B. Equações de Lagrange

Neste apêndice mostra-se como surgem as equações de Lagrange a partir da segunda lei de Newton. Considere-se um sistema formado por m corpos rígidos com vetores posição dos centros de massa: $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, ..., $\vec{r}_m$. Ou seja, são necessárias $3\,m$ coordenadas, que podem ser distâncias ou ângulos, para determinar a configuração do sistema.

Se o sistema é holonómico, existem equações que relacionam algumas das $3\,m$ coordenadas e que permitem reduzir o número de coordenadas independentes para n coordenadas generalizadas ($n < 3\,m$):

$$q_1(t), q_2(t), \ldots, q_n(t)$$

Cada vetor de posição $\vec{r}_i$ pode depender de várias dessas coordenadas e do tempo:

$$\vec{r}_i(q_1, q_2, \ldots, q_n, t)$$

e a velocidade do corpo i é

$$\vec{v}_i = \frac{\mathrm{d}\,\vec{r}_i}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\,\dot{q}_k$$

ou seja, $\vec{v}_i$ também depende das coordenadas generalizadas, do tempo e das velocidades generalizadas $\dot{q}_i$:

$$\vec{v}_i(q_1, q_2, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n, t)$$

e as derivadas parciais de $\vec{v}_i$ obtêm-se derivando o somatório acima:

$$\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \qquad \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j \partial t} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_j \partial q_k}\,\dot{q}_k \tag{B.1}$$

O vetor aceleração do corpo i é:

$$\vec{a}_i = \frac{\mathrm{d}\,\vec{v}_i}{\mathrm{d}\,t} \tag{B.2}$$

Se num instante dado o valor de cada coordenada q_j é modificado para $q_j + \delta q_j$, cada vetor posição sofre uma alteração:

$$\delta\,\vec{r}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\,\delta q_j \tag{B.3}$$

e multiplicando escalarmente os dois lados da equação B.2 pelos dois lados desta equação, obtém-se

$$\vec{a}_i \cdot \delta\,\vec{r}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\mathrm{d}\,\vec{v}_i}{\mathrm{d}\,t} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\,\delta q_j \tag{B.4}$$

Como a derivada do produto $\vec{v}_i \cdot \partial \vec{r}_i / \partial q_j$ é,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(\vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right) &= \frac{\mathrm{d}\,\vec{v}_i}{\mathrm{d}\,t} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} + \vec{v}_i \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right)\\ &= \frac{\mathrm{d}\,\vec{v}_i}{\mathrm{d}\,t} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} + \vec{v}_i \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j \partial t} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_j \partial q_k}\,\dot{q}_k\right)\end{aligned}$$

De acordo com as equações B.1, a derivada $\partial \vec{r}_i / \partial q_j$ e o termo dentro dos parêntesis no lado direito da equação são as derivadas parciais de $\vec{v}_i$ em ordem a $\dot{q}_j$ e q_j, obtendo-se assim o resultado:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(\vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j}\right) = \frac{\mathrm{d}\,\vec{v}_i}{\mathrm{d}\,t} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} + \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_j}$$

e a equação B.4 pode escrever-se então,

$$\vec{a}_i \cdot \delta\,\vec{r}_i = \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(\vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j}\right) - \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_j}\right] \delta q_j \tag{B.5}$$

A seguir observe-se que as derivadas parciais de v_i^2 em ordem às coordenadas e velocidades generalizadas são:

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_i^2}{\partial q_j} &= \frac{\partial(\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i)}{\partial q_j} = 2\,\vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_j}\\ \frac{\partial v_i^2}{\partial \dot{q}_j} &= \frac{\partial(\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i)}{\partial \dot{q}_j} = 2\,\vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j}\end{aligned}$$

substituindo estas duas expressões na equação B.5 e multiplicando os dois lados da equação pela massa m_i do corpo i, obtém-se

$$m_i\,\vec{a}_i\cdot\delta\,\vec{r}_i = \sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(\frac{m_i}{2}\,\frac{\partial v_i^2}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{m_i}{2}\,\frac{\partial v_i^2}{\partial q_j}\right]\delta q_j$$
$$= \sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(\frac{\partial E_{\mathrm{c}i}}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial E_{\mathrm{c}i}}{\partial q_j}\right]\delta q_j$$

onde $E_{\mathrm{c}i}$ é a energia cinética do corpo i. A segunda lei de Newton diz que $m_i\,\vec{a}_i$ é a força resultante sobre o corpo i; usando a expressão B.3 e somando sobre todos os corpos i, obtém-se

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\vec{F}_i\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\,\delta q_j = \sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(\frac{\partial E_{\mathrm{c}}}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial E_{\mathrm{c}}}{\partial q_j}\right]\delta q_j$$

que conduz às equações de Lagrange:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(\frac{\partial E_{\mathrm{c}}}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial E_{\mathrm{c}}}{\partial q_j} = Q_j \qquad j = 1, \ldots n \tag{B.6}$$

onde E_{c} é a energia cinética total do sistema e a força generalizada Q_j é definida por

$$Q_j = \sum_i \vec{F}_i\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j} \tag{B.7}$$