2. Cinemática vetorial

Quando um objeto se desloca no espaço sem seguir uma trajetória determinada, a sua posição já não pode ser definida com uma única variável como nos exemplos estudados no capítulo anterior. No século XVII, o matemático Gottfried Leibniz escreveu que seria desejável criar uma área da matemática que descrevesse a posição diretamente, assim como na álgebra usam-se variáveis para representar valores numéricos. Na mesma época, Isaac Newton enunciou a lei do paralelogramo para somar forças. No entanto, o conceito de vetor usado hoje em dia, que permite concretizar o sonho de Leibniz, só foi inventado muitos anos depois, no século XIX.

2.1. Projeção do movimento num eixo

Quando a trajetória de um ponto num objeto em movimento não é conhecida previamente, para determinar a posição do ponto em cada instante de tempo t serão necessárias duas variáveis, se o ponto estiver confinado a mover-se numa superfície, ou três variáveis, no caso geral.

Uma forma conveniente de indicar a posição é usando coordenadas cartesianas (x, y, z). Os valores dessas coordenadas deverão ser funções contínuas do tempo, $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$. O movimento do ponto no espaço pode então ser dividido em três movimentos retilíneos: os movimentos das projeções do ponto em cada um dos eixos cartesianos. Em cada um desses 3 movimentos podem ser aplicadas as equações cinemáticas estudadas no capítulo anterior. As velocidades instantâneas desses 3 movimentos são as derivadas das funções $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$, em ordem ao tempo:

$$v_x = \dot{x} \qquad v_y = \dot{y} \qquad v_z = \dot{z} \tag{2.1}$$

Observe-se que se uma ou duas dessas velocidades forem nulas num instante, isso não implica que a velocidade v seja nula, pois a terceira velocidade pode ter valor diferente de zero.

As acelerações instantâneas associadas a esses 3 movimentos são as derivadas das respetivas velocidades, em ordem ao tempo:

$$a_x = \dot{v}_x \qquad a_y = \dot{v}_y \qquad a_z = \dot{v}_z \tag{2.2}$$

Já não é preciso dizer que são acelerações tangenciais, porque em cada um desses três movimentos não pode existir componente perpendicular da aceleração, por serem movimentos ao longo duma reta. O tempo pode ser eliminado entre as equações 2.1 e as respetivas equações 2.2, obtendo-se as equações que relacionam as acelerações com as velocidades e as posições:

$$a_x = v_x \frac{\mathrm{d}\,v_x}{\mathrm{d}\,x} \quad a_y = v_y \frac{\mathrm{d}\,v_y}{\mathrm{d}\,y} \quad a_z = v_z \frac{\mathrm{d}\,v_z}{\mathrm{d}\,z} \tag{2.3}$$

Quando o movimento do ponto está restringido a um plano, os eixos x e y podem ser escolhidos nesse plano, facilitando o estudo, porque as equações para v_z e a_z deixam de ser necessárias. E se o movimento do ponto estiver restringido a uma reta, essa reta pode ser usada como eixo dos x, sendo apenas necessárias as equações que relacionam x, v_x, a_x e t.

Em geral, as 9 equações diferenciais 2.1, 2.2 e 2.3 poderão ter de ser resolvidas em simultâneo, porque o movimento da projeção num dos eixos pode depender dos movimentos das outras duas projeções. Nos casos em que não exista essa dependência, as equações para o movimento da projeção em cada eixo podem ser resolvidas independentemente.

2.2. Aceleração da gravidade

No seu livro de 1638, "Diálogos Acerca de Duas Novas Ciências", Galileu Galilei explicou, pela primeira vez, que o movimento de um projétil no ar pode ser decomposto na sobreposição de dois movimentos: o movimento da projeção do projétil num eixo horizontal e o movimento da sua projeção num eixo vertical. A figura 1.10 é igual à figura 108 no livro de Galileu e representa um objeto que foi lançado numa plataforma horizontal, abandonando a plataforma no ponto b.

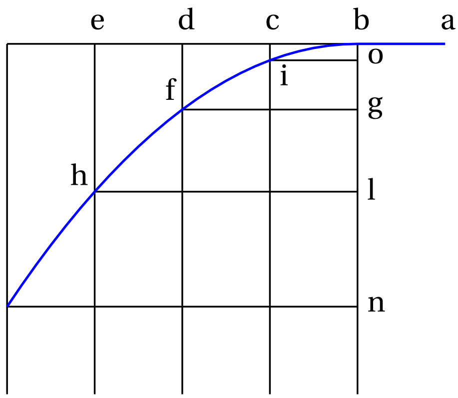


Figura 2.1.: Trajetória de um projétil, tal como foi explicada por Galileu.

Galileu também descobriu que, quando a resistência do ar pode ser desprezada, por exemplo, se o projétil tem forma compacta e a sua trajetória não é muito comprida, o movimento da projeção horizontal é retilíneo e uniforme. Ou seja, em intervalos de tempo iguais, os deslocamentos horizontais do objeto são $\overline{ab}$, $\overline{bc}$, $\overline{cd}$, $\overline{de}$, etc, todos com o mesmo comprimento. Na direção vertical, as distâncias que o objeto cai durante esses intervalos de tempo aumentam quadraticamente; isto é, durante o primeiro intervalo de tempo a distância descida é $\overline{ci}$, durante o segundo intervalo já tem descido uma distância total $\overline{df}$, que é quatro vezes maior que $\overline{ci}$ e durante o terceiro intervalo a distância total descida é $\overline{eh}$, nove vezes maior do que $\overline{ci}$.

A componente vertical da velocidade aumenta, mas como os deslocamentos verticais nos intervalos de tempo iguais, $\overline{bo}$, $\overline{og}$, $\overline{gl}$ e $\overline{ln}$, estão na proporção 1, 3, 5 e 7, então a componente vertical da aceleração (aumento da componente vertical da velocidade) é constante. Galileu também observou que essa aceleração é igual para todos os objetos, independentemente do seu tamanho ou da sua massa, e é a aceleração da gravidade, representada pela letra g.

O valor da aceleração da gravidade é ligeiramente diferente em diferentes locais na superfície da Terra, mas é aproximadamente igual a 9.8 m/s^2. A resistência do ar produz outra aceleração que contraria o movimento, mas quando essa resistência for desprezável, admite-se que o valor da aceleração é constante e igual a g.

Se o eixo dos y for definido na vertical e apontando para cima, então as componentes da aceleração são $a_y = -g = -9.8$ m/s^2 e $a_x = 0$. O movimento da projeção horizontal é uniforme e o movimento da projeção vertical é uniformemente acelerado. Usando as equações dos movimentos uniforme e uniformemente acelerados estudadas no capítulo anterior, obtêm-se as seguintes equações:

$$x(t) = x_i + v_{ix}\,(t - t_i) \qquad v_x(t) = v_{ix} \tag{2.4}$$

$$y(t) = y_i + v_{iy}\,(t - t_i) - \frac{g}{2}\,(t - t_i)^2 \tag{2.5}$$

$$v_y(t) = v_{iy} - g\,(t - t_i) \tag{2.6}$$

$$v_y(y)^2 = v_{iy}^2 - 2\,g\,(y - y_i) \tag{2.7}$$

Onde v_{ix} e v_{iy} são as projeções horizontal e vertical da velocidade inicial v_i. Por exemplo, se um projétil for lançado com uma velocidade inicial v_i, inclinada um ângulo θ por cima da horizontal, então $v_{ix} = v_i \cos(\theta)$ e $v_{iy} = v_i \sin(\theta)$.

Do ponto de vista da trajetória parabólica do objeto, a aceleração tangencial a_t produzida pela gravidade pode ser positiva, negativa ou nula, já que pode fazer aumentar ou diminuir a velocidade do objeto, e pode ter um valor menor que g se a trajetória não for vertical, mas existirá também outra aceleração, a aceleração normal ou centrípeta; a soma das componentes verticais dessas duas acelerações deverá ser sempre igual a g e a soma das componentes horizontais igual a zero.

Exemplo 2.1
Atira-se uma pedra desde uma ponte que está 5 m acima de um rio, com velocidade de 15 m/s e dirigida 36.9° para cima da horizontal. Determine a velocidade que terá a pedra quando entrar na superfície do rio e a altura máxima da sua trajetória, medida desde a superfície do rio (admita que a resistência do ar pode ser desprezada).

Resolução. A componente horizontal da velocidade inicial é $15\cos 36.9^\circ = 12.0$ m/s e a componente vertical é $15\sin 36.9^\circ = 9.0$ m/s. é conveniente escolher o eixo dos x na horizontal, seguindo a direção da projeção horizontal da velocidade, e o eixo dos y na vertical e apontando para cima. A origem pode ser escolhida no ponto onde a pedra foi lançada, mas neste caso vamos escolhê-la diretamente por baixo desse ponto e sobre a superfície do rio. Nesse sistema de coordenadas, a posição inicial é $x = 0$ e $y = 5$ (unidades SI), as componentes da velocidade são $v_x = 12$, $v_y = 9$ e as componentes da aceleração são $a_x = 0$, $a_y = -9.8$.

Os dois movimentos ao longo dos dois eixos podem ser analisados independentemente. Como o movimento ao longo do eixo dos y é uniformemente acelerado, podem usar-se as equações 2.4, 2.5, 2.6 e 2.7. No entanto, mostraremos como resolver o problema usando o método de separação de variáveis, que é mais geral.

O valor constante de a_y pode substituir-se na segunda equação 2.2 e na segunda equação 2.3, obtendo-se duas equações diferenciais ordinárias de primeira ordem:

$$-9.8 = \frac{\mathrm{d}\,v_y}{\mathrm{d}\,t} \qquad -9.8 = v_y\,\frac{\mathrm{d}\,v_y}{\mathrm{d}\,y}$$

Para obter a velocidade da pedra quando entra na água, é necessário resolver a segunda equação, que pode ser feito separando as variáveis y e v_y aos dois lados da equação

$$-9.8\,\mathrm{d}\,y = v_y\,\mathrm{d}\,v_y$$

A seguir, integra-se o lado esquerdo da equação, desde a altura inicial $y = 5$, até à altura final $y = 0$ e o lado direito integra-se desde a velocidade inicial $v_y = 9$ até o seu valor final, v_f, ainda desconhecido

$$-\int_5^0 9.8\,\mathrm{d}\,y = \int_9^{v_\mathrm{f}} v_y\,\mathrm{d}\,v_y$$

Calculam-se estes dois integrais (no Maxima usa-se integrate (9.8, y, 5, 0) e integrate (vy, vy, 9, vf)) e o resultado é

$$9.8 \times 5 = \frac{v_\text{f}^2}{2} - \frac{81}{2} \implies v_\text{f} = -\sqrt{98+81}$$

(a segunda solução, $+\sqrt{98+81}$, corresponde à velocidade que a pedra teria se tivesse sido lançada para cima desde o rio, passando pela ponte com componente vertical da velocidade igual a 9 m/s e para cima).

Assim sendo, a componente vertical da velocidade quando a pedra entra no rio é $v_\text{f} = -13.38$ m/s. Como o movimento na horizontal é uniforme, a componente horizontal da velocidade é sempre igual ao seu valor inicial 12.0 m/s e a velocidade com que a pedra entra no rio é

$$v = \sqrt{13.38^2 + 12^2} = 18.0\ \text{m/s}$$

No ponto da trajetória onde a altura é máxima, a componente vertical da velocidade é nula, porque a pedra pára de subir e começa a descer. Os mesmos dois integrais já calculados podem ser calculados novamente, mas mudando o ponto final do integral do ponto onde a pedra entra no rio, para o ponto onde está na sua altura máxima, com valor de y ainda desconhecido, mas com componente vertical da velocidade v_y nula

$$-\int_5^{y_\text{m}} 9.8\,\text{d}\,y = \int_9^0 v_y\,\text{d}\,v_y$$

onde y_m é a altura máxima. Resolvem-se esses integrais e obtém-se assim o valor da altura máxima

$$9.8(5 - y_\text{m}) = -\frac{81}{2} \implies y_\text{m} = 9.13\ \text{m}$$

2.3. Vetores

Uma grandeza que tem sempre o mesmo valor, quando é medida por diferentes observadores em diferentes referenciais, chama-se **escalar**. Algumas das grandezas usadas no capítulo anterior são escalares; por exemplo, o deslocamento $\Delta\, s$ e o intervalo de tempo $\Delta\, t$.

Alguns exemplos de grandezas físicas que não são escalares são as componentes da posição, velocidade e aceleração ao longo de um eixo. Alterando a direção, o sentido ou a origem desse eixo, os valores dessas grandezas também se alteram.

É útil escrever as equações da física de forma a que sejam iguais em qualquer referencial e os vetores permitem atingir esse objetivo. Um exemplo típico de vetor é o vetor deslocamento, que é um segmento de reta orientado entre dois pontos P_1 e P_2 no espaço, em que o primeiro ponto é considerado a origem do segmento e o outro ponto o fim.

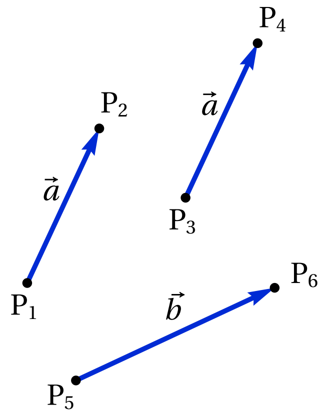


Figura 2.2.: Vetores livres.

Por exemplo, na figura 2.2 está representado o vector com origem num ponto P_1 e fim num ponto P_2; a seta indica qual é o ponto final e por cima da letra usada para representar o vetor coloca-se também uma seta, $\vec{a}$, para que fique claro que se trata de um vetor e não de uma variável algébrica comum.

2.3.1. Propriedades dos vetores

A distância entre o ponto inicial e final de um vetor deslocamento chama-se **módulo**, ou norma. Se um vetor é representado por $\vec{a}$, então neste livro o módulo desse vetor representa-se por a (a mesma letra mas sem seta). Como a distância entre dois pontos é um escalar, o módulo de um vetor é uma grandeza escalar. Um vetor é caraterizado pelo seu módulo, pela sua **direção**, que é a orientação da reta que passa pelos dois pontos, e pelo seu **sentido**, que indica qual o ponto inicial e qual o ponto final nessa reta.

Dois vetores são iguais se, e só se, a suas direções, sentidos e módulos são iguais. Por exemplo, na figura 2.2 o vetor entre os pontos P_1 e P_2 e o vetor entre os pontos P_3 e P_4 consideram-se iguais e, por isso, foram identificados com a mesma letra, $\vec{a}$. A distância entre P_3 e P_4 é igual à distância entre P_1 e P_2 e as retas que passam por esses dois pares de pontos são paralelas. O vetor $\vec{b}$, entre os pontos P_5 e P_6, não é igual a $\vec{a}$ por ter módulo e direção diferentes. Este tipo de vetores chamam-se vetores livres porque não interessam os pontos específicos onde estejam colocados, sempre que esses pontos definam corretamente o módulo, direção e sentido do vetor.

Na figura 2.3, partindo do ponto P o vetor $\vec{a}$ produz um deslocamento até o ponto Q; a seguir, o vetor $\vec{b}$ provocará um deslocamento até o ponto R; assim sendo, o deslocamento combinado de $\vec{a}$ e $\vec{b}$ é equivalente ao deslocamento desde P até R, representado na figura pelo vetor $\vec{c}$. Diz-se que $\vec{c}$ é igual à soma dos vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{c} \tag{2.8}$$

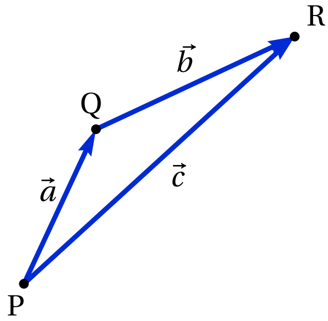


Figura 2.3.: Soma de vetores.

Ou seja, a adição de dois vetores consiste em deslocar um deles de forma a fazer coincidir o seu ponto inicial com o ponto final do primeiro, obtendo-se como resultado o vetor que vai desde o ponto inicial do primeiro vetor até o ponto final do segundo.

A equação $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$ implica que $\vec{b}=\vec{c}-veca$ e a figura 2.3 mostra que o vetor $\vec{b}$ vai desde o ponto final de $\vec{a}$ até o ponto final de $\vec{c}$, quando os pontos iniciais de $\vec{a}$ e $\vec{c}$ coincidem. Como tal, para subtrair dois vetores deslocam-se para um ponto inicial comum e o resultado da subtração é o vetor que vai desde o ponto final do segundo vetor, até o ponto final do primeiro vetor.

A adição de vetores é comutativa: deslocar o vetor $\vec{b}$ a continuação do vetor $\vec{a}$ produz o mesmo resultado do que deslocar o vetor $\vec{a}$ a continuação do vetor $\vec{b}$ (figura 2.4). A soma dos vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ é a diagonal do paralelogramo em que dois dos lados são iguais a $\vec{a}$ e os outros dois lados são iguais a $\vec{b}$. A soma de vários vetores também verifica a propriedade associativa.

Seguindo as regras para soma e subtração de vetores, a soma de um vetor com si próprio, $\vec{a}+\vec{a}$, é um vetor com a mesma direção e o mesmo sentido, mas com módulo duas vezes maior e a subtração de um vetor a si próprio, $\vec{a}-\vec{a}$, produz um vetor nulo (o mesmo ponto inicial e final). Generalizando esses resultados, define-se o produto de um escalar k e um vetor $\vec{a}$, igual a outro vetor com a mesma direção de $\vec{a}$ mas com módulo igual a $|k|\,a$. O sentido de $k\,\vec{a}$ é o mesmo de $\vec{a}$, se k for positivo, ou oposto se k for negativo. Costuma escrever-se primeiro o escalar e a seguir o vetor, mas o produto entre escalar e vetor é comutativo. Se k for igual a zero, $k\,\vec{a}$ é o vetor nulo,

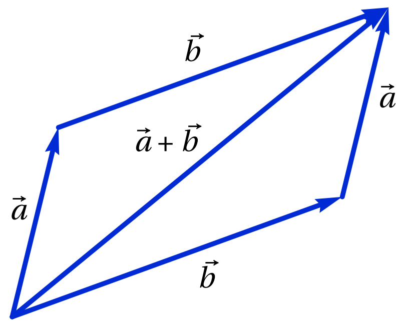


Figura 2.4.: Regra do paralelogramo para somar vetores.

$\vec{0}$.

Qualquer vetor $\vec{a}$ é igual ao produto $a\,\hat{a}$, em que $\hat{a}$ é um vetor de módulo unitário, com a mesma direção e sentido de $\vec{a}$ (figura 2.5). Esse vetor unitário, com a mesma direção e sentido de $\vec{a}$, chama-se **versor** de $\vec{a}$. Neste livro usa-se um acento circunflexo para indicar versores.

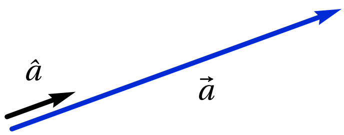


Figura 2.5.: Versor $\hat{a}$ associado ao vetor $\vec{a}$.

Considere-se um sistema de coordenadas cartesianas, como na figura figura 2.6. Cada ponto P tem 3 coordenadas cartesianas $(x,\ y,\ z)$ e está no vértice de um paralelepípedo com arestas x, y e z, fases paralelas aos três planos xy, xz e yz e o vértice oposto a P encontra-se na origem O do referencial.

Existem duas formas diferentes de definir os sentidos positivos dos três eixos x, y e z. A forma habitual consiste em seguir a **regra da mão direita**: fecha-se o punho direito, esticam-se os dedos maior, indicador e polegar, de forma a formarem ângulos retos entre si; o indicador apontará no sentido do eixo dos x, o dedo maior no sentido do eixo dos y e o polegar no sentido do eixo dos z. Um referencial cartesiano pode ser definido indicando o ponto O que define a origem e 3 versores perpendiculares, $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ e $\hat{k}$, que definem as direções e sentidos dos 3 eixos.

Qualquer vetor pode ser obtido somando 3 deslocamentos ao longo dos 3

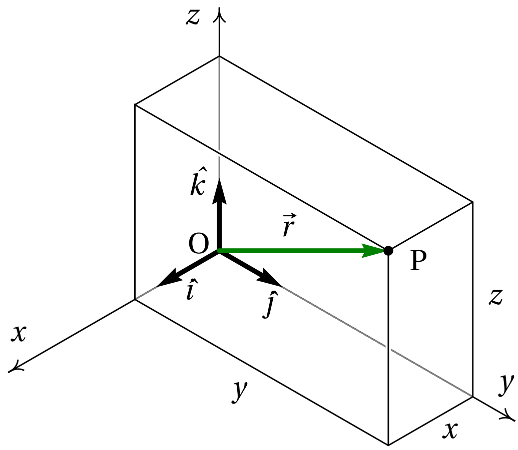


Figura 2.6.: Coordenadas cartesianas de um ponto P e versores cartesianos.

eixos; por exemplo,

$$\vec{a} = a_x\,\hat{\imath} + a_y\,\hat{\jmath} + a_z\,\hat{k}$$
$$\vec{b} = b_x\,\hat{\imath} + b_y\,\hat{\jmath} + b_z\,\hat{k} \tag{2.9}$$

em que $(a_x,\ a_y,\ a_z)$ e $(b_x,\ b_y,\ b_z)$ são as componentes cartesianas dos vetores. Usando as propriedades da soma vetorial e do produto de escalar por vetor, a soma dos dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ pode ser obtida somando as respetivas componentes:

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x)\,\hat{\imath} + (a_y + b_y)\,\hat{\jmath} + (a_z + b_z)\,\hat{k} \tag{2.10}$$

Ou seja, a soma de dois vetores é outro vetor com componentes iguais à soma das componentes dos vetores originais. Observe que a direção, o sentido e o módulo de um vetor $\vec{a}$ são independentes do sistema de eixos usado e da escolha da origem O; no entanto, as suas componentes $(a_x,\ a_y,\ a_z)$ são diferentes em diferentes sistemas de eixos. Se dois vetores são iguais, as suas componentes, no mesmo sistema de eixos, também devem ser iguais.

O **vetor posição** de um ponto P, com coordenadas $(x,\ y,\ z)$, é o vetor $\vec{r}$ que vai desde a origem O até o ponto P e pode ser obtido somando 3 deslocamentos ao longo dos 3 eixos (ver figura 2.6):

$$\vec{r} = x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath} + z\,\hat{k} \tag{2.11}$$

Observe-se que as componentes desse vetor posição são iguais as coordenadas cartesianas do ponto P, (x, y, z). O vetor posição do ponto P depende da origem do sistema; ou seja, em dois sistemas com origens diferentes os vetores posição do ponto P são diferentes. Em dois sistemas diferentes mas com a mesma origem, o vetor posição de P é o mesmo, mas as suas componentes são diferentes nos dois sistemas.

2.3.2. Velocidade e aceleração vetoriais

A trajetória de um ponto em movimento pode ser definida em cada instante t através do vetor posição do ponto,

$$\boxed{\vec{r}(t) = x(t)\,\hat{\imath} + y(t)\,\hat{\jmath} + z(t)\,\hat{k}} \tag{2.12}$$

Cada uma das três componentes, $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$, é uma função do tempo. Num intervalo de tempo $\Delta t = t_2 - t_1$ o deslocamento do ponto (ver figura 2.7) é igual a

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \tag{2.13}$$

em que $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$ são os vetores posição nos instantes t_1 e t_2.

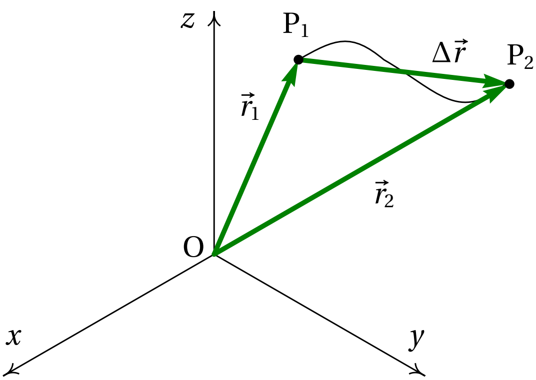


Figura 2.7.: Trajetória de um ponto e deslocamento $\Delta\vec{r}$ entre dois instantes t_1 e t_2.

O vetor obtido dividindo o deslocamento $\Delta\vec{r}$ por Δt é o vetor velocidade média, com a mesma direção e sentido do deslocamento $\Delta\vec{r}$. Define-se o **vetor velocidade** em cada instante, igual ao deslocamento dividido por Δt, no limite em que Δt se aproxima de zero,

$$\boxed{\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\,\vec{r}}{\mathrm{d}\,t}} \tag{2.14}$$

Como as componentes cartesianas do deslocamento vetorial $\Delta \vec{r}$ são Δx, Δy e Δz, então o vetor velocidade é igual a

$$\vec{v} = \dot{x}\,\hat{\imath} + \dot{y}\,\hat{\jmath} + \dot{z}\,\hat{k} \tag{2.15}$$

As equações obtidas aplicando a equação 1.8 às três componentes do vetor posição combinam-se numa única equação vetorial:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_i + \int_{t_i}^{t} \vec{v}(t')\,\mathrm{d}\,t' \tag{2.16}$$

O aumento do vetor velocidade, $\Delta \vec{v}$, durante o intervalo de tempo Δt, dividido por esse intervalo, define o **vetor aceleração**,

$$\boxed{\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\,\vec{v}}{\mathrm{d}\,t}} \tag{2.17}$$

e as suas componentes são as derivadas das componentes da velocidade:

$$\vec{a} = \dot{v}_x\,\hat{\imath} + \dot{v}_y\,\hat{\jmath} + \dot{v}_z\,\hat{k} = \ddot{x}\,\hat{\imath} + \ddot{y}\,\hat{\jmath} + \ddot{z}\,\hat{k} \tag{2.18}$$

As equações obtidas aplicando a equação 1.22 às três componentes do vetor velocidade combinam-se também numa única equação vetorial:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_i + \int_{t_i}^{t} \vec{a}(t')\,\mathrm{d}\,t' \tag{2.19}$$

As equações 2.15 e 2.18 são as mesmas 6 equações 2.1 e 2.2, combinadas em duas equações vetoriais, usando o facto que a igualdade de dois vetores implica a igualdade das suas componentes.

As restantes 3 equações 2.3 também podem ser combinadas numa equação vetorial: $\vec{a}\cdot\mathrm{d}\,\vec{r} = \vec{v}\cdot\mathrm{d}\,\vec{v}$, onde o ponto “·” representa o produto escalar, que será introduzido no fim do capítulo. No entanto, para resolver equações diferenciais usando o método de separação de variáveis usado no capítulo anterior, é mais útil usar as 3 equações 2.3 por separado.

A rapidez $|v|$ referida no capítulo anterior é o módulo do vetor $\vec{v}$. Quando o movimento pode ser em qualquer direção do espaço, chamaremos simplesmente velocidade ao vetor $\vec{v}$ e "valor da velocidade" a $|v|$; de forma análoga, o vetor $\vec{a}$ chamar-se-á simplesmente aceleração e a será o valor da aceleração.

Exemplo 2.2
A velocidade de uma partícula em função do tempo t é dada pela expressão (unidades SI):

$$\vec{v} = \left(5 - t^2 \mathrm{e}^{-t/5}\right) \hat{\imath} + \left(3 - \mathrm{e}^{-t/12}\right) \hat{\jmath}$$

A partícula passa pela posição $(2\,\hat{\imath} + 5\,\hat{\jmath})$ no instante $t = 0$. Encontre o vetor posição, a velocidade e a aceleração no instante $t = 15$ s e quando t tende para infinito. Trace o gráfico da trajetória da partícula durante os primeiros 60 segundos do movimento.

Resolução. As componentes da velocidade podem ser representadas por uma lista no Maxima:

```
(%i1) v: [5-t^2*exp(-t/5), 3-exp(-t/12)];
```

(%o1) $\left[\; 5 - t^2\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}},\; 3 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{12}} \right]$

As funções diff e integrate aceitam também uma lista com expressões, derivando (ou integrando) cada um dos elementos da lista. Assim sendo, a aceleração (derivada da velocidade em ordem ao tempo) é,

```
(%i2) a: diff (v, t);
```

(%o2) $\left[\; \frac{t^2\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}}}{5} - 2\,t\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}} \;,\; \frac{\mathrm{e}^{-\frac{t}{12}}}{12} \;\right]$

As componentes do vetor obtêm-se a partir da equação 2.16.

```
(%i3) assume (t > 0)$
(%i4) r: expand([2,5] + integrate(v, t, 0, t));
```

(%o4) $\left[5\,t^2\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}} + 50\,t\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}} + 250\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}} + 5\,t - 248\,,\;\; 12\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{12}} + 3\,t - 7\right]$

usou-se o comando assume para indicar que t é positiva; se não tivesse sido usado, Maxima teria perguntado o sinal de t, já que o resultado do integral depende desse sinal.

O vetor posição, a velocidade e a aceleração aos 15 segundos são,

```
(%i5) float (subst (t=15, r));
(%o5)         [−67.2, 41.44]
(%i6) float (subst (t=15, v));
(%o6)         [−6.202, 2.713]
(%i7) float (subst (t=15, a));
(%o7)         [0.7468, 0.02388]
```

Para obter os vetores no limite do tempo infinito, usa-se a função limit e o símbolo inf que representa infinito:

```
(%i8) limit (r, t, inf);
(%o8)         [∞, ∞]
(%i9) limit (v, t, inf);
(%o9)         [5, 3]
(%i10) limit (a, t, inf);
(%o10)         [0, 0]
```

Ou seja, a partícula atinge velocidade constante $5\,\hat{\imath} + 3\,\hat{\jmath}$, afastando-se até o infinito.

Para traçar o gráfico da trajetória, usa-se a opção parametric da função plot2d. As componentes x e y do vetor posição devem ser dadas por separado, porque a função plot2d não admite que sejam dadas numa lista. O primeiro elemento da lista r (componente x) identifica-se usando a sintaxe r[1] e o segundo elemento (componente y) com r[2]

```
(%i11) plot2d ([parametric,r[1],r[2]], [t,0,60], [xlabel,"x"],
     [ylabel,"y"]);
```

O intervalo de tempo desde 0 até 60 foi indicado usando a notação [t, 0, 60]. O resultado mostra-se na figura 2.8.

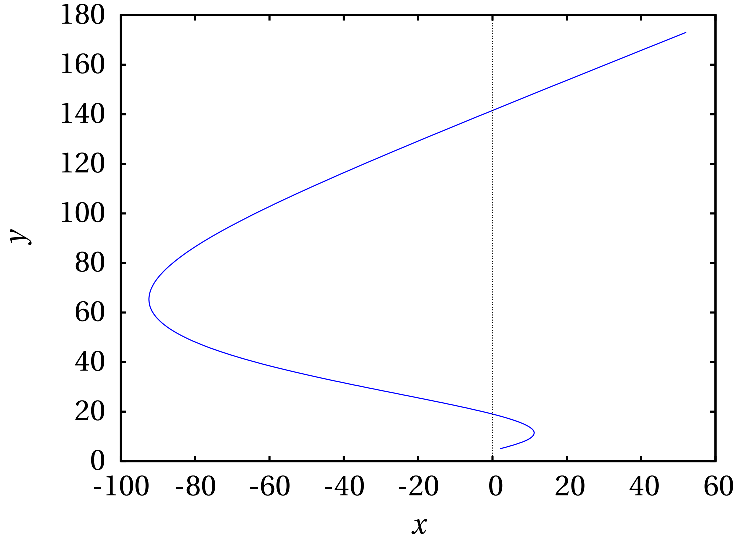


Figura 2.8.: Trajetória da partícula durante os 60 segundos após ter passado pelo ponto (5, 2).

2.3.3. Lançamento de projéteis

O movimento de projéteis sob a ação da gravidade, estudado na secção 2.2, pode também ser analisado de forma vetorial. Escolhendo o eixo dos y na direção vertical, com sentido positivo para cima, tal como na secção 2.2, o vetor aceleração será:

$$\vec{a} = -g\,\hat{\jmath} \tag{2.20}$$

onde a aceleração da gravidade g é, aproximadamente 9.8 m/s^2.

Se um projétil for lançado com velocidade inicial $\vec{v}_i$, a aceleração da gravidade alterará essa velocidade, na direção vertical, mas a componente horizontal de $\vec{v}_i$ permanecerá constante. O resultado será um vetor velocidade $\vec{v}(t)$ que se encontra no mesmo plano vertical em que está a velocidade inicial $\vec{v}_i$. Conclui-se assim que a trajetória do projétil será sempre plana, no plano vertical definido por $\vec{v}_i$ e $\hat{\jmath}$.

A única excepção a essa regra é quando $\vec{v}_i$ não tiver componente horizontal; nesse caso, $\vec{v}_i$ e $\hat{\jmath}$ são paralelos, não definem nenhum plano e a trajetória é uma reta vertical.

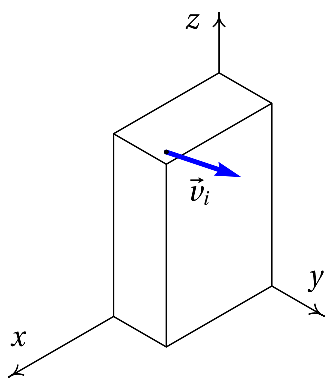
Exemplo 2.3
Um canhão dispara uma bala, desde o terraço de um edifício, na posição (unidades SI):

$$\vec{r}_i = 9\,\hat{\imath} + 4\,\hat{\jmath} + 15\,\hat{k}$$

com velocidade inicial (unidades SI):

$$\vec{v}_i = 13\,\hat{\imath} + 22.5\,\hat{\jmath} + 15\,\hat{k}$$

em que o eixo dos z aponta na direção vertical, para cima, e com origem no chão. Admitindo que a resistência do ar pode ser desprezada, calcule a altura máxima atingida pela bala e a posição em que a bala bate no chão.



Resolução: Usando o sistema de eixos definido no enunciado do problema, o vetor aceleração é $\vec{a} = -9.8\,\vec{k}$ m/s^2. A expressão do vetor velocidade em função de t instante obtém-se a partir da equação 2.19 e calculando a primitiva

$$\begin{aligned}\vec{v} &= 13\,\hat{\imath} + 22.5\,\hat{\jmath} + 15\,\hat{k} - \int_0^t 9.8\,\hat{k}\,\mathrm{d}\,t\\ &= 13\,\hat{\imath} + 22.5\,\hat{\jmath} + (15 - 9.8\,t)\,\hat{k}\end{aligned}$$

Onde foi arbitrado $t_i = 0$ no instante em que a bala é disparada.

Substituindo essa expressão e a posição inicial na equação 2.16, obtém-se a expressão do vetor posição em qualquer instante

$$\begin{aligned}\vec{r} &= 9\,\hat{\imath} + 4\,\hat{\jmath} + 15\,\hat{k} + \int_0^t \left(13\,\hat{\imath} + 22.5\,\hat{\jmath} + (15 - 9.8\,t)\,\hat{k}\right)\mathrm{d}\,t\\ &= (9 + 13\,t)\,\hat{\imath} + (4 + 22.5\,t)\,\hat{\jmath} + (15 + 15\,t - 4.9\,t^2)\,\hat{k}\end{aligned}$$

A altura máxima será atingida no instante em que a velocidade seja na horizontal, ou seja, quando a componente v_z da velocidade for nula

$$15 - 9.8\,t = 0 \quad \Longrightarrow \quad t = \frac{15}{9.8} = 1.531\ \text{s}$$

nesse instante, a componente z do vetor posição determina a altura máxima:

$$\begin{aligned} h_{\text{max}} &= 15 + 15\,t - 4.9\,t^2 = \\ &15 + 15 \times 1.531 - 4.9 \times 1.531^2 = 26.48\ \text{m} \end{aligned}$$

Para calcular o instante em que a bala bate no chão, calcula-se o tempo t em que a componente z da posição é igual a zero,

$$\begin{aligned} &15 + 15\,t - 4.9\,t^2 = 0 \\ &t = \frac{15 + \sqrt{15^2 + 4 \times 4.9 \times 15}}{9.8} = 3.855\ \text{s} \end{aligned}$$

e nesse instante a posição da bala é,

$$\begin{aligned} \vec{r} &= (9 + 13 \times 3.855)\,\hat{\imath} + (4 + 22.5 \times 3.855)\,\hat{\jmath} \\ &= (59.12\,\hat{\imath} + 90.74\,\hat{\jmath})\ \text{m} \end{aligned}$$

2.4. Velocidade e aceleração relativas

A figura 2.9 mostra os vetores posição $\vec{r}_\text{P}$ e $\vec{r}_\text{Q}$ de dois pontos P e Q, no mesmo instante t. O vetor $\vec{r}_{\text{P/Q}}$, desde o ponto Q até o ponto P, é a posição do ponto P, relativa a Q. Esses três vetores posição estão relacionados pela seguinte equação:

$$\vec{r}_\text{P} = \vec{r}_{\text{P/Q}} + \vec{r}_\text{Q} \tag{2.21}$$

Os vetores velocidade dos dois pontos são as derivadas dos seus vetores posição, em ordem ao tempo

$$\vec{v}_\text{P} = \frac{\mathrm{d}\,\vec{r}_\text{P}}{\mathrm{d}\,t} \qquad \vec{v}_\text{Q} = \frac{\mathrm{d}\,\vec{r}_\text{Q}}{\mathrm{d}\,t} \tag{2.22}$$

E a derivada do vetor posição relativa, em ordem ao tempo, é a velocidade de P relativa a Q:

$$\vec{v}_{\text{P/Q}} = \frac{\mathrm{d}\,\vec{r}_{\text{P/Q}}}{\mathrm{d}\,t} \tag{2.23}$$

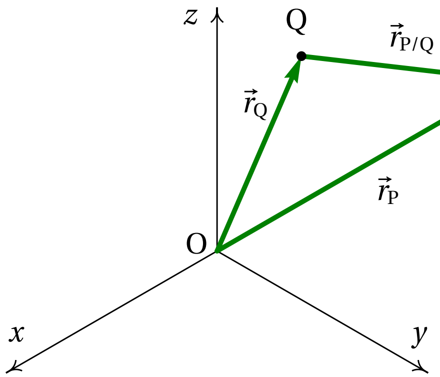


Figura 2.9.: Vetores posição de dois pontos P e Q e posição de P relativa a Q.

Como tal, derivando os dois lados da equação 2.21, em ordem ao tempo, obtém se a relação entre as 3 velocidades:

$$\boxed{\vec{v}_{\mathrm{P}} = \vec{v}_{\mathrm{P/Q}} + \vec{v}_{\mathrm{Q}}} \tag{2.24}$$

Isto é, a velocidade do ponto P é igual à sua velocidade relativa a outro ponto Q, mais a velocidade desse ponto Q. E a velocidade do ponto P, relativa a outro ponto Q, é igual à velocidade de P menos a velocidade de Q.

A relação entre as velocidades pode ser derivada novamente, em ordem ao tempo, obtendo-se uma relação semelhante para a aceleração relativa:

$$\boxed{\vec{a}_{\mathrm{P}} = \vec{a}_{\mathrm{P/Q}} + \vec{a}_{\mathrm{Q}}} \tag{2.25}$$

Assim, por exemplo, se viajarmos num comboio que se desloca com velocidade $\vec{v}_c$ e observarmos um objeto com velocidade $\vec{v}$, dentro do comboio, a velocidade desse objeto em relação à Terra será igual a $\vec{v} + \vec{v}_c$. Mas como a Terra se desloca em relação ao Sol, a velocidade do objeto em relação ao Sol seria $\vec{v} + \vec{v}_c + \vec{v}_t$, em que $\vec{v}_t$ é a velocidade da Terra relativa ao Sol. Em relação à Galaxia teríamos de somar também a velocidade do Sol na galaxia e assim sucessivamente.

O princípio de adição de acelerações relativas é aproveitado para treinar os candidatos a astronautas. Se o astronauta, a bordo de um avião, tropeça e cai para o chão, a sua aceleração durante a queda, em relação à Terra, é o

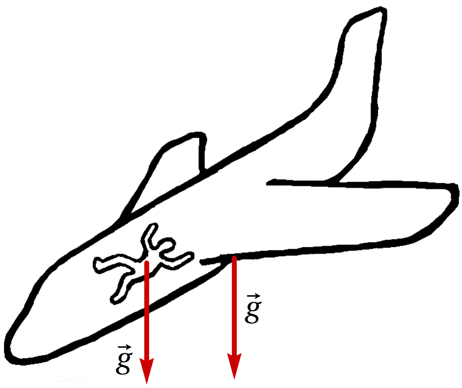


Figura 2.10.: Avião e passageiro em queda livre (aceleração relativa nula).

vetor $\vec{g}$, que aponta para o centro da Terra e com valor igual à aceleração da gravidade. Se o avião também estiver em queda livre, a sua aceleração em relação à Terra será o mesmo vetor $\vec{g}$ (figura 2.10). A aceleração do astronauta em relação ao avião é igual à diferença entre essas duas acelerações em relação à Terra, que é zero. Ou seja, em relação ao avião, o astronauta não acelera em nenhuma direção, mas flutua no meio do avião durante os segundos que o piloto conseguir manter o avião em queda livre.

2.5. Movimentos dependentes

Em alguns sistemas em que aparentemente são necessárias várias variáveis para descrever o movimento das diferentes componentes do sistema, o número de graus de liberdade pode ser menor devido à existência de restrições no movimento. A figura 2.11 mostra um exemplo; enquanto o cilindro desce, o carrinho desloca-se sobre a mesa.

O movimento do carrinho pode ser descrito pela variação da distância horizontal x até o eixo da roldana fixa. O movimento do cilindro é igual ao movimento da roldana móvel e, como tal, pode ser descrito pela expressão para a distância vertical y entre os centros das roldanas, em função do tempo.

Mas enquanto o fio permanecer esticado e sem se quebrar, existirá uma relação entre as velocidades e as acelerações do carrinho e do cilindro. Para encontrar essa relação, escreve-se a o comprimento do fio, L, em função

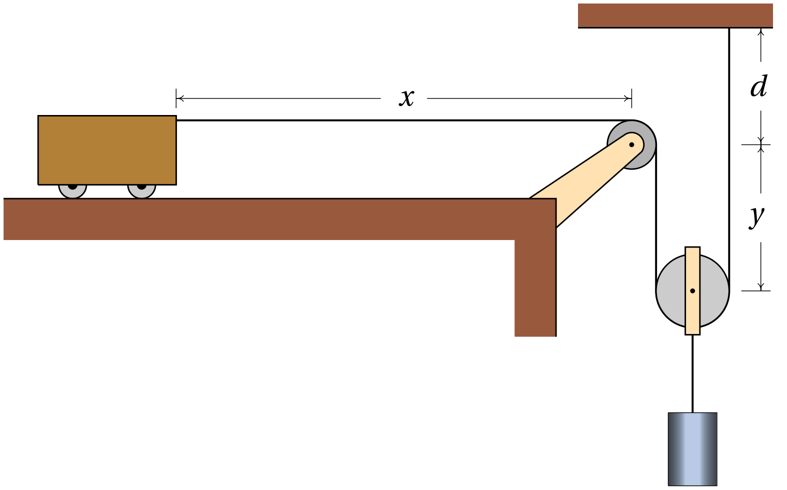


Figura 2.11.: Sistema com dois movimentos dependentes e um único grau de liberdade.

das distâncias x e y:

$$L = x + 2\,y + d + \frac{\pi\, r_1}{2} + \pi\, r_2 \tag{2.26}$$

em que r_1 e r_2 são os raios das duas roldanas. O fio toca um quarto do perímetro da roldana fixa ($\pi\, r_1/2$) e metade do perímetro da roldana móvel ($\pi\, r_2$). Tendo em conta que L, d, r_1 e r_2 são constantes, e derivando a equação anterior em ordem ao tempo, obtém-se,

$$\dot{x} = -2\,\dot{y} \tag{2.27}$$

Ou seja, o valor da velocidade do carrinho será sempre o dobro do valor da velocidade do cilindro. O sinal negativo na equação acima indica que se o cilindro desce o carrinho desloca-se para a direita e vice-versa.

Derivando novamente essa última equação em ordem ao tempo, conclui-se que a aceleração tangencial do carrinho é também o dobro da aceleração tangencial do cilindro:

$$\ddot{x} = -2\,\ddot{y} \tag{2.28}$$

Essas relações entre as posições, velocidades e acelerações implicam que o sistema tem apenas um grau de liberdade. Uma vez conhecidas as expressões para a posição, velocidade e aceleração de um dos objetos, as expressões da posição, velocidade e aceleração do outro objeto serão obtidas multiplicando (ou dividindo) por 2.

Um segundo exemplo, com dois graus de liberdade, é o sistema de três roldanas e três cilindros na figura 2.12. As alturas dos três cilindros são determinadas pelos valores das 3 distâncias y_A, y_B e y_C; como existe um único fio em movimento, existe apenas uma restrição (comprimento do fio constante), que permitirá expressar uma das três distâncias em função das outras duas.

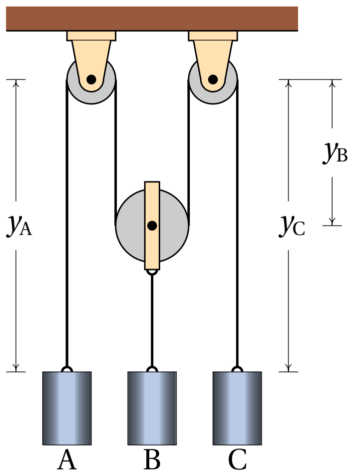


Figura 2.12.: Sistema com três movimentos dependentes e dois graus de liberdade.

O comprimento do fio é,

$$L = y_A + 2\,y_B + y_C + \text{constante} \tag{2.29}$$

em que a constante é a soma de metade dos perímetros das roldanas, que não é importante conhecer, já que vai desaparecer quando a equação for derivada e só altera as posições num valor constante.

A derivada da equação anterior em ordem ao tempo é,

$$\dot{y}_A + 2\,\dot{y}_B + \dot{y}_C = 0 \tag{2.30}$$

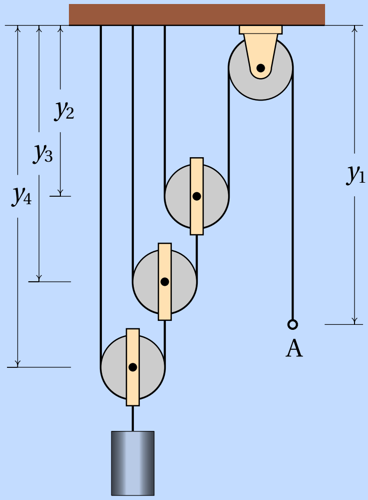
Neste caso existem vários possíveis movimentos; por exemplo, se o cilindro A estiver a subir e o cilindro C estiver a descer com a mesma velocidade, o cilindro B permanecerá estático; ou um dos cilindros poderá estar a descer e os outros dois a subir. O que sim não é possível é que os 3 cilindros estejam simultaneamente a descer ou a subir.

A derivada da equação 2.30 conduz à relação entre as acelerações,

$$\ddot{y}_A + 2\,\ddot{y}_B + \ddot{y}_C = 0 \tag{2.31}$$

Exemplo 2.4

No sistema da figura, calcule o valor da velocidade com que sobe o cilindro, quando o anel A for puxado para baixo com velocidade de valor 2 m/s.



Resolução: Neste caso há 4 sistemas em movimento, as três roldanas móveis e o anel A (o movimento do cilindro é igual ao da roldana móvel da qual está pendurado) e 3 fios inextensíveis; portanto, este sistema tem apenas um grau de liberdade. Com o valor da velocidade de A dada no enunciado será possível calcular as velocidades de todas as roldanas móveis.

Sendo y_1 a distância desde o teto até o anel e y_2, y_3 e y_4 as distâncias desde o teto até cada uma das roldanas móveis, os comprimentos dos 3 fios são:

$$L_1 = y_1 + 2\,y_2 + \text{constante}$$
$$L_2 = y_3 + (y_3 - y_2) + \text{constante}$$
$$L_3 = y_4 + (y_4 - y_3) + \text{constante}$$

Derivando essas três equações, obtém-se:

$$v_{y1} = -2\, v_{y2} \qquad v_{y2} = 2\, v_{y3} \qquad v_{y3} = 2\, v_{y4}$$

e substituindo, encontra-se a relação entre v_{y1} e v_{y4},

$$v_{y1} = -8\, v_{y4}$$

isto é, o valor da velocidade com que desce o anel é 8 vezes o da velocidade com que o cilindro sobe. Assim sendo, o cilindro sobe com velocidade de valor 0.25 m/s.

2.6. Produto escalar

O produto escalar entre dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$, indicado por meio de um ponto entre os vetores, $\vec{a} \cdot \vec{b}$, define-se como o produto entre os módulos dos dois vetores e o cosseno do ângulo θ entre eles:

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = a\, b \cos\theta} \tag{2.32}$$

A figura 2.13 mostra dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ e o ângulo θ entre eles. A projeção do vetor $\vec{a}$ na direção paralela ao vetor $\vec{b}$ é igual a $a \cos\theta$ e a projeção do vetor $\vec{b}$ na direção paralela ao vetor $\vec{a}$ é igual a $b \cos\theta$. Assim sendo, o produto escalar entre os dois vetores é igual ao produto do módulo de um dos vetores pela projeção do outro vetor na direção do primeiro.

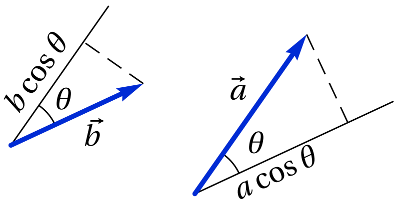


Figura 2.13.: Dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ e o ângulo θ entre eles.

Este produto denomina-se escalar porque os módulos dos dois vetores e o ângulo entre as direções são grandezas escalares, que não dependem do referencial usado para os medir; consequentemente, o produto $a\, b \cos\theta$ é também um escalar, independente do sistema de eixos usado.

Duas retas que se cruzam num ponto definem dois ângulos θ e $(180° - \theta)$. No caso de vetores, não existe ambiguidade na definição do ângulo, porque deslocando os vetores para um vértice comum, mede-se o ângulo na região por onde passa o vetor $\vec{a}+\vec{b}$ (ver figura 2.14).

O produto escalar entre dois vetores com módulos a e b está sempre no intervalo $[-a\,b,\ a\,b]$. Se o ângulo entre os vetores é agudo, $\cos\theta > 0$, o produto é positivo. Se o ângulo é obtuso, $\cos\theta < 0$, o produto é negativo e se os vetores são perpendiculares, $\cos\theta = 0$, o produto é nulo (figura 2.14). O valor mínimo do produto, $-a\,b$, obtém-se quando os vetores têm a mesma direção, mas com sentidos opostos. O valor máximo, $a\,b$, obtém-se quando os vetores têm a mesma direção e o mesmo sentido.

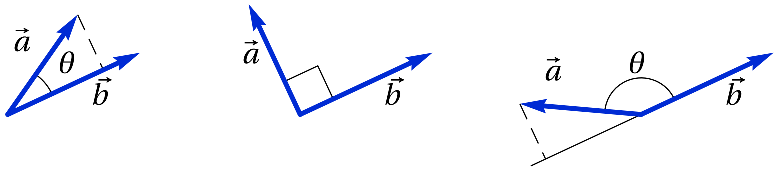


Figura 2.14.: Vetores que formam ângulos agudo, reto e obtuso.

Como o módulo dos versores é igual a 1, o produto entre dois versores é sempre igual ao cosseno do ângulo entre eles. Assim sendo, o ângulo entre duas direções no espaço pode ser determinado calculando o arco cosseno do produto escalar entre dois versores nessas direções

$$\theta_{ab} = \arccos\left(\hat{a}\cdot\hat{b}\right) \tag{2.33}$$

Em função das componentes cartesianas dos vetores, o produto escalar é,

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (a_x\,\hat{\imath} + a_y\,\hat{\jmath} + a_z\,\hat{k})\cdot(b_x\,\hat{\imath} + b_y\,\hat{\jmath} + b_z\,\hat{k}) \tag{2.34}$$

Usando a propriedade distributiva do produto escalar e o facto de que o produto escalar entre dois dos versores cartesianos $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ e $\hat{k}$ diferentes é zero, por serem perpendiculares, e o produto de um desses versores consigo próprio é 1, obtém-se uma expressão útil para calcular o produto escalar em função das componentes cartesianas,

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x\,b_x + a_y\,b_y + a_z\,b_z} \tag{2.35}$$

As componentes dos dois vetores são diferentes em diferentes referenciais, mas o produto $(a_x\,b_x + a_y\,b_y + a_z\,b_z)$ deve dar o mesmo resultado em qualquer referencial, já que $\vec{a}\cdot\vec{b}$ é um escalar.

Usando as duas expressões 2.32 e 2.35 para calcular o produto escalar de um vetor com si próprio, obtém-se:

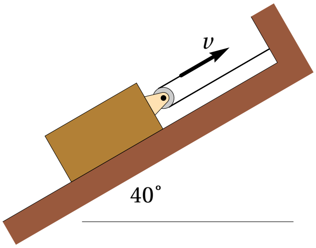
$$\vec{a} \cdot \vec{a} = a^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 \tag{2.36}$$

Conclui-se que o módulo de um vetor $\vec{a}$ com componentes (a_x, a_y, a_z) é dado pela expressão,

$$\boxed{a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} \tag{2.37}$$

Perguntas

1. O bloco na figura encontra-se sobre um plano inclinado a 40°. Um extremo do fio está preso na parede e o outro extremo está a ser deslocado com velocidade de valor v no sentido indicado na figura. Qual é o valor da velocidade do bloco em função de v?



A. v

B. $v/2$

C. $v\cos 40°$

D. $2\,v$

E. $v\sin 40°$

2. Um automóvel entra numa curva com velocidade de valor 10 m/s em direção sul e 6 segundos mais tarde continua com o mesmo valor da velocidade, mas em direção oeste. Calcule o módulo da aceleração média durante esse intervalo.

A. 1.67 m/s^2

B. 2.36 m/s^2

C. 2.89 m/s^2

D. 3.33 m/s^2

E. 0

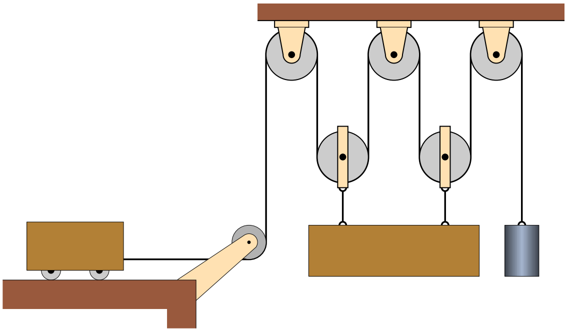
3. Dispara-se um projétil com velocidade inclinada 40° sobre a horizontal. Se no ponto mais alto da sua trajetória o valor da sua velocidade é 80 m/s e se a resistência do ar pode ser ignorada, qual foi aproximadamente o valor da velocidade com que foi lançado?

A. 104.4 m/s
B. 124.5 m/s
C. 61.3 m/s
D. 51.3 m/s
E. 80 m/s

4. Uma partícula que se desloca a 4 m/s na direção do eixo dos y sofre uma aceleração com valor constante 3 m/s^2, na direção do eixo dos x, durante dois segundos. Qual será o valor final da velocidade?

A. 5.0 m/s
B. 6.3 m/s
C. 7.2 m/s
D. 8.4 m/s
E. 10.0 m/s

5. No sistema da figura, com um carrinho, uma barra, um cilindro, 2 roldanas móveis e 4 roldanas fixas, a barra permanece sempre horizontal. Quantos graus de liberdade tem o sistema?



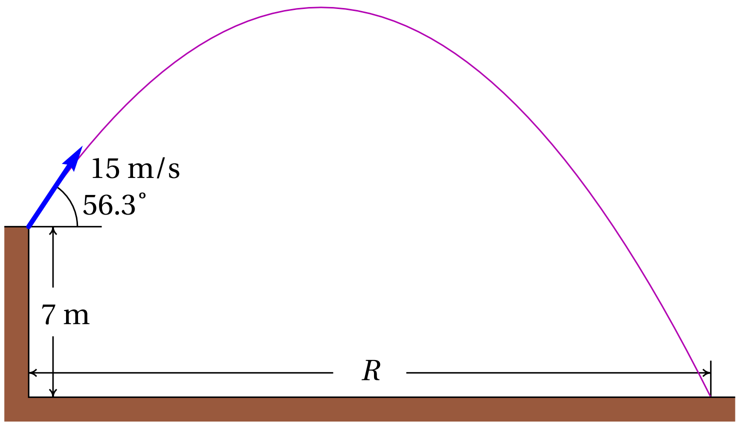
A. 1
B. 2
C. 3
D. 4
E. 5

Problemas

1. Um projétil é lançado desde o topo de um prédio com 7 m de altura, com velocidade de 15 m/s, inclinada 56.3°, como mostra a figura. Admitindo que a resistência do ar pode ser desprezada, determine:

(a) O tempo de voo, ou seja, o tempo desde o inicio do lançamento até quando o projétil bate no chão.

(b) O alcance horizontal, ou seja, a distância R na figura.



2. Um berlinde é lançado sobre a superfície horizontal no topo de umas escadas e sai no início das escadas com velocidade horizontal igual a 3 m/s. Cada degrau tem 18 cm de altura e 30 cm de largura. Qual será o primeiro degrau onde o berlinde bate?

3. A aceleração tangencial de um objeto em queda livre no ar, incluindo a resistência do ar, é dada pela expressão $a_\mathrm{t} = g - C\,v^2/m$, onde C e m são constantes. Sabendo que o objeto parte do repouso em $t = 0$,

   (*a*) Demonstre que a velocidade num instante posterior t é

$$v = \sqrt{\frac{m\,g}{C}}\tanh\left(\sqrt{\frac{C\,g}{m}}\;t\right)$$

   (*b*) Determine a expressão da velocidade do objeto após ter caído uma distância s.

   (*c*) Porquê será que a velocidade $v_\mathrm{t} = \sqrt{m\,g/C}$ chama-se **velocidade terminal**?

4. (*a*) Demonstre a **lei dos cossenos**: Em qualquer triângulo com lados de comprimento a, b e c, verifica-se a relação,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\cos\alpha$$

   em que α é o ângulo oposto ao lado de comprimento a; o teorema de Pitágoras é um caso particular, em que α é um ângulo reto. **Sugestão**: desenhe o triângulo formado por dois vectores $\vec{b}$ e $\vec{c}$ e a sua soma $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$ e calcule o produto $\vec{a}\cdot\vec{a}$.

   (*b*) O ângulo entre dois vetores, com módulos de 5 e 8 unidades, é 42°; usando a lei dos cossenos, calcule o módulo da soma desses vetores.

5. Dados dois vetores $\vec{a} = 3\,\hat{\imath} + 4\,\hat{\jmath} - 5\,\hat{k}$ e $\vec{b} = -\hat{\imath} + 2\,\hat{\jmath} + 6\,\hat{k}$, calcule:

(*a*) O módulo de cada vetor.

(*b*) O produto escalar $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

(*c*) O ângulo entre os vetores.

(*d*) A soma $\vec{a} + \vec{b}$.

(*e*) A diferença $\vec{a} - \vec{b}$.

6. A velocidade de uma partícula em movimento no plano xy é dada pela expressão: $\vec{v} = 3\,\mathrm{e}^{-2t}\,\hat{\imath} - 5\,\mathrm{e}^{-t}\,\hat{\jmath}$ (unidades SI). No instante $t = 0$ a partícula encontra-se no eixo dos y, na posição $2\,\hat{\jmath}$.

(*a*) Determine em que instante passará pelo eixo dos x e a que distância da origem estará nesse instante.

(*b*) Calcule a aceleração em $t = 0$ e no instante em que passa pelo eixo dos x.

7. Um corpo encontra-se inicialmente na posição $\vec{r}_i = 3\,\hat{\imath} + \hat{\jmath} - \hat{k}$ (unidades SI) com velocidade $\vec{v}_i = 5\,\hat{\jmath} + 4\,\hat{k}$. Em qualquer instante, a aceleração é dada pela expressão $\vec{a} = 2\,t^2\,\hat{\imath} + 3\,t\,\hat{k}$. Encontre as expressões para a velocidade e a posição em função do tempo.

8. Um projétil é lançado desde o chão, com uma inclinação de 30° com a horizontal. Que valor deverá ter a velocidade inicial para que bata no chão a 30 m do ponto de lançamento? (admita que a resistência do ar pode ser desprezada.)

9. Uma pedra roda pelo telhado de uma casa, que faz um ângulo de 20° com a horizontal. No instante em que a pedra abandona o telhado e cai livremente, o valor da sua velocidade é 4 m/s e encontra-se a uma altura de 6 m. Admitindo que a resistência do ar é desprezável,

(*a*) Calcule o tempo que demora a cair ao chão, desde o instante em que abandona o telhado.

(*b*) A que distância horizontal bate a pedra no chão, em relação ao ponto onde abandonou o telhado?

(*c*) Calcule o ângulo que a velocidade da pedra faz com a vertical no instante em que bate no chão.

10. Um barco transposta passageiros de uma margem de um rio para a outra margem, seguindo o percurso mais curto de 1.5 km entre as duas margens. Quando o motor do barco funciona na potência máxima, a travessia demora 20 minutos, num dia em que o valor da velocidade da corrente no rio é 1.2 m/s; calcule o valor da velocidade do barco, nesse dia, (*a*) em relação à Terra e (*b*) em relação à água. (*c*) Determine o tempo mínimo que o barco demorava a atravessar o mesmo rio, num dia em que o valor da velocidade da corrente fosse 0.8 m/s.

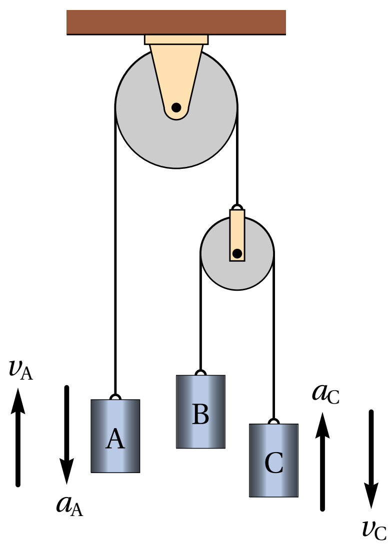
11. Dentro de um comboio que se desloca horizontalmente, com velocidade de valor constante 35 km/h, um passageiro em pê numa cadeira lança horizontalmente um objeto, no sentido oposto ao deslocamento do comboio. Em relação ao chão da carruagem, o objeto foi lançado desde uma altura de 3 m e desloca-se horizontalmente 3 m antes de bater no chão. Em relação ao referencial da Terra, qual foi a distância horizontal percorrida pelo objeto antes de bater no chão?

12. Um objeto parte da origem em $t = 0$ e em $t > 0$ a sua posição é dada pelo vetor $\vec{r} = 3\left(1-\mathrm{e}^{-t}\right)\hat{\imath} + 4\left(1-\mathrm{e}^{-2t}\right)\hat{\jmath}$ (unidades SI).

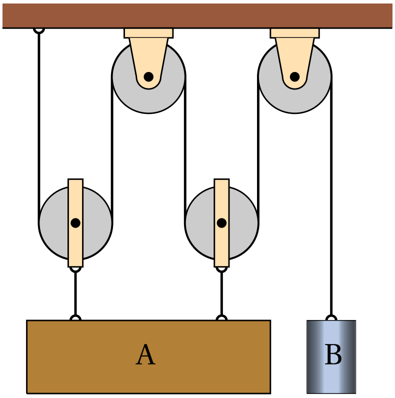
(*a*) A que distância da origem estará o objeto quando $t \to \infty$?

(*b*) Calcule a distância total percorrida desde $t = 0$ até $t \to \infty$ (o integral obtido não pode ser calculado por métodos analíticos, mas pode ser resolvido numericamente, no Maxima, usando a função romberg, que precisa dos mesmos 4 argumentos dados à função integrate; em vez de $t \to \infty$, use, $t = 10$ e obtenha o resultado; aumente o valor de t sucessivamente e observe os resultados obtidos até poder concluir que o resultado está a aproximar-se de um valor limite).

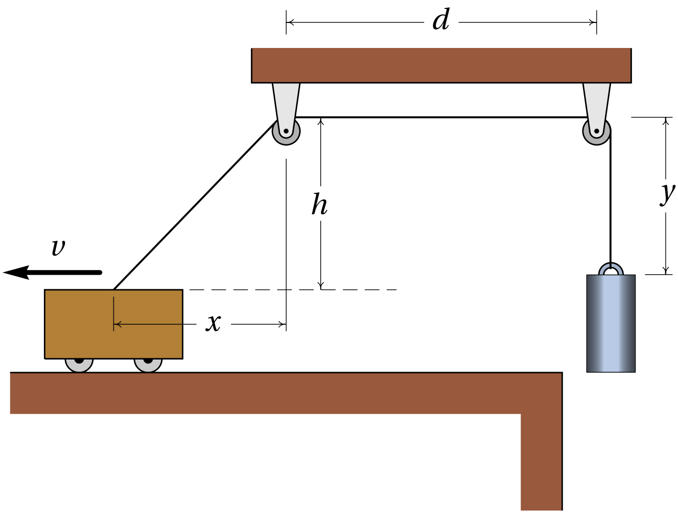
13. Três cilindros A, B e C foram pendurados no sistema de duas roldanas que mostra a figura. Num instante, a velocidade do bloco A é $v_A = 3$ m/s, para cima, e a sua aceleração é $a_A = 2$ m/s^2, para baixo; no mesmo instante, a velocidade e aceleração do bloco C são: $v_C = 1$ m/s, para baixo, $a_C = 4$ m/s^2, para cima. Determine a velocidade e aceleração do bloco B, no mesmo instante, indicando se são para cima ou para baixo.



14. No sistema da figura, encontre a relação entre os valores das velocidades e das acelerações da barra A e do cilindro B, admitindo que a barra A permanece sempre horizontal.



15. O carrinho na figura desloca-se para a esquerda, com velocidade de valor constante 4 m/s. Sabendo que a altura h é igual a 25 cm e arbitrando $t = 0$ no instante em que a distância x é nula, encontre expressões para os valores da velocidade e da aceleração do cilindro (admita que os raios das roldanas podem ser desprezados).



Respostas

Perguntas: 1. B. **2.** B. **3.** A. **4.** C. **5.** B.

Problemas

1. (*a*) 3.02 s. (*b*) 25.1 m.

2. No quarto.

3. (*b*) $v = \sqrt{\dfrac{m\,g}{C}\left(1 - e^{-2\,C\,s/m}\right)}$
(*c*) Porque após um tempo elevado, v aproxima-se para:
$\lim\limits_{t\to\infty} v = \sqrt{\dfrac{m\,g}{C}}$

4. (*a*) $\vec{a}\cdot\vec{a} = a^2 = b^2 + c^2 + 2\,\vec{b}\cdot\vec{c}$. Como o ângulo entre os dois vetores é $\theta = 180° - \alpha$, segue que $\vec{b}\cdot\vec{c} = b\,c\,\cos(180° - \alpha) = -b\,c\,\cos\alpha$
(*b*) 12.18 unidades.

5. (*a*) $a = 5\sqrt{2}$, $b = \sqrt{41}$. (*b*) -25. (*c*) 123.5°. (*d*) $2\,\hat{\imath} + 6\,\hat{\jmath} + \hat{k}$. (*e*) $4\,\hat{\imath} + 2\,\hat{\jmath} - 11\,\hat{k}$.

6. (*a*) $t = 0.5108$ s, $x = 0.96$ m.
(*b*) Em $t = 0$, $\vec{a} = (-6\,\hat{\imath} + 5\,\hat{\jmath})$ m/s^2. Quando passa pelo eixo dos x, $\vec{a} = (-2.16\,\hat{\imath} + 3\,\hat{\jmath})$ m/s^2.

7. $\vec{v} = \frac{2}{3}\,t^3\,\hat{\imath} + 5\,\hat{\jmath} + \left(4 + \frac{3}{2}\,t^2\right)\hat{k}$
$\vec{r} = \left(3 + \dfrac{t^4}{6}\right)\hat{\imath} + (1 + 5\,t)\,\hat{\jmath} + \left(-1 + 4\,t + \dfrac{t^3}{2}\right)\hat{k}$

8. $v = 18.43$ m/s.

9. (*a*) 0.976 s. (*b*) 3.67 m. (*c*) 19.0°.

10. (*a*) 1.25 m/s. (*b*) 1.73 m/s. (*c*) 16 minutos e 20 segundos.

11. 4.6 m.

12. (*a*) 5 m. (*b*) 5.23 m.

13. 5 m/s para baixo e aceleração nula.

14. $v_{\text{B}} = -4\,v_{\text{A}}$, $a_{\text{B}} = -4\,a_{\text{A}}$

15. $v = \dfrac{64\,t}{\sqrt{256\,t^2 + 1}} \qquad a_{\text{t}} = \dfrac{64\sqrt{256\,t^2 + 1}}{65536\,t^4 + 512\,t^2 + 1} \qquad \text{(SI)}$