ponto de equilíbrio P. O que é que caracteriza os pontos (x, y) do ciclo limite?

- A. Estão todos à mesma distância de P.
 - B. Em todos eles a velocidade de fase aponta para P.
 - C. Formam uma curva que passa por P.
 - D. Formam uma curva fechada com P no interior.
 - E. Formam uma curva fechada com P no exterior.
3. Um sistema, no espaço de fase (x, y) , tem um ponto de equilíbrio em $(2, 3)$. Após uma mudança de variáveis para coordenadas polares (r, θ) , com origem no ponto $(2, 3)$, o sistema obtido foi: $\dot{r} = 2r$, $\dot{\theta} = -3$. O que é que possível concluir acerca desse sistema?
- A. $(2,3)$ é foco repulsivo.
 - B. Existe um ciclo limite à volta de $(2,3)$.
 - C. $(2,3)$ é centro.
 - D. $(2,3)$ é foco atrativo.
 - E. $(2,3)$ é nó repulsivo.
4. Que tipo de sistema definem as equações $\dot{x} = y(3 - x)$, $\dot{y} = x(5 + y)$?
- A. Predador presa.
 - B. De duas espécies com competição.
 - C. Conservativo.
 - D. Linear.
 - E. Não linear.
5. As equações de evolução de um sistema de duas espécies são:

$$\dot{x} = x(3 - y) \quad \dot{y} = y(x - 5)$$

que tipo de sistema é?

- A. Predador presa, sendo x as presas.
- B. Predador presa, sendo y as presas.
- C. Sistema com competição.
- D. Sistema com cooperação.
- E. Sistema linear.

Problemas

1. Para visualizar a curva onde \dot{r} é nula no exemplo 11.1, (a) escreva a expressão obtida para a derivada de r em função das coordenadas cartesianas x e y e encontre as soluções da condição $\dot{r} = 0$ (sugestão: substitua r por $\sqrt{x^2 + y^2}$, u por $\arctan(y/x)$, função `atan` no Maxima, e use a função `ratsimp` para simplificar o resultado). (b) Diga que tipo de curva é a solução não trivial encontrada na alínea anterior. (c) Use a função `implicit_plot` para traçar o gráfico da curva da alínea anterior.
2. Encontre a solução do modelo logístico (equação 11.7), usando o método de separação de variáveis com condição inicial $x(0) = x_0$ e mostre que no caso $b = 0$ a solução reduz-se à solução do modelo de Malthus.
3. Uma população de dragões, y , e uma população de águias, x , evoluem de acordo com um modelo de Lotka-Volterra:

$$\dot{x} = x(2 - y) \quad \dot{y} = \frac{y}{2}(x - 3)$$

Analise a estabilidade e desenhe o retrato de fase do sistema. Qual será o estado limite? Alguma das duas espécies será extinta?

4. Considere o modelo de Verhulst para duas populações:

$$\dot{x} = x(1 - x - 2y) \quad \dot{y} = y(1 + 5x - y)$$

diga se é um sistema com competição ou um sistema predador presa (e nesse caso quais as presas e quais os predadores). Analise a estabilidade e trace o retrato de fase.

5. Em cada um dos modelos de duas espécies com competição, na lista que se segue, diga se existe coexistência ou exclusão mútua entre as duas espécies. Se existir coexistência, diga a natureza do ponto de equilíbrio (estável ou instável). Se existir exclusão mútua, diga qual das duas espécies sobrevive. Em todos os casos construa o gráfico do retrato de fase.

$$(a) \quad \dot{x} = x\left(2 - \frac{1}{5}x - \frac{1}{6}y\right) \quad \dot{y} = y\left(1 - \frac{1}{10}y - \frac{1}{8}x\right)$$

$$(b) \quad \dot{x} = 2x\left(1 - \frac{1}{20}x\right) - \frac{1}{25}xy \quad \dot{y} = 4y\left(1 - \frac{1}{40}y\right) - \frac{1}{10}xy$$

$$(c) \quad \dot{x} = x\left(1 - \frac{1}{20}x - \frac{1}{8}y\right) \quad \dot{y} = y\left(1 - \frac{1}{12}y - \frac{1}{16}x\right)$$

$$(d) \quad \dot{x} = 2x\left(1 - \frac{1}{100}x\right) - \frac{1}{40}xy \quad \dot{y} = 10y\left(1 - \frac{1}{50}y\right) - \frac{1}{8}xy$$

6. O sistema dinâmico:

$$\dot{x} = y + x(x^2 + y^2) \quad \dot{y} = -x + y(x^2 + y^2)$$

tem um ponto de equilíbrio na origem. Encontre as equações de evolução em coordenadas polares, nomeadamente, as expressões para \dot{r} e $\dot{\theta}$ em função de r e θ . Explique que tipo de ponto de equilíbrio é a origem e quantos ciclos limite existem.

7. Em relação ao seguinte sistema não linear:

$$\dot{x} = x - y - x^3 - xy^2 \quad \dot{y} = x + y - x^2y - y^3$$

(a) Encontre as equações de evolução em coordenadas polares (sugestão: use o comando `trigreduce` para simplificar o resultado).

(b) Trace o gráfico de \dot{r} em função de r (r não pode ser negativo), demonstre que o sistema tem um único ciclo limite e determine se é atrativo ou repulsivo.

(c) Escreva a equação do ciclo limite, em função das coordenadas cartesianas (x, y) .

(d) Corrobore a resposta traçando o retrato de fase no plano cartesiano (x, y) .

8. Demonstre que o sistema seguinte não tem nenhum ciclo limite.

$$\dot{x} = y \quad \dot{y} = x$$

9. Quantos ciclos limite atrativos e repulsivos tem o seguinte sistema dinâmico?

$$\dot{x} = x \sin\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) - y \quad \dot{y} = y \sin\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) + x$$

10. O sistema de equações de Rössler em 3 dimensões é:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y - z \\ \dot{y} &= x + 0.2y \\ \dot{z} &= 0.2 + (x - c)z \end{aligned}$$

e tem ciclos limite para alguns valores do parâmetro c ; nomeadamente, após algum tempo, as variáveis x , y e z descrevem ciclos que se repetem periodicamente.

(a) Use o programa **rk** para encontrar a solução do sistema com $c = 3$ e condições iniciais $x(0) = z(0) = 0$, $y(0) = 4$, no intervalo $0 \leq t \leq 200$; use 5000 passos ($\Delta t = 0.04$).

(b) Usando unicamente o intervalo $160 \leq t \leq 200$ da solução encontrada na alínea anterior, obtenha os gráficos de y em função de x , e de x em função de t .

(c) Determine, aproximadamente, o período dos ciclos representados nos gráficos da alínea anterior.

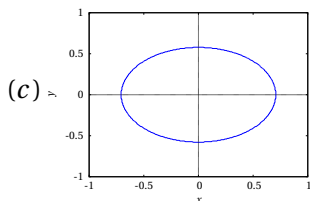
Respostas

Perguntas: 1. D. 2. D. 3. A. 4. E. 5. A.

Problemas

1. (a) $(x, y) = (0, 0)$, ou $2x^2 + 3y^2 = 1$.

(b) A forma canônica da curva é $(2x/\sqrt{2})^2 + (3y/\sqrt{3})^2 = 1$, que é uma elipse com semieixo maior de $\sqrt{2}/2$ unidades, no eixo dos x , e semieixo menor de $\sqrt{3}/3$ unidades, no eixo dos y



$$2. x(t) = \frac{a}{b + \left(\frac{a}{x_0} - b\right)e^{-at}}$$

3. A origem ponto de sela e o ponto $(3, 2)$ é centro. O estado limite é um ciclo. Nenhuma das duas espécies será extinta.

4. Sistema predador presa: x são as presas e y os predadores. A origem é nó próprio, repulsivo, o ponto $(1, 0)$ é ponto de sela e o ponto $(0, 1)$ é nó impróprio, atrativo.

5. (a) Exclusão, com extinção da espécie y e $x \rightarrow 10$.

(b) Coexistência, com $x \rightarrow 20/3$ e $y \rightarrow 100/3$. O ponto de equilíbrio é estável.

(c) Coexistência, no ponto instável $(x = 80/7, y = 24/7)$. O sistema pode terminar com uma das espécies extintas e $x \rightarrow 20$ ou $y \rightarrow 12$.

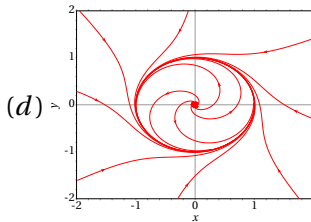
(d) Exclusão, com extinção da espécie y e $x \rightarrow 100$.

6. $\dot{\theta} = -1$, $\dot{r} = r^3$. A origem é foco repulsivo e não existe nenhum ciclo limite.

7. (a) $\dot{\theta} = 1$, $\dot{r} = r - r^3$

(b) O gráfico de \dot{r} em função de r mostra que existe uma única raiz diferente de zero e r aumenta se for menor que 1 e diminui se for maior que 1. Assim sendo, existe um único ciclo limite, uma circunferência de raio 1, e é atrativo.

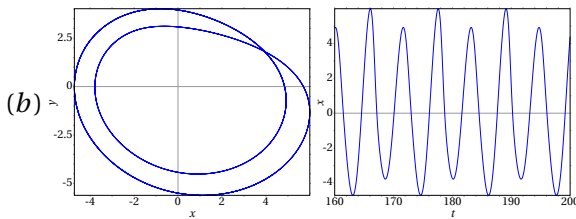
(c) $x^2 + y^2 = 1$



8. O determinante da matriz jacobiana é negativo em qualquer ponto e, como tal, não podem existir ciclos limite.

9. Existem infinitos ciclos limite atrativos e infinitos ciclos limite repulsivos, como mostram as equações de evolução em coordenadas polares: $\dot{\theta} = 1$, $\dot{r} = r \sin(r)$.

10. (a) O último elemento na lista obtida com `rk` é [200.0, 4.393, -4.476, 0.2006]



(c) O período dos ciclos é aproximadamente 11.52 unidades.