3. Movimento curvilíneo

As fortes acelerações sentidas numa montanha russa não são devidas apenas aos aumentos e diminuições de velocidade, mas são causadas também pelo movimento curvilíneo. A taxa de aumento da velocidade é apenas uma das componentes da aceleração, a aceleração tangencial. A outra componente da aceleração depende da velocidade e do raio de curvatura da trajetória como se demonstra neste capítulo.

3.1. Versor tangencial

Em cada ponto de uma trajetória pode definir-se um **versor tangencial** $\hat{e}_{\mathrm{t}}$, na direção tangente à trajetória e no sentido em que a posição s aumenta. A figura 3.1 mostra o versor tangencial em três pontos A, B e P de uma trajetória.

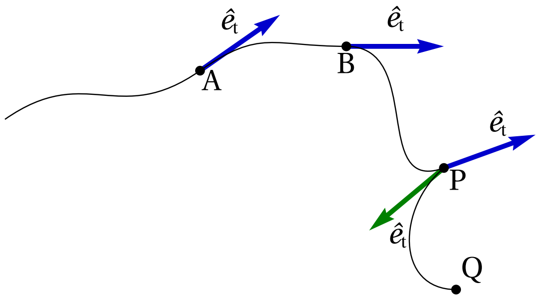


Figura 3.1.: Versor tangencial $\hat{e}_{\mathrm{t}}$ em três pontos da trajetória.

Observe-se que no ponto P existem dois versores tangenciais. Um deles é tangente à curva entre B e P e o outro é tangente à curva entre P e Q. O vetor velocidade de um corpo que segue essa trajetória será sempre na mesma direção do versor tangencial (o sentido pode ser o mesmo ou oposto). Nos pontos como P, onde existem dois vetores tangenciais, a velocidade é necessariamente nula; o corpo fica momentaneamente em repouso nesse ponto, começando logo a deslocar-se em outra direção diferente à que seguia antes de parar.

nNos pontos onde a velocidade não é nula, existe sempre um único versor tangencial $\hat{e}_{\mathrm{t}}$, que define a direção do vetor velocidade. Ou seja, a velocidade vetorial pode ser escrita,

$$\vec{v} = v\,\hat{e}_{\mathrm{t}} \tag{3.1}$$

Conforme referido no capítulo 2, a velocidade vetorial $\vec{v}$ é igual à derivada do vetor posição $\vec{r}$

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\,\vec{r}}{\mathrm{d}\,t} \tag{3.2}$$

O vetor posição $\vec{r}$ não tem de ter nenhuma relação com o versor tangencial, já que $\vec{r}$ depende do ponto que esteja a ser usado como origem do referencial (ver figura 3.2). No entanto, o vetor deslocamento $\mathrm{d}\,\vec{r}$ sim é independente da escolha da origem e, assim sendo, a equação 3.2 garante que o vetor velocidade é independente da escolha da origem do referencial.

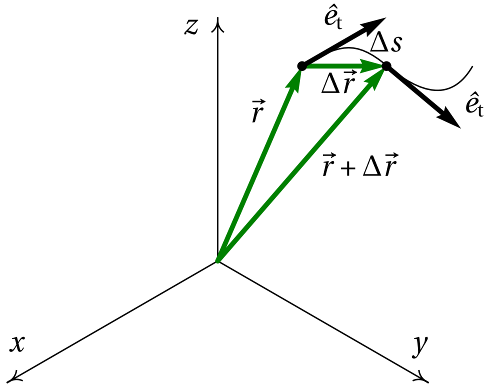


Figura 3.2.: Deslocamento vetorial entre duas posições $\vec{r}$ e $\vec{r}+\Delta\vec{r}$.

Se $\Delta\vec{r}$ for o vetor deslocamento durante um intervalo de tempo Δt (figura 3.2), a distância percorrida durante esse intervalo, $|\Delta s|$, é sempre maior ou igual que o módulo de $\Delta\vec{r}$. A distância percorrida é medida sobre a trajetória, enquanto que o módulo do deslocamento é medido no segmento de reta entre os pontos inicial e final.

O módulo de $\Delta\vec{r}$ só é igual a Δs quando a trajetória é reta, com versor tangencial constante. No limite quando Δt for muito pequeno, os dois pontos estarão muito próximos na trajetória e, assim sendo, a direção de $\Delta\vec{r}$ será aproximadamente a mesma direção do versor tangencial e o módulo de $\Delta\vec{r}$ será aproximadamente igual a $|\Delta s|$; isto é, o vetor deslocamento é aproximadamente igual a $\Delta s\,\hat{e}_t$. A derivada do vetor posição é então,

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}\,\hat{e}_t = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\,\hat{e}_t \tag{3.3}$$

E, substituindo na equação 3.2, obtém-se,

$$\boxed{\vec{v} = \dot{s}\,\hat{e}_t} \tag{3.4}$$

O valor da velocidade, em qualquer movimento, é sempre igual à derivada da posição na trajetória, s, em ordem ao tempo. Este resultado explica porquê no capítulo 1 denominou-se “velocidade” à derivada $\dot{s}$, já que $\dot{s}$ não é apenas uma componente da velocidade mas sim o valor da velocidade.

3.2. Versor normal

A aceleração vetorial $\vec{a}$ é igual à derivada da velocidade em ordem ao tempo e, como tal, derivando o lado direito da equação 3.4 obtém-se a expressão da aceleração em relação ao versor tangencial:

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\,\vec{v}}{\mathrm{d}\,t} = \ddot{s}\,\hat{e}_\mathrm{t} + \dot{s}\,\frac{\mathrm{d}\,\hat{e}_\mathrm{t}}{\mathrm{d}\,t} \tag{3.5}$$

Observe-se que a derivada do vetor tangencial não é nula, porque esse vetor não é necessariamente igual em diferentes instantes. A figura 3.3 mostra como calcular a derivada de $\hat{e}_\mathrm{t}$. Deslocando os dois versores tangenciais dos pontos A e B da figura 3.1 para um ponto comum, o aumento de $\hat{e}_\mathrm{t}$ no intervalo desde A até B é o vetor $\Delta\,\hat{e}_\mathrm{t}$ que une os dois vetores.

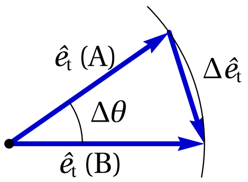


Figura 3.3.: Variação do versor tangencial.

Sendo o módulo de $\hat{e}_\mathrm{t}$ igual a 1, os dois versores $\hat{e}_\mathrm{t}$ na figura 3.3 descrevem um arco de círculo com raio 1 e ângulo $\Delta\theta$. Se o ângulo for medido em radianos, o comprimento desse arco será igual a $\Delta\theta$. Se o intervalo de tempo $\Delta\,t$ for aproximadamente zero, os dois pontos considerados, A e B, estarão muito próximos na trajetória, o vetor $\Delta\,\hat{e}_\mathrm{t}$ será perpendicular à trajetória e o seu módulo será aproximadamente igual ao arco de círculo $\Delta\theta$; conclui-se que a derivada de $\hat{e}_\mathrm{t}$ é,

$$\frac{\mathrm{d}\,\hat{e}_\mathrm{t}}{\mathrm{d}\,t} = \lim_{\Delta\,t\to 0}\frac{\Delta\,\hat{e}_\mathrm{t}}{\Delta\,t} = \lim_{\Delta\,t\to 0}\frac{\Delta\,\theta}{\Delta\,t}\,\hat{e}_\mathrm{n} = \dot{\theta}\,\hat{e}_\mathrm{n} \tag{3.6}$$

em que $\hat{e}_\mathrm{n}$ é o **versor normal**, perpendicular à trajetória, e $\dot{\theta}$ é a **velocidade angular**. Substituindo essa derivada na equação 3.5, obtém-se a expressão para a aceleração:

$$\boxed{\vec{a} = \ddot{s}\,\hat{e}_\mathrm{t} + \dot{s}\dot{\theta}\,\hat{e}_\mathrm{n}} \tag{3.7}$$

Concluindo, a aceleração é um vetor com componentes tangente e normal (perpendicular) à trajetória. A componente na direção tangente, $a_\mathrm{t} = \ddot{s}$, é a aceleração tangencial já introduzida no capítulo 1. A componente normal da aceleração é igual ao produto do valor da velocidade $\dot{s}$ pelo valor da velocidade angular $\dot{\theta}$,

$$a_\mathrm{n} = \dot{s}\,\dot{\theta} \tag{3.8}$$

Tendo em conta que os versores $\hat{e}_\text{t}$ e $\hat{e}_\text{n}$ são perpendiculares em todos os pontos da trajetória, a equação 3.7 implica que o módulo da aceleração, $|\vec{a}|$, é o comprimento da hipotenusa de um triângulo retângulo em que os catetos são as componentes tangencial e normal da aceleração; o teorema de Pitágoras para esse triângulo é então,

$$\boxed{a^2 = a_\text{t}^2 + a_\text{n}^2} \tag{3.9}$$

O ângulo de rotação do versor tangencial, $\Delta\theta$, é também igual ao ângulo de rotação do versor normal $\hat{e}_\text{n}$. A figura 3.4 mostra os versores normais nos mesmos pontos da trajetória mostrados na figura 3.1. Observe-se que no ponto A existem dois versores normais, com a mesma direção mas sentidos opostos, porque a trajetória curva-se para cima antes do ponto A, mas a partir do ponto A começa a curvar-se para baixo. Esse tipo de ponto, onde o sentido da curvatura muda, chama-se **ponto de inflexão**.

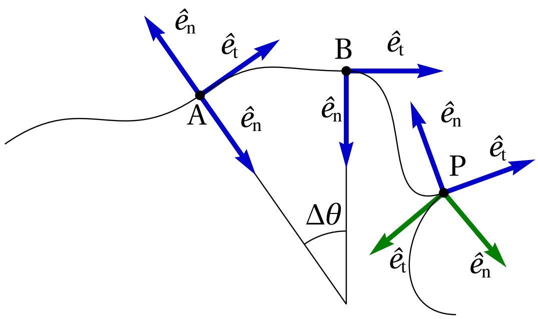


Figura 3.4.: Versores tangencial e normal em alguns pontos da trajetória.

No ponto P da figura 3.4 existem duas direções normais, porque, como foi discutido na secção anterior, existem dois versores tangenciais. Em qualquer ponto o versor normal aponta no sentido em que a trajetória se curva, excepto no caso de uma trajetória retilínea, em que existem infinitos versores perpendiculares ao versor tangencial $\hat{e}_\text{t}$.

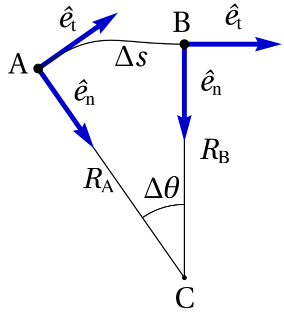


Figura 3.5.: Raio de curvatura.

A figura 3.5 mostra o versor normal no ponto inicial A (no instante t_i) e o ponto final B (no instante $t_i + \Delta t$) durante um intervalo de tempo Δt. Se Δt é muito pequeno, as direções dos dois versores cruzam-se num ponto comum C. As distâncias desde C até os pontos A e B são diferentes (R_A e R_B), mas serão iguais no limite $\Delta t \to 0$, em que o ponto C aproxima-se do centro de curvatura da curva. A distância desde o centro de curvatura num instante e o ponto da trajetória, nesse mesmo instante, é o raio de curvatura, R, da trajetória.

Em cada ponto da trajetória existem um centro e um raio de curvatura. Cada percurso infinitesimal de comprimento $\text{d}\,s$ pode ser aproximado por um arco de circunferência de raio R e ângulo $\text{d}\theta$; a distância percorrida é o comprimento desse arco, $\text{d}\,s = R\,\text{d}\,\theta$. Assim sendo, conclui-se que o valor da velocidade angular é,

$$\dot{\theta} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{R\,\Delta t} = \frac{\dot{s}}{R} \tag{3.10}$$

Ou seja, em cada ponto da trajetória a velocidade angular $\dot{\theta}$ é igual ao valor da velocidade, $\dot{s}$, dividida pelo raio de curvatura R nesse ponto. Usando este resultado, a componente normal da aceleração, a_n, pode ser escrita do modo seguinte

$$\boxed{a_\text{n} = \frac{v^2}{R}} \tag{3.11}$$

O versor normal e a componente normal da aceleração, apontam sempre no sentido do centro de curvatura. Como tal, a componente normal da aceleração, a_n, também costuma chamar-se **aceleração centrípeta**.

Observe-se que a aceleração tangencial, $\ddot{s}$, pode ser positiva ou negativa, mas a aceleração normal, ou centrípeta, é sempre positiva, porque o produto $\dot{s}\,\dot{\theta} = v^2/R$ é sempre positivo (s e θ ambos aumentam, se o movimento é no sentido do versor tangencial, ou ambos diminuem se o movimento é no sentido oposto).

Exemplo 3.1

A posição de uma partícula, em função do tempo t, é dada pela expressão (SI):

$$\vec{r} = 5\,t\,\hat{\imath} + \frac{3}{2}t^2\,\hat{\jmath} + 2(1 - t^2)\,\hat{k}$$

Determine a expressão para o raio de curvatura da trajetória em função do tempo e calcule o raio de curvatura em $t = 0$ e $t = 1$.

Resolução: Para determinar a expressão do raio de curvatura é necessário saber as expressões do valor da velocidade e da componente normal da aceleração, em função do tempo. Essas expressões podem ser obtidas a partir da velocidade e da aceleração. Usando o Maxima calculam-se esses vetores do modo seguinte

```
(%i1) vetor_r: [5*t, 3*t^2/2, 2*(1-t^2)]$
(%i2) vetor_v: diff (vetor_r, t);
```

(%o2) $[5, 3\,t, -4\,t]$

```
(%i3) vetor_a: diff (vetor_v, t);
```

(%o3) $[0, 3, -4]$

Designando por v e a, os módulos desses vetores, iguais à raiz quadrada do produto escalar de cada vetor com si próprio (o produto escalar no Maxima obtém-se colocando um ponto entre os vetores) obtém-se:

```
(%i4) v: sqrt (vetor_v.vetor_v);
```

(%o4) $\sqrt{25\,t^2+25}$

```
(%i5) a: sqrt (vetor_a.vetor_a);
```

(%o5) 5

Observe-se que o módulo da aceleração é constante, o que implica uma trajetória parabólica ou linear. Para calcular a componente normal da aceleração, calcula-se primeiro a componente tangencial da aceleração, $\dot{v}$,

```
(%i6) at: diff (v, t);
```

(%o6) $\frac{25\,t}{\sqrt{25\,t^2+25}}$

e, usando a equação 3.9, obtém-se a componente normal da aceleração:

```
(%i7) an: ratsimp (sqrt (a^2 - at^2));
```

(%o7) $\frac{5}{\sqrt{t^2+1}}$

As componentes tangencial e normal da aceleração dependem do tempo, embora o valor da aceleração seja constante; isso já aponta para o facto de que a curvatura da trajetória não será constante e, como tal, a trajetória será parabólica. Usando a equação 3.11 determina-se a expressão do raio de curvatura:

```
(%i8) R: ratsimp (v^2/an);
```

(%o8) $\sqrt{t^2+1}\,(5\,t^2+5)$

Nos instantes $t = 0$ e $t = 1$ os raios de curvatura são,

```
(%i9) subst (t=0, R);
```

(%o9) 5

```
(%i10) float (subst (t=1, R));
```

(%o10) 14.14

3.3. Movimento circular

No caso em que o raio de curvatura R é constante e o centro de curvatura permanece fixo, a trajetória é uma circunferência e o movimento é circular, como no caso ilustrado na figura 3.6. Para determinar a posição em cada instante, basta um único grau de liberdade, que pode ser a posição na circunferência, s, ou o ângulo θ.

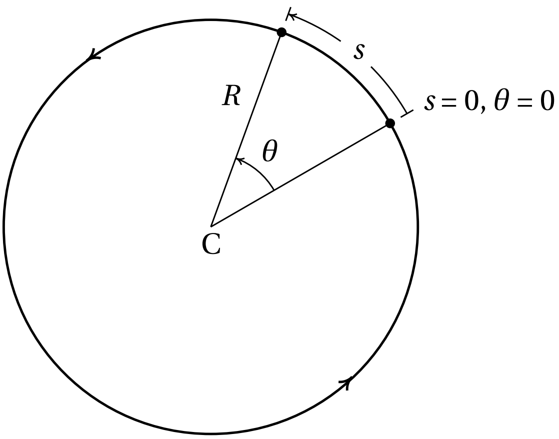


Figura 3.6.: Duas posições numa trajetória de um movimento circular.

A relação entre o ângulo e a posição na trajetória, se a origem usada para medir as duas e o sentido positivo são os mesmos (ver figura 3.6), é

$$\boxed{s = R\theta} \tag{3.12}$$

Sendo R constante, derivando os dois lados da equação anterior obtém-se,

$$\boxed{v = R\omega} \tag{3.13}$$

em que $\omega = \dot{\theta}$ é a velocidade angular. A equação 3.13 é a mesma equação 3.10, que aqui foi obtida no caso particular do movimento circular, em que R é constante, mas trata-se de uma equação geral, válida em qualquer movimento. Derivando os dois lados da equação 3.13 em ordem ao tempo obtém-se,

$$\boxed{a_\text{t} = R\,\alpha} \tag{3.14}$$

onde $\alpha = \dot{\omega}$ é a **aceleração angular**. A aceleração centrípeta é dada pela equação 3.11, que pode ser escrita também em função do valor da velocidade angular,

$$\boxed{a_\text{n} = R\,\omega^2 = v\,\omega} \tag{3.15}$$

No caso particular em que a velocidade angular é constante, a velocidade linear também será constante, as acelerações angular e tangencial serão nulas e o movimento chama-se movimento circular uniforme. Nesse caso, como a velocidade angular é constante, a derivada $\dot{\theta}$ pode calcular-se dividindo o ângulo num intervalo de tempo qualquer, pelo valor desse intervalo de tempo:

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \tag{3.16}$$

Num intervalo de tempo igual ao **período**, T, do movimento circular uniforme, o ângulo corresponde a uma volta completa, $\Delta\theta = 2\pi$, e a equação anterior conduz a uma expressão para o período,

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}} \tag{3.17}$$

A **frequência** de rotação, f, igual ao inverso do período, é o número do voltas que o ponto dá por unidade de tempo.

A relação entre o ângulo de rotação θ e os valores da velocidade angular ω e da aceleração angular α, é análoga à relação entre a posição na trajetória, s, o valor da velocidade, v, e a aceleração tangencial, a_t,

$$\omega = \dot{\theta} \qquad \alpha = \dot{\omega} \qquad \alpha = \omega\,\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta} \tag{3.18}$$

Estas são as equações cinemáticas para o movimento de rotação, que podem ser resolvidas usando os mesmos métodos usados no capítulo 1. As equações 3.12, 3.13 e 3.14 mostram que as variáveis cinemáticas de translação (s, v, a_t) são todas iguais ao produto da respetiva variável cinemática de rotação, (θ, ω, α), pelo raio de curvatura R.

3.4. Rotação dos corpos rígidos

O corpo rígido na figura 3.7 está em movimento. Dois pontos a e b, nas posições $\vec{r}_a$ e $\vec{r}_b$, têm velocidades $\vec{v}_a$ e $\vec{v}_b$ no mesmo instante t. Se o movimento do corpo fosse de translação sem rotação, as velocidades de todos os pontos deviam ser todas iguais, a cada instante, e, como tal, as trajetórias de todos os pontos no corpo seria a mesma curva. Como vimos no capítulo 1, nesse caso bastava estudar o movimento de um ponto qualquer no corpo.

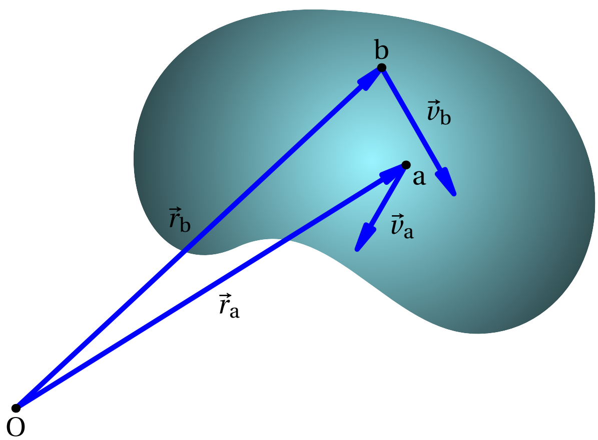


Figura 3.7.: Corpo rígido em movimento.

Como as velocidades dos pontos a e b na figura 3.7, são diferentes, conclui-se que o movimento não é de translação. A posição do ponto b relativa ao ponto a, é $\vec{r}_{b/a} = \vec{r}_b - \vec{r}_a$, que não permanece constante, já que os pontos a e b estão a deslocar-se em diferentes direções e com rapidez diferente. No entanto, o módulo dessa posição relativa,

$$|r_{b/a}| = \sqrt{\vec{r}_{b/a} \cdot \vec{r}_{b/a}} \tag{3.19}$$

deverá permanecer constante, porque o corpo é rígido. Como tal, a sua derivada em ordem ao tempo deverá ser nula:

$$\frac{1}{2\,|r_{b/a}|}\left(\vec{v}_{b/a}\cdot\vec{r}_{b/a}+\vec{r}_{b/a}\cdot\vec{v}_{b/a}\right)=0 \tag{3.20}$$

onde, $\vec{v}_{b/a}$ é a velocidade do ponto b, relativa ao ponto a, igual à derivada de $\vec{r}_{b/a}$ em ordem ao tempo. A equação anterior implica:

$$\vec{v}_{b/a}\cdot\vec{r}_{b/a}=0 \tag{3.21}$$

Esse resultado é geral para quaisquer dois pontos a e b no corpo rígido, permitindo concluir que:

> *A velocidade relativa entre dois pontos num corpo rígido é sempre perpendicular à posição relativa entre eles.*

Visto desde um ponto a, o ponto b permanecerá sempre à mesma distância, $r_{b/a}$, deslocando-se na superfície da esfera de raio $r_{b/a}$, com centro em a (figura 3.8). Todos os outros pontos no corpo rígido deslocam-se em esferas com centro em a, e com diferentes raios.

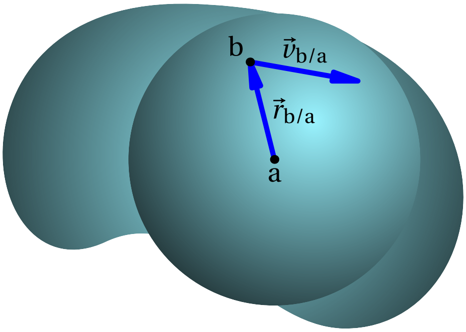


Figura 3.8.: Posição e velocidade relativas a um ponto no corpo rígido.

A cada instante t, a velocidade de b relativa ao ponto a é tangente a uma circunferência na superfície da esfera de raio $r_{b/a}$; essa circunferência poderá ter raio igual a $r_{b/a}$ ou menor (figura 3.9). Outro ponto c, que esteja à mesma distância de a, $r_{c/a}=r_{b/a}$, deverá ter velocidade tangente a outra circunferência paralela à circunferência de b. Se assim não fosse, a distância entre b e c estaria a variar, que não é possível porque o corpo é rígido. E o sentido do movimento dos dois pontos b e c, nessas circunferências, deverá ser o mesmo (sentido de rotação indicado na figura 3.9).

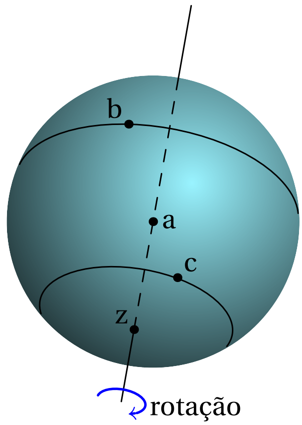


Figura 3.9.: Movimento de dois pontos, b e c, à mesma distância do ponto a.

Como os planos em que se deslocam os pontos b e c, em relação ao ponto a, são paralelos, as duas circunferências na esfera podem ser projetadas num mesmo plano, chamado plano de rotação, com centro no ponto a, como mostra a figura 3.10. Todos os outros pontos à mesma distância terão velocidades tangentes a circunferências com centro em a e raio menor ou igual que o raio da esfera, $r_{\mathrm{b/a}}$. Em particular, existirão dois pontos z e z', na interseção da esfera com a reta perpendicular ao plano de rotação passando pelo centro a, que estão em repouso em relação ao ponto a ($\vec{v}_{\mathrm{z/a}} = \vec{v}_{\mathrm{z'/a}} = 0$). Como tal, a velocidade dos pontos no eixo de rotação é a mesma: $\vec{v}_{\mathrm{z}} = \vec{v}_{\mathrm{v'}} = \vec{v}_{\mathrm{a}}$

A reta que passa por a e z é o eixo de rotação do corpo rígido. Qualquer outro ponto no corpo rígido, que não esteja no eixo de rotação, terá velocidade relativa tangente a alguma circunferência com centro em a, no plano de rotação. O ângulo dθ, que se deslocam todos esses pontos, durante um intervalo d t, deverá ser exatamente o mesmo, para garantir que a distância entre todos eles permanece constante. A velocidade angular do corpo rígido é:

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\,\theta}{\mathrm{d}\,t} \tag{3.22}$$

Como tal, o valor da velocidade relativa de b, ou de qualquer outro ponto, é igual à sua distância até o eixo de rotação, vezes a velocidade angular do

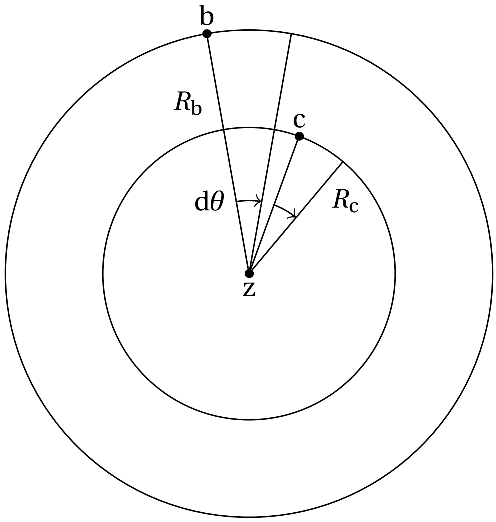


Figura 3.10.: Movimento dos pontos b e c no plano de rotação, em relação ao ponto a.

corpo:

$$v_{b/a} = R_b\,\omega \tag{3.23}$$

onde R_b é a distância desde o ponto b até o eixo de rotação que passa pelo ponto a.

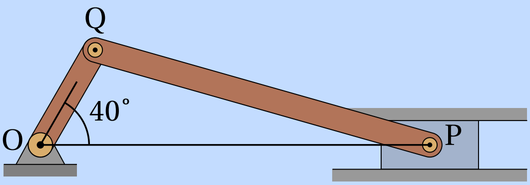
O movimento do corpo rígido é então a sobreposição do movimento dum ponto qualquer nele (no nosso caso a), mais rotação em torno de um eixo que passa por esse ponto. Se em vez do ponto a fosse escolhido outro ponto d, o eixo de rotação teria exatamente a mesma direção, mas passaria por d. A velocidade angular seria exatamente a mesma do que em relação ao ponto a, e o movimento do corpo seria a sobreposição do movimento do ponto d, mais rotação em torno do eixo de rotação que passa por d. Em diferentes instantes a direção do eixo de rotação, e a velocidade angular, podem ser diferentes, mas a cada instante o eixo e a velocidade angular são os mesmos, independentemente do ponto usado como referência. Resumindo,

> *A cada instante existe uma direção no espaço (eixo de rotação) tal que se a posição relativa entre dois pontos num corpo rígido for paralela a essa direção, as suas velocidades serão iguais. A velocidade relativa entre dois pontos num corpo rígido, dividida*

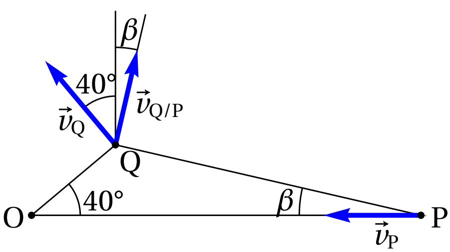
pela distância entre um deles e o eixo de rotação que passa pelo outro, é igual à velocidade angular ω do corpo nesse instante.

Exemplo 3.2

A figura mostra um mecanismo **biela-manivela**, usado para transformar movimento circular em movimento retilíneo ou vice-versa. A manivela é a barra OQ, que roda à volta de um eixo fixo no ponto O, e a biela é a barra PQ, que liga a manivela a um pistão *P* que só pode deslocar-se na horizontal. No instante em que a manivela faz um ângulo de 40° com a horizontal, na posição que mostra a figura, a velocidade do ponto P é 60 cm/s, para a esquerda. Determine as velocidades angulares da biela e da manivela, nesse instante, sabendo que $\overline{\text{OQ}}$ é igual a 7.5 cm e $\overline{\text{PQ}}$ é igual a 20 cm.



Resolução. Como o ponto O está fixo, a velocidade do ponto Q é a mesma velocidade de Q relativa a O, que deve ser perpendicular à barra OQ, porque os dois pontos fazem parte da manivela, que é um corpo rígido. Como tal, a velocidade $\vec{v}_\text{Q}$ do ponto Q faz um ângulo de 40° com a vertical, como mostra a figura seguinte:



Como o ponto Q também faz parte da biela PQ, a velocidade $\vec{v}_\text{Q/P}$, do ponto Q, relativa ao ponto P, deverá ser perpendicular ao segmento $\overline{\text{PQ}}$. O ângulo β que faz com a vertical é o mesmo ângulo que o segmento $\overline{\text{PQ}}$ faz com a horizontal. Esse ângulo pode ser determinado usando a lei dos senos no triângulo OPQ:

$$\sin\beta = \frac{\overline{\mathrm{OQ}}\sin 40^\circ}{\overline{\mathrm{PQ}}} = \frac{7.5\,\sin 40^\circ}{20} = 0.2410$$

Como tal, $\beta = 13.95^\circ$. Os valores das velocidades do ponto Q, relativas aos pontos O e Q, serão iguais às velocidades angulares das barras, vezes os seus comprimentos (usaremos distâncias em cm e velocidades em cm/s):

$$v_\mathrm{Q} = 7.5\,\omega_\mathrm{m} \qquad v_\mathrm{Q/P} = 20\,\omega_\mathrm{b}$$

onde ω_m é a velocidade angular da manivela e ω_b é a velocidade angular da biela. Observe-se que na figura acima, estamos a admitir que ω_m é no sentido oposto aos ponteiros do relógio e ω_b é no sentido dos ponteiros do relógio.

Em coordenadas cartesianas, com eixo dos x horizontal, de esquerda para direita, e eixo dos y vertical, de baixo para cima, as componentes da velocidade do ponto Q são:

$$\vec{v}_\mathrm{Q} = 7.5\,\omega_\mathrm{m}\left(-\sin 40^\circ\,\hat{\imath} + \cos 40^\circ\,\hat{\jmath}\right) = \omega_\mathrm{m}\left(-4.82\,\hat{\imath} + 5.75\,\hat{\jmath}\right) \tag{3.24}$$

Mas a velocidade do ponto Q pode também ser calculada somando a velocidade do ponto P, $\vec{v}_\mathrm{P} = -60\,\hat{\imath}$, mais a velocidade de Q relativa a P:

$$\begin{aligned}\vec{v}_\mathrm{Q} &= -60\,\hat{\imath} + 20\,\omega_\mathrm{b}\left(\sin\beta\,\hat{\imath} + \cos\beta\,\hat{\jmath}\right)\\ &= (4.82\,\omega_\mathrm{b} - 60)\,\hat{\imath} + 19.4\,\omega_\mathrm{b}\,\hat{\jmath}\end{aligned} \tag{3.25}$$

Igualando as componentes das duas expressões 3.24 e 3.25, encontram-se as velocidades angulares:

$$\omega_\mathrm{m} = 9.603\ \mathrm{s}^{-1} \qquad \omega_\mathrm{b} = 2.843\ \mathrm{s}^{-1}$$

Observe-se que as duas velocidades angulares obtidas resolvendo as equações têm sinais positivos, o que indica que os sentidos que admitimos na figura estão corretos. Podiamos ter admitido sentidos opostos, mudando na figura o sentido das velocidades de Q relativas a O e P, e o resultado teria dado valores negativos para as velocidades angulares, indicando que os sentidos não eram os corretos.

3.5. Vetores velocidade angular e aceleração angular

É conveniente definir a velocidade angular como um vetor $\vec{\omega}$, na direção do eixo de rotação, tal como se mostra na figura 3.11. O vetor $\vec{\omega}$ tem módulo igual ao valor absoluto da velocidade angular, ω, direção paralela ao eixo de rotação e sentido segundo a regra da mão direita para a rotação, ou seja, imaginando um sistema de eixos cartesianos em que o eixo dos z aponta na direção e sentido de $\vec{\omega}$, o corpo rígido roda de forma a que o eixo dos x se aproxime do eixo dos y. Também pode fechar-se o punho direito e estender o dedo polegar apontando no sentido de $\vec{\omega}$ e o sentido de rotação é o sentido em que se curvam os outros 4 dedos.

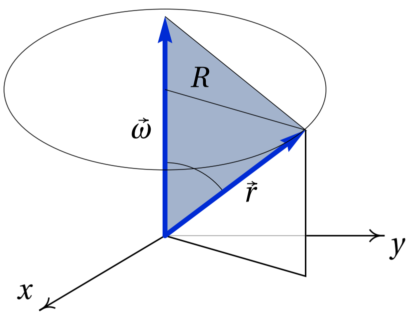


Figura 3.11.: Vetores velocidade angular e posição.

A vantagem de usar um vetor é que $\vec{\omega}$ contem a informação da velocidade angular ω, direção do eixo de rotação e sentido da rotação. A equação 3.23 pode ser escrita de forma vetorial. Se $\vec{r}$ for a posição relativa de um ponto qualquer no corpo, em relação ao ponto de referência, a distância R desde o ponto até o eixo de rotação que passa pelo ponto de referência, é igual a $r \sin\phi$, onde ϕ é o ângulo entre os vetores ω e $\vec{r}$ tal como mostra a figura 3.11. O módulo da velocidade relativa do ponto é então:

$$|v| = |\omega|\, r \sin\phi \tag{3.26}$$

O vetor velocidade relativa, $\vec{v}$, do ponto na posição relativa $\vec{r}$ é perpendicular aos dois vetores $\vec{\omega}$ e $\vec{r}$ e o seu módulo é igual ao produto dos módulos desses dois vetores, vezes o seno do ângulo entre eles. Essa é precisamente a definição do produto vetorial entre os vetores $\vec{\omega}$ e $\vec{r}$, que vamos denotar com o operador $\times$. A velocidade é então o produto da vetorial da velocidade angular vezes o vetor posição:

$$\boxed{\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}} \tag{3.27}$$

Observe-se que, por definição, o produto na equação 3.27 é um vetor no sentido da regra da mão direita, desde o primeiro vector, $\vec{\omega}$, até o segundo, $\vec{r}$.

O movimento circular dum ponto, em relação ao ponto de referência, com raio R e velocidade angular ω, implica aceleração tangencial $R\dot{\omega}$ e aceleração centrípeta $R^2\omega$. Mas a o vetor aceleração relativa pode também ser obtido derivando o vetor velocidade relativa (equação 3.27):

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}\,t} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{\mathrm{d}\,\vec{r}}{\mathrm{d}\,t} \tag{3.28}$$

A derivada do vetor velocidade angular é outro vetor $\vec{\alpha}$, chamado **aceleração angular**, e a derivada do vetor posição relativa é o vetor velocidade relativa, dado pela equação 3.27. A expressão vetorial da aceleração relativa é:

$$\boxed{\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})} \tag{3.29}$$

O primeiro termo é a aceleração tangencial e o segundo termo a aceleração normal ou centrípeta.

3.5.1. Produto vetorial

O produto vetorial entre quaisquer dois vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ é outro vetor $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$, com módulo igual ao produto dos módulos de $\vec{A}$ e $\vec{B}$ e o seno do ângulo entre eles. Em particular, o módulo do produto vetorial $\vec{\omega} \times \vec{r}$ é $|\omega|\, r \sin\phi$. A figura 3.11 mostra o ângulo ϕ entre os vetores; note-se que $\sin\phi$ é sempre positivo, porque ϕ está entre 0 e π. O produto $r \sin\phi$ é igual a R, já que essa distância é medida no plano de rotação, que é perpendicular ao vetor $\vec{\omega}$. Assim sendo, o módulo de $\vec{\omega} \times \vec{r}$ é igual a $R\,|\omega|$, que é igual ao módulo de $\vec{v}$.

A direção de $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ é perpendicular ao plano formado por $\vec{A}$ e $\vec{B}$, seguindo a regra da mão direita de $\vec{A}$ para $\vec{B}$: com o punho da mão direita fechado e o polegar estendido, se os outros quatro dedos rodam no sentido de $\vec{A}$ para $\vec{B}$, então o dedo polegar indica o sentido de $\vec{C}$. A figura 3.11 mostra o plano formado por $\vec{\omega}$ e $\vec{r}$, que é perpendicular ao plano xy, de modo que a direção de $\vec{\omega}\times\vec{r}$ é paralela ao plano xy e perpendicular ao plano de $\vec{\omega}$ e $\vec{r}$; o sentido de $\vec{\omega}\times\vec{r}$ obtém-se pela regra da mão direita de $\vec{\omega}$ para $\vec{r}$.

O produto vetorial não é comutativo; ou seja, $\vec{A}\times\vec{B}$ e $\vec{B}\times\vec{A}$ não são iguais porque têm o mesmo módulo e a mesma direção, mas sentidos opostos. Sendo o ângulo de um vetor consigo próprio zero, o produto $\vec{A}\times\vec{A}$ é nulo. Em particular, $\hat{\imath}\times\hat{\imath}=\hat{\jmath}\times\hat{\jmath}=\hat{k}\times\hat{k}=0$. O produto vetorial de dois versores perpendiculares é outro versor perpendicular ao plano deles; é fácil conferir que $\hat{\imath}\times\hat{\jmath}=\hat{k}$, $\hat{\jmath}\times\hat{k}=\hat{\imath}$ e $\hat{k}\times\hat{\imath}=\hat{\jmath}$. Usando estas propriedades e a lei distributiva do produto vetorial, obtém-se uma expressão para o produto $\vec{A}\times\vec{B}$ em função das componentes cartesianas dos vetores

$$\begin{aligned}\vec{A}\times\vec{B} &= (A_x\,\hat{\imath}+A_y\,\hat{\jmath}+A_z\,\hat{k})\times(B_x\,\hat{\imath}+B_y\,\hat{\jmath}+B_z\,\hat{k})\\ &= (A_y\,B_z-A_z\,B_y)\,\hat{\imath}+(A_z\,B_x-A_x\,B_z)\,\hat{\jmath}+(A_x\,B_y-A_y\,B_x)\,\hat{k}\end{aligned} \tag{3.30}$$

resultado esse que pode ser escrito de forma mais compacta através de um determinante:

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix} \tag{3.31}$$

Observe-se que na figura 3.11 o triângulo sombrejado tem base igual a $|\omega|$ e altura igual a R; assim sendo, a sua área é igual a metade do módulo do produto vetorial da velocidade angular pelo vetor posição: $|\vec{\omega}\times\vec{r}|/2 = R\,|\omega|/2$. Em geral,

> *A área do triângulo formado por dois vetores com origem comum é igual a metade do módulo do produto vetorial dos vetores.*

3.5.2. Rotação plana

Quando a direção do eixo de rotação permanece sempre igual, diz-se que a rotação do corpo rígido é plana. Nesse caso o plano de rotação é sempre o mesmo e pode ser definido como o plano xy. Como tal, o vetor velocidade angular é:

$$\vec{\omega}=\omega\,\hat{k} \tag{3.32}$$

em que ω pode depender do tempo, e a sua derivada é $\alpha=\dot{\omega}$. O vetor aceleração angular estará também na mesma direção do eixo de rotação:

$$\vec{\alpha}=\alpha\,\hat{k} \tag{3.33}$$

O vetor posição relativa de um ponto qualquer no corpo é $\vec{r} = x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath} + z\,\hat{k}$. Os produtos vetoriais nas equações 3.27 e 3.29, em coordenadas cartesianas (equação 3.31), conduzem às seguintes expressões para a velocidade relativa e as componentes tangencial e normal da aceleração relativa:

$$\boxed{\vec{v} = \omega\left(x\,\hat{\jmath} - y\,\hat{\imath}\right)} \tag{3.34}$$

$$\boxed{\vec{a}_{\text{t}} = \alpha\left(x\,\hat{\jmath} - y\,\hat{\imath}\right) \quad \vec{a}_{\text{n}} = -\omega^2\left(x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath}\right)} \tag{3.35}$$

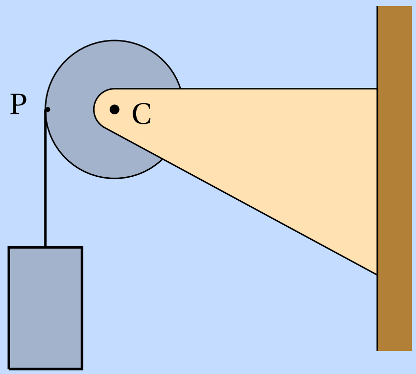
Como tal, a coordenada z do ponto não interessa. Basta apenas saber a posição da sua projeção no plano xy (plano de rotação):

$$\vec{R} = x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath} \tag{3.36}$$

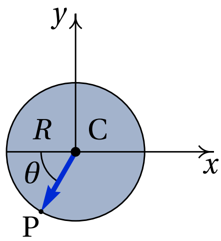
e o módulo desse vetor, R, é a distância desde o ponto até o eixo de rotação.

Exemplo 3.3

Cola-se um extremo de um fio numa roldana com raio de 5 cm, enrolando-o e pendurando um bloco do outro extremo (ver figura). No instante inicial o bloco e a roldana estão em repouso e o ponto P da roldana encontra-se à mesma altura do seu centro C. O bloco começa a descer, com aceleração constante de valor igual a $g/4$. Determine a velocidade e a aceleração do ponto P, dois segundos após o instante inicial.



Resolução. O eixo de rotação da roldana é perpendicular ao plano da figura, e permanece fixo. Como tal, a rotação da roldana é uma rotação plana e o plano de rotação é o plano da figura, que designaremos de plano xy.



O ponto de referencia pode ser qualquer ponto na roldana, mas como os pontos no eixo da roldana estão em repouso, neste caso é conveniente escolher como ponto de referência o ponto C no centro da roldana. Em função dos eixos definidos na figura ao lado, a posição do ponto P, após a roldana ter rodado um ângulo θ desde a posição inicial, é:

$$\vec{R}_{\text{P}} = -R\left(\cos\theta\,\hat{\imath} + \sin\theta\,\hat{\jmath}\right) \tag{3.37}$$

Para calcular a velocidade do ponto P, é necessária também a velocidade angular, que pode ser obtida a partir do valor da velocidade do bloco. Para encontrar uma expressão para o valor da velocidade do bloco, integra-se a equação $\dot{v}_b = a_{\text{t}}$

$$\dot{v}_b = \frac{g}{4} \qquad \Longrightarrow \qquad v_b = \frac{g\,t}{4}$$

Como todos os pontos do fio têm esse mesmo valor da velocidade e os pontos da superfície acompanham o movimento do fio, esse será também o valor da velocidade dos pontos na superfície da roldana e o valor da velocidade angular da roldana será $v_b/R = g\,t/(4\,R)$. A rotação é no sentido anti-horário (velocidade angular positiva), com velocidade angular:

$$\omega = \frac{g\,t}{4\,R}$$

A velocidade do ponto P obtém-se a partir da equação 3.34 para rotação plana (ou simplesmente derivando a expressão 3.37, tendo em conta que a derivada de θ é ω):

$$\vec{v}_{\text{P}} = \frac{g\,t}{4}(\sin\theta\,\hat{\imath} - \cos\theta\,\hat{\jmath})$$

Observe-se que a equação 3.34 dá a velocidade relativa do ponto, mas neste caso, em que o ponto de referência está em repouso, a velocidade relativa é a mesma velocidade absoluta.

A aceleração angular é a derivada da velocidade angular em ordem ao tempo,

$$\alpha = \frac{g}{4\,R}$$

e as componentes da aceleração do ponto P obtêm-se a partir da equação 3.35 (ou derivando a expressão da velocidade do ponto P):

$$\vec{a}_t = \frac{g}{4}(\sin\theta\,\hat{\imath} - \cos\theta\,\hat{\jmath}) \qquad \vec{a}_n = \frac{g^2\,t^2}{16\,R}(\cos\theta\,\hat{\imath} + \sin\theta\,\hat{\jmath})$$

Para encontrar a expressão para θ em função do tempo, integra-se a equação $\dot{\theta} = \omega$, com $t_i = 0$ e $\theta_i = 0$

$$\dot{\theta} = \frac{g\,t}{4\,R} \qquad \Longrightarrow \qquad \theta = \frac{g\,t^2}{8\,R}$$

substituindo os valores de $t = 2$, $R = 0.05$ e $g = 9.8$, em unidades SI, obtêm-se a velocidade e a aceleração nesse instante,

$$\vec{v}_P = -2.81\,\hat{\imath} + 4.015\,\hat{\jmath} \qquad \vec{a}_P = -394.8\,\hat{\imath} - 273.3\,\hat{\jmath}$$

3.6. Movimentos de translação e de rotação dependentes

Numa roda em movimento sobre uma superfície, sem derrapar, o ângulo de rotação e o deslocamento da roda estão relacionados. Na figura 3.12, uma roda de raio R desloca-se para a direita, sobre uma superfície, sem derrapar.

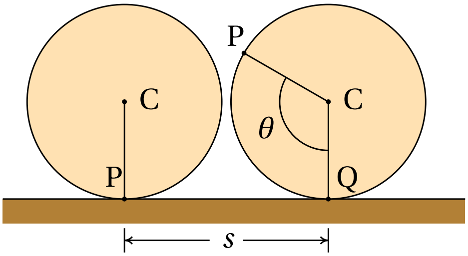


Figura 3.12.: Roda que se desloca rodando sem derrapar.

Num instante inicial um ponto P da roda está em contacto com a superfície; após alguns instantes, a roda rodou um ângulo θ e o centro da roda percorreu uma distância s. O arco de circunferência $R\theta$ deverá ser igual à distância percorrida s, já que todos os pontos nesse arco estiveram em contacto com pontos da superfície.

$$s = R\theta \tag{3.38}$$

derivando os dois lados da equação, obtém-se a relação entre a velocidade do centro C e a velocidade angular,

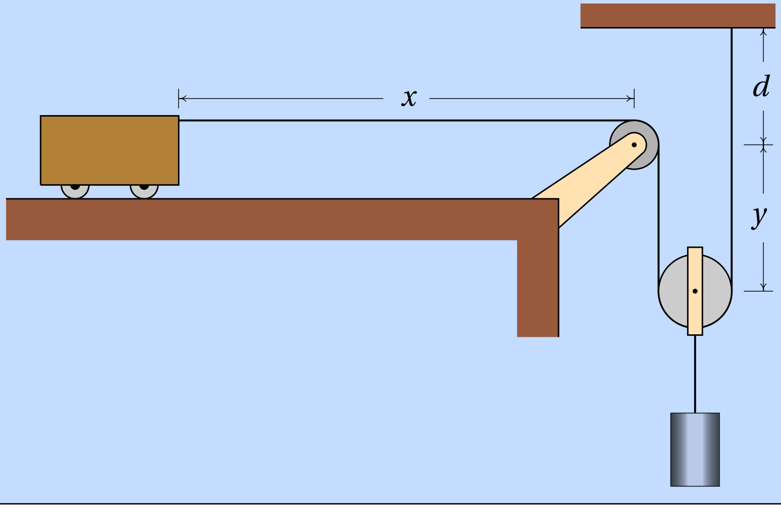
$$v = R\omega \tag{3.39}$$

e derivando novamente, observa-se que a aceleração de tangencial de C é igual ao produto do raio pela aceleração angular:

$$a_{\text{t}} = R\alpha \tag{3.40}$$

No caso das roldanas, se a roldana roda sem o fio derrapar sobre a sua superfície, os pontos na superfície da roldana terão a mesma velocidade do fio e subtraindo a velocidade do centro da roldana obtém-se a velocidade do ponto na superfície da roldana, relativa à roldana; o valor dessa velocidade relativa, dividido pelo raio da roldana, deverá ser igual à velocidade angular da roldana.

Exemplo 3.4
A roldana fixa no sistema da figura tem raio de 3 cm e a roldana móvel tem raio de 5 cm. Calcule o valor da velocidade do carrinho e das velocidades angulares das roldanas, no instante em que o cilindro desce com velocidade de valor 1.5 m/s, admitindo que o fio não derrapa nas roldanas.



Resolução. Este sistema já foi estudado na secção 2.5 onde mostrou-se que o valor da velocidade do carrinho é o dobro da velocidade do cilindro. Assim sendo, o valor da velocidade do carrinho é 3 m/s.

Na roldana fixa, o valor da velocidade dos pontos na superfície será o mesmo que no carrinho, 3 m/s e, como tal, o valor da velocidade angular da roldana fixa é,

$$\omega_1 = \frac{3}{0.03} = 100\ \text{s}^{-1}$$

O centro da roldana móvel também desce a 1.5 m/s. No ponto da sua superfície, no lado direito, o fio está estático e, assim sendo, esse ponto desloca-se para cima, em relação ao centro, com velocidade de valor 1.5 m/s. O ponto na superfície da roldana, no lado esquerdo, desloca-se para baixo, com a velocidade do carrinho, 3 m/s, de modo que em relação ao centro da roldana desloca-se para baixo, com velocidade de valor 1.5 m/s. O valor da velocidade angular da roldana móvel é,

$$\omega_2 = \frac{1.5}{0.05} = 30\ \text{s}^{-1}$$

A parte do fio no lado direito da roldana móvel, que permanece estático, pode ser considerado como uma superfície vertical em que a roldana roda como uma roda sobre uma superfície. O valor da velocidade do centro da roda, que é igual ao valor da velocidade do cilindro, é igual ao produto do valor da velocidade angular da roda pelo raio da roda. O valor da velocidade do ponto mais à esquerda na roda, que é o valor da velocidade do carrinho, é o produto do valor da velocidade angular da roda pelo diâmetro da roda. Essa é outra forma de explicar porque o valor da velocidade do carrinho é o dobro do valor da velocidade do cilindro, porque o diâmetro da roda é o dobro do seu raio.

Perguntas

1. No intervalo de tempo $0 < t < 1$, o valor da velocidade de um objeto em função do tempo verifica a expressão $v = 5 + 3\,t^2 + 2\,t^3$. Se a trajetória do objeto for uma reta, qual das cinco funções na lista poderá ser a expressão correta para o valor da aceleração?

A. $a = 5 + 6\,t + 6\,t^2$

B. $a = 5$

C. $a = 6\,t$

D. $a = 5 + 6\,t$

E. $a = 6\,t + 6\,t^2$

2. Um objeto com movimento circular tem aceleração angular com valor constante $\alpha = 3/\pi$ radiano/s^2. Se o objeto parte do repouso, quanto tempo, em segundos, demorará a completar as primeiras 3 voltas?

A. π

B. 2π

C. 3π

D. 4π

E. 5π

3. Um ponto num objeto descreve numa trajetória curva, com velocidade de valor constante. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

A. A aceleração é perpendicular à trajetória.

B. O valor da aceleração é constante.

C. A aceleração é tangente à trajetória.

D. A aceleração é constante.

E. A aceleração é nula.

4. Um projétil é lançado com velocidade inicial com valor v_i e direção inclinada que faz um ângulo θ com o plano horizontal. Determine o raio de curvatura da trajetória parabólica no instante inicial.

A. $\dfrac{v_i^2 \tan\theta}{g}$

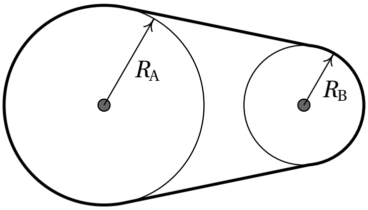
B. $\dfrac{v_i^2 \sin\theta}{g}$

C. $\dfrac{v_i^2 \cos\theta}{g}$

D. $\dfrac{v_i^2}{g \sin\theta}$

E. $\dfrac{v_i^2}{g \cos\theta}$

5. O movimento circular de uma roda de raio R_A é transmitido para outra roda de raio R_B, através de uma correia que se desloca com as rodas, sem derrapar. Qual é a relação entre os valores das velocidades angulares ω_A e ω_B de ambas rodas?



A. $R_A\omega_A = R_B\omega_B$

B. $\omega_A = \omega_B$

C. $R_A^2\omega_A = R_B^2\omega_B$

D. $R_B\omega_A = R_A\omega_B$

E. $R_B^2\omega_A = R_A^2\omega_B$

Problemas

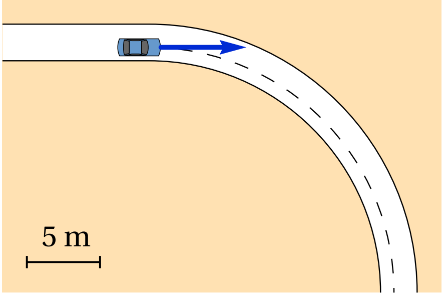
1. No intervalo de tempo $0 \le t \le 10$, os valores da velocidade e da aceleração de uma partícula com movimento em 3 dimensões são dadas pelas funções: $v = t\sqrt{4\,t^2+9}$ e $a = \sqrt{16\,t^2+9}$ (unidades SI). Encontre, no mesmo intervalo de tempo, as expressões para:

(a) A componente tangencial da aceleração.

(b) A componente normal da aceleração.

(c) O raio de curvatura.

2. Um motorista entra numa curva a 72 km/h, e trava, fazendo com que o valor da velocidade diminua a uma taxa constante de 4.5 km/h cada segundo. Observando a figura, faça uma estimativa do raio de curvatura da estrada e calcule o valor da aceleração do automóvel 4 segundos após ter iniciado a travagem.



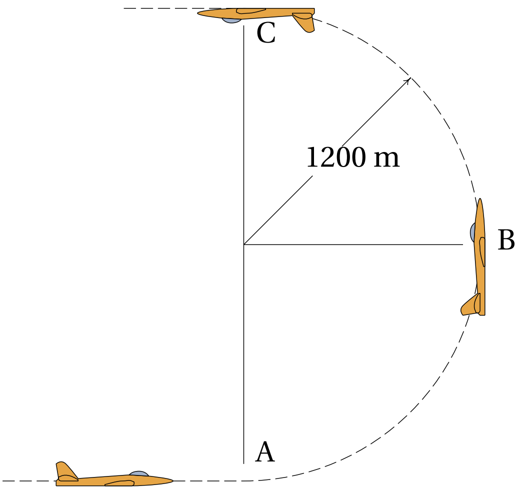
3. A equação da trajetória de um objeto é: $\vec{r} = 8\cos^2(2\,t)\,\hat{\imath} + 4\sin(4\,t)\,\hat{\jmath}$ (unidades SI e ângulos em radianos).

(*a*) Demonstre que o movimento do objeto é circular uniforme.

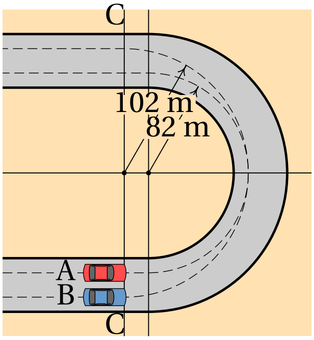
(*b*) Determine o valor da velocidade angular do objeto e o seu período.

(*c*) Encontre a posição do centro da trajetória circular.

4. Um piloto de corridas de aviões executa um *loop* vertical, igual a meia circunferência de raio 1200 m. O valor da velocidade no ponto A, no início do loop, é 160 m/s e no ponto C, no fim do loop, é 140 m/s. Calcule o valor da aceleração no ponto B, no meio do loop, admitindo que a aceleração tangencial permanece constante durante o loop (observe que também é negativa).



5. Dois carros A e B passam por uma curva usando trajetórias diferentes. A figura mostra a curva delimitada pela reta C. O carro B faz um percurso semicircular com raio de 102 m; o carro A avança uma distância em linha reta, a seguir segue um semicírculo com raio 82 m e termina com outro trajeto em linha reta. Os dois carros deslocam-se à velocidade máxima que podem ter para conseguir fazer a curva, que para o tipo de pneus usados corresponde à velocidade que produz uma aceleração normal de $0.8\,g$, onde g é a aceleração da gravidade. Calcule o tempo que demora cada um dos carros a fazer a curva.



6. (*a*) Calcule a área do triângulo com vértices nos pontos A, B e C, com coordenadas cartesianas A = (3, 5, 4), B = (−1,2,1) e C = (2,−2,2).

(*b*) Demonstre a **Lei dos senos**, para um triângulo com lados de comprimentos a, b e c,

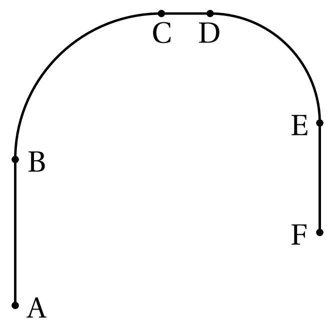
$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$$

em que α, β e γ são os ângulos opostos aos lados a, b e c.

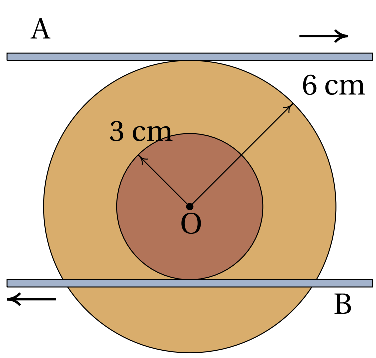
7. Uma partícula segue a trajetória que mostra a figura, partindo do repouso em A e aumentando a velocidade com aceleração constante até o ponto B. Desde B até E mantém velocidade constante de 10 m/s e a partir de E começa a abrandar, com aceleração constante, até parar no ponto F. A distância AB é 60 cm, CD é 20 cm e EF é 45 cm; o raio do arco BC é 60 cm e o raio do arco DE é 45 cm. Determine:

(*a*) O módulo da aceleração da partícula em cada um dos trajetos AB, BC, CD, DE e EF.

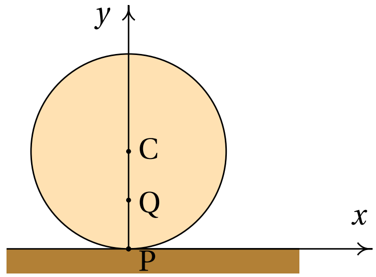
(*b*) O tempo total do movimento desde A até F e a velocidade média nesse percurso.



8. A roda na figura tem duas partes com raios de 3 cm e 6 cm, que estão em contacto com duas barras horizontais A e B. A barra A desloca-se para a direita, com valor da velocidade de 10 m/s e a barra B desloca-se para a esquerda com valor da velocidade de 35 m/s, enquanto a roda mantém o contacto com as duas barras, sem derrapar. Determine para que lado se desloca o centro O da roda e calcule os valores da velocidade do ponto O e da velocidade angular da roda.



9. Uma roda com 20 cm de raio desloca-se, sem derrapar, sobre uma superfície plana, ao longo do eixo dos x. No instante $t = 0$ o centro da roda encontra-se em $x = 0$ e $y = 20$ cm e os pontos P e Q da roda são os pontos que estão em $x = 0$ com $y = 0$ e $y = 10$ cm. O valor da velocidade do centro da roda é 2 m/s, constante. (*a*) Calcule quanto tempo demora a roda a dar duas voltas completas. (*b*) Represente os gráficos das trajetórias dos pontos P e Q durante o tempo que a roda demora a dar duas voltas.

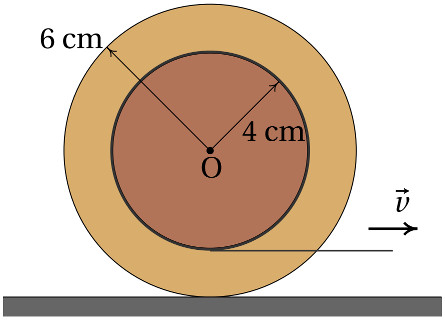


10. Um cilindro com raio de 4 cm está colado a uma roda com 6 cm de raio que se encontra sobre uma superfície horizontal plana, tal como mostra a figura. Uma corda foi enrolada à volta do cilindro e está a ser puxada horizontalmente para a direita, com velocidade constante $\vec{v}$ de valor 2.5 cm/s. O movimento da corda faz rodar a roda sobre a superfície horizontal, sem derrapar.

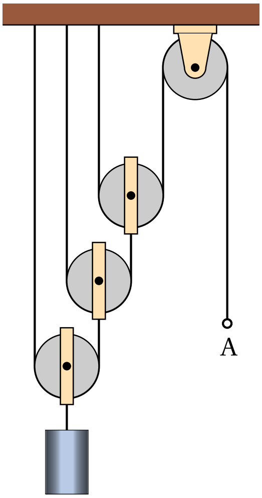
(*a*) Determine o valor da velocidade angular da roda.

(*b*) Diga em que sentido se desloca o ponto O, no eixo da roda e do cilindro, e determine o valor da sua velocidade.

(*c*) Determine quantos centímetros de corda são enrolados à volta do cilindro a cada segundo.



11. Na máquina representada na figura, todas as roldanas têm raio igual a 5 cm. Determine os valores das velocidades angulares das quatro roldanas, quando o anel A for puxado para baixo com velocidade de valor constante 2 m/s.

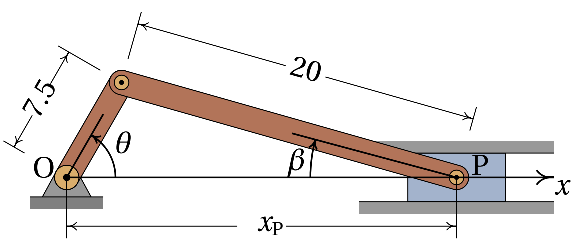


12. A figura mostra o mecanismo biela-manivela analisado no exemplo 3.2 (as distâncias estão em cm). Observe que há três variáveis que mudam em função do tempo: x_{P}, θ e β; e as suas derivadas são a velocidade do pistão e as velocidades angulares da manivela e da biela: v_{P}, ω_{m} e ω_{b}. Mas basta uma dessas 3 variáveis para encontrar as outras duas. Outra forma diferente de resolver o mesmo problema é a seguinte:

(*a*) Encontre uma expressão para x_{P} que dependa apenas do ângulo θ. Derive essa expressão para obter a velocidade angular da manivela, em função da velocidade do pistão e do ângulo θ.

(*b*) Encontre a relação entre os senos dos ângulos θ e β. Derive essa relação e substitua o cosseno de β em termos do ângulo θ, encontrando assim uma expressão para a velocidade angular da biela, em função da velocidade angular da manivela e do ângulo θ.

(*c*) Substitua os valores do exemplo 3.2, $\theta = 40°$ e $v_{\mathrm{P}} = 60$ cm/s, nos resultados das duas alíneas anteriores, para conferir os resultados obtidos no exemplo.



Respostas

Perguntas: 1. E. **2.** B. **3.** A. **4.** E. **5.** A.

Problemas

1. (*a*) $\dfrac{8\,t^2+9}{\sqrt{4\,t^2+9}}$ (*b*) $\dfrac{6\,t}{\sqrt{4\,t^2+9}}$ (*c*) $\dfrac{t}{6}\left(4\,t^2+9\right)^{3/2}$

2. Com raio igual a 16 m, o valor da aceleração é aproximadamente 14 m/s^2

3. (*a*) O cálculo do módulo do vetor velocidade dá um valor constante $v = 16$ e as componentes obtidas para a aceleração são $a_\text{t} = 0$ e $a_\text{n} = 64$. Assim sendo, o movimento é uniforme, porque o valor da velocidade permanece constante e circular, porque o movimento é num plano e o raio de curvatura, v^2/a_n, é constante. (*b*) $\omega = 4$ rad/s, $T = \pi/2$ (segundos). (*c*) coordenadas (4, 0).

4. 18.85 m/s^2

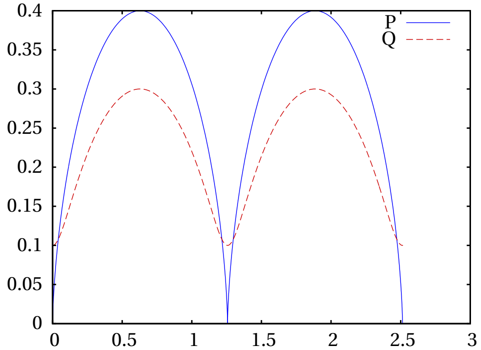
5. 11.74 s para o carro A e 11.33 s para o carro B.

6. (*a*) 14.79 (*b*) Os três produtos ($a\,b\,\sin\gamma$), ($a\,c\,\sin\beta$) e ($b\,c\,\sin\alpha$) são todos iguais ao dobro da área do triângulo; igualando cada par de produtos demonstra-se cada uma das igualdades.

7. (*a*) 83.33 m/s^2 em AB, 111.11 m/s^2 em EF, 166.67 m/s^2 em BC e 222.22 m/s^2 em DE. (*b*) 0.395 s e 7.34 m/s.

8. Para a esquerda, com $v_\text{o} = 20$ m/s e $\omega = 500\,\text{s}^{-1}$.

9. (*a*) 1.26 s (*b*)



10. (*a*) 1.25 s^{-1}, no sentido dos ponteiros do relógio. (*b*) Para a direita com velocidade de valor 7.5 cm/s. (*c*) 5 cm (a corda enrola-se no cilindro, porque este roda no sentido dos ponteiros do relógio).

11. De esquerda para direita, $5\ \mathrm{s}^{-1}$, $10\ \mathrm{s}^{-1}$, $20\ \mathrm{s}^{-1}$ e $40\ \mathrm{s}^{-1}$.

12. (*a*) $x_\mathrm{P} = 7.5\cos\theta + \sqrt{400 - 56.25\sin^2\theta}$

$$\omega_\mathrm{m} = -\frac{v_\mathrm{P}}{7.5\sin\theta + \dfrac{56.25\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{400-56.25\sin^2\theta}}}$$

(*b*) $3\sin\theta = 8\sin\beta \qquad \omega_\mathrm{b} = \dfrac{3\,\omega_\mathrm{m}\cos\theta}{8\sqrt{1-\frac{9}{64}\sin^2\theta}}$