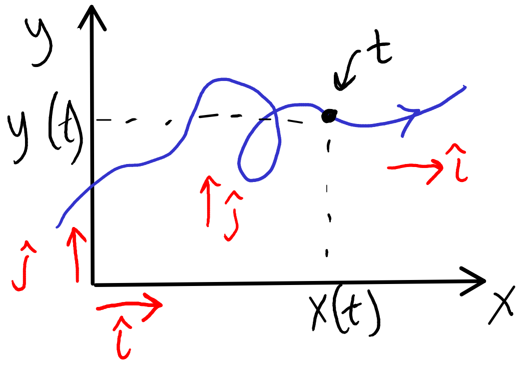
aula 3. Mar. 1

CINEMÁTICA VETORIAL

Movimento dum ponto num plano (x,y).



dois graus de liberdade, $x(t)$ e $y(t)$

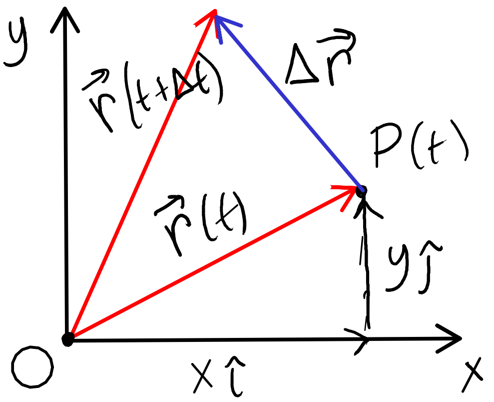
$$v_x = \dot{x}\,,\quad a_x = \dot{v}_x\,,\quad a_x = v_x \frac{dv_x}{dx}$$

$$v_y = \dot{y}\,,\quad a_y = \dot{v}_y\,,\quad a_y = v_y \frac{dv_y}{dy}$$

VETORES (espaço Euclideano: $d^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2$)

versores (vetores unitários) $\hat{\imath}$ e $\hat{\jmath}$, nas direções dos eixos x e y.

VETOR POSIÇÃO $\quad \vec{r}(t) = x(t)\,\hat{\imath} + y(t)\,\hat{\jmath}$



DESLOCAMENTO

No intervalo $t_i \le t \le t_f$

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t_f) - \vec{r}(t_i)$$

VETOR VELOCIDADE MÉDIA $\quad \vec{v}_m = \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \dfrac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$

VETOR VELOCIDADE

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{x}\,\hat{\imath} + \dot{y}\,\hat{\jmath} = v_x\,\hat{\imath} + v_y\,\hat{\jmath}$$

VETOR ACELERAÇÃO:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{v}_x \hat{\imath} + \dot{v}_y \hat{\jmath} = a_x \hat{\imath} + a_y \hat{\jmath}$$

$$x(t)\ ; \qquad v_x = \frac{dx}{dt} \qquad \int_{x_0}^{x(t)} dx = \int_{t_0}^{t} v_x\, dt$$

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v_x\, dt$$

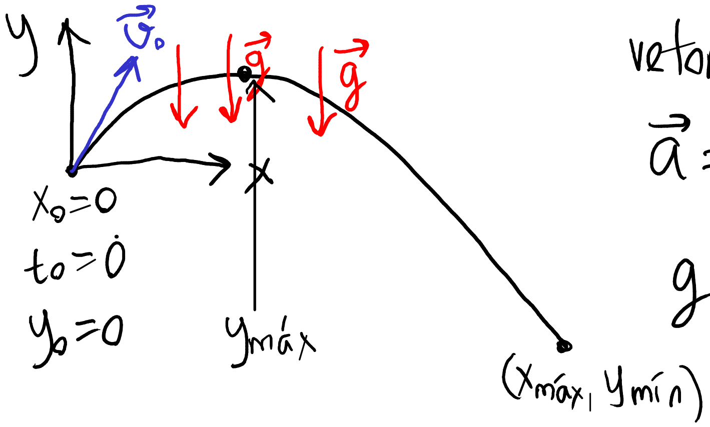
$$\vec{r}(t) = \left(x_0 + \int_{t_0}^{t} v_x\, dt\right)\hat{\imath} + \left(y_0 + \int_{t_0}^{t} v_y\, dt\right)\hat{\jmath}$$

$$\boxed{\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{v}\, dt}$$

$$\vec{v}(t) = \left(v_{0x} + \int_{t_0}^{t} a_x\, dt\right)\hat{\imath} + \left(v_{0y} + \int_{t_0}^{t} a_y\, dt\right)\hat{\jmath}$$

$$\boxed{\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{a}\, dt}$$

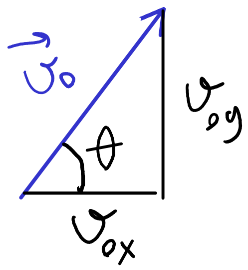
LANÇAMENTO DE PROJÉTEIS



vetor aceleração constante

$$\vec{a} = \vec{g} = -g\hat{\jmath} \qquad \begin{pmatrix} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{pmatrix}$$

$g \approx 9.8\ \frac{m}{s^2}$ aceleração da gravidade



θ = ângulo de lançamento

$$\tan\theta = \frac{v_{0y}}{v_{0x}}$$

$$\vec{v}(t) = \Big(v_{0x} + \int_0^t \underbrace{a_x}_{0}\, dt\Big)\hat{\imath} + \Big(v_{0y} + \int_0^t \underbrace{a_y}_{-g}\, dt\Big)\hat{\jmath}$$

$$\vec{v}(t) = v_{0x}\hat{\imath} + (v_{0y} - gt)\hat{\jmath}$$

$$\vec{r}(t) = \underbrace{v_{0x}t\,\hat{\imath}}_{\text{Mov. uniforme}} + \underbrace{\left(v_{0y}t - \tfrac{1}{2}gt^2\right)\hat{\jmath}}_{\text{mov. uniformemente acelerado}}$$

$$x = v_{0x}t \implies t = \frac{x}{v_{0x}} \qquad y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$y = \frac{v_{0y}}{v_{0x}}x - \frac{g}{2v_{0x}^2}x^2 \qquad \boxed{y = \tan\theta\, x - \frac{g}{2v_{0x}^2}x^2}$$

equação da trajetória

Exemplo 2.2. $\vec{v} = (5 - t^2 e^{-\frac{t}{5}})\hat{\imath} + (3 - e^{-\frac{t}{12}})\hat{\jmath}$ (SI)

no instante $t_0 = 0$, $\vec{r}_0 = 2\hat{\imath} + 5\hat{\jmath}$

Determine: (a) $\vec{a}(t)$ (b) $\vec{r}(t)$ (c) $\vec{r}, \vec{v}$ e $\vec{a}$ em $t = 15$

(d) $\vec{r}, \vec{v}$ e $\vec{a}$ no limite $t \to \infty$

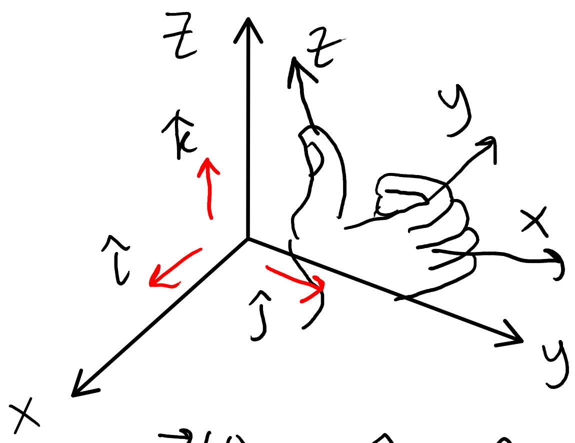
No Maxima, podemos representar cada vetor por uma lista, em que cada elemento é uma das suas componentes:

```
(%i1) fpprintprec:4$

(%i2) v: [5-t^2*exp(-t/5),3-exp(-t/12)];
                                  2    - t/5          - t/12
(%o2)                       [5 - t  %e      , 3 - %e       ]
(%i3) a: diff(v,t);
                          2    - t/5                        - t/12
                         t  %e                   - t/5   %e
(%o3)                   [---------- - 2 t %e      , --------]
                             5                          12
(%i4) r: [2,5] + integrate(v,t,0,t);
Is t positive, negative or zero?

positive;
         - t/5                  t/5      2
(%o4) [%e      ((5 t - 250) %e     + 5 t  + 50 t + 250) + 2,
                                             - t/12          t/12
                                           %e       (3 t %e      + 12) - 7]
(%i5) float(subst(t=15,[r,v,a]));
(%o5)        [[- 67.2, 41.44], [- 6.202, 2.713], [0.7468, 0.02388]]
(%i6) float(limit([r,v,a],t,inf));
(%o6)                   [[inf, inf], [5.0, 3.0], [0.0, 0.0]]
```

MOVIMENTO EM 3 DIMENSÕES



regra da mão direita
de x para y para z

$$\vec{r}(t) = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$$
$$\vec{v}(t) = \dot{x}\hat{\imath} + \dot{y}\hat{\jmath} + \dot{z}\hat{k} = v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath} + v_z\hat{k}$$
$$\vec{a}(t) = \dot{v}_x\hat{\imath} + \dot{v}_y\hat{\jmath} + \dot{v}_z\hat{k} = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k}$$