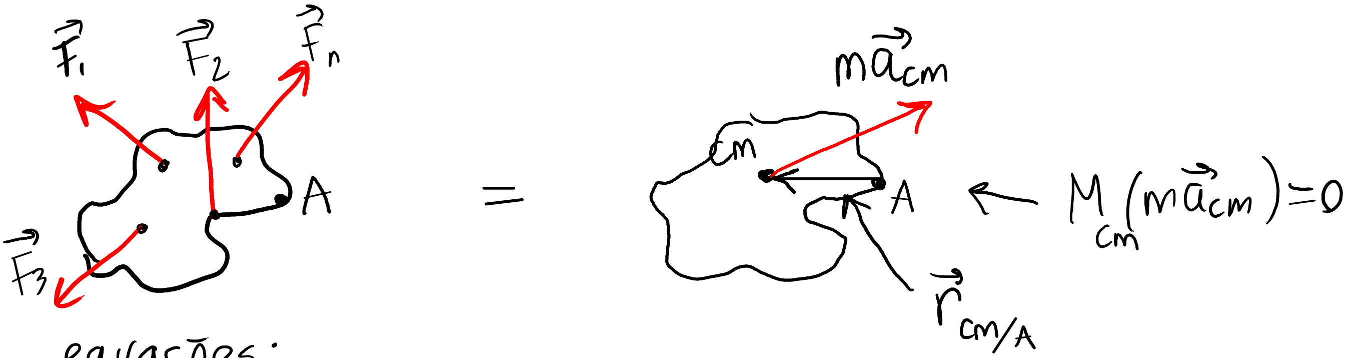
aula 12. 31 de março

MOVIMENTO ACELERADO SEM ROTAÇÃO



equações:

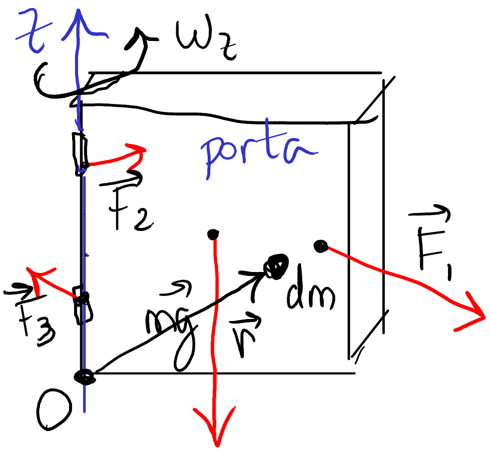
$$\sum_i \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_{cm}$$

$$\sum_i \vec{M}_{cm}(\vec{F}_{ext}) = \vec{0}$$

$$\sum \vec{M}_A(\vec{F}_{ext}) = \vec{r}_{cm/A} \times (m\vec{a})$$

$$\vdots$$

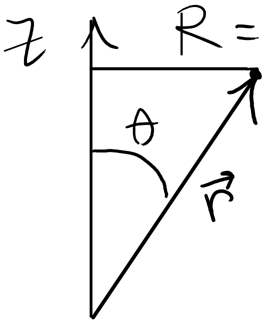
ROTAÇÃO COM EIXO FIXO



as dobradiças exercem forças e binários que eliminam qualquer movimento exeto rotação à volta do eixo z.

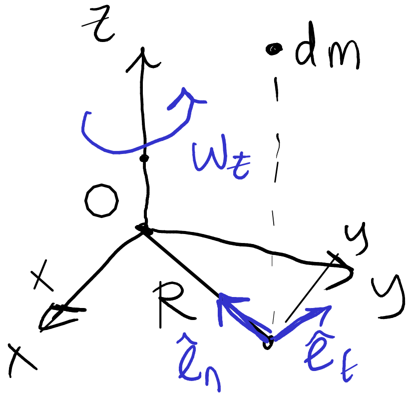
$$\sum \vec{F}_{ext} = \int_{corpo} \vec{a}\, dm$$

dm tem rotação no plano xy, com raio R



$R = r\sin\theta \qquad \vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k} \qquad R = \sqrt{x^2+y^2}$

$$\vec{a} = \alpha R\,\hat{e}_t + R\omega^2\,\hat{e}_n$$



$$R\hat{e}_n = -x\hat{\imath} - y\hat{\jmath}$$
$$R\hat{e}_t = -y\hat{\imath} + x\hat{\jmath}$$

Força-Binário resultante no eixo z.

↪ M_z $\left(M_x=0,\ M_y=0,\ F_x=0,\dots\right)$

$$d\vec{M}(\vec{a}\,dm) = \vec{r} \times (\vec{a}\,dm)$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ x & y & z \\ -y\alpha - x\omega^2 & +x\alpha - y\omega^2 & 0 \end{vmatrix} dm$$

$$M_z = \int_{corpo} dM_z = \int_{corpo} \left(x\left(+x\alpha - \cancel{y\omega^2}\right) - y\left(-y\alpha - \cancel{x\omega^2}\right)\right) dm$$

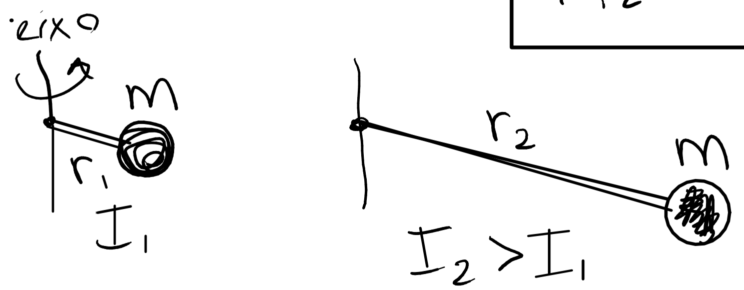
$$M_z = \int_{corpo} (x^2+y^2)\,\alpha\, dm = \alpha \int_{corpo} (x^2+y^2)\, dm$$

momento de inércia (em torno do eixo dos z) $= \boxed{I_z = \int R^2\, dm}$

massa × distância²

lei do movimento: $\boxed{M_z = I_z \alpha}$

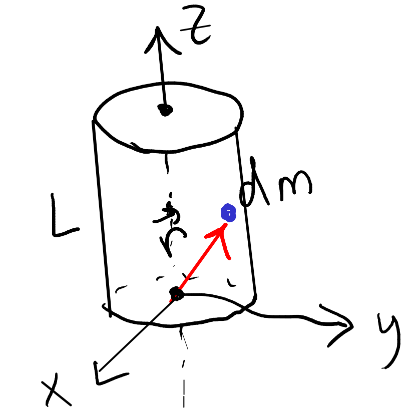
M_z soma dos momentos em relação ao eixo.



$r_2 = k r_1$

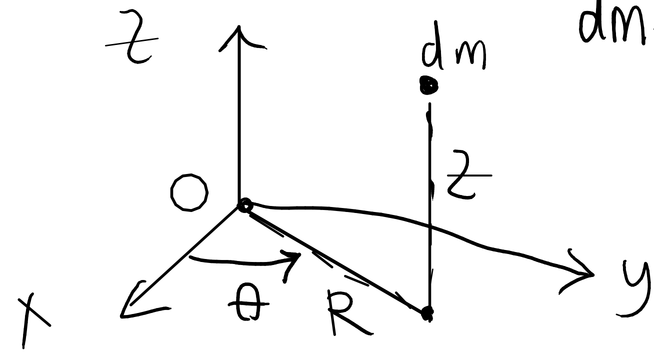
$\Rightarrow I_2 = k^2 I_1$

Exemplo 5.4. Momento de inércia de um cilindro homogéneo de raio r, altura L e massa m, à volta do seu próprio eixo.

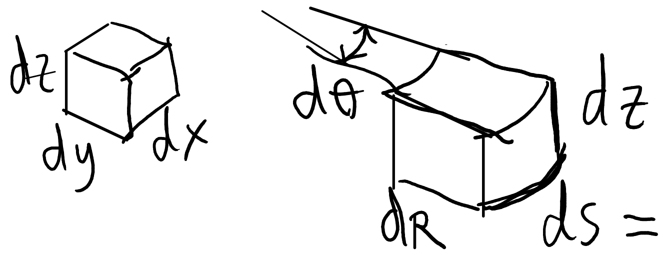


coordenadas cilíndricas

$\vec{r}$: (R, θ, z)



$dm = \rho\, dx\, dy\, dz$



$ds = R\,d\theta$

$dx\,dy\,dz = R\,d\theta\,dR\,dz$

$$I_z = \int_{\text{corpo}} R^2\, dm = \rho \int_0^L \int_0^r \int_0^{2\pi} R^2 (R\,d\theta\,dR\,dz)$$

$$= \rho \left(\int_0^L dz\right)\left(\int_0^r R^3\, dR\right)\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)$$

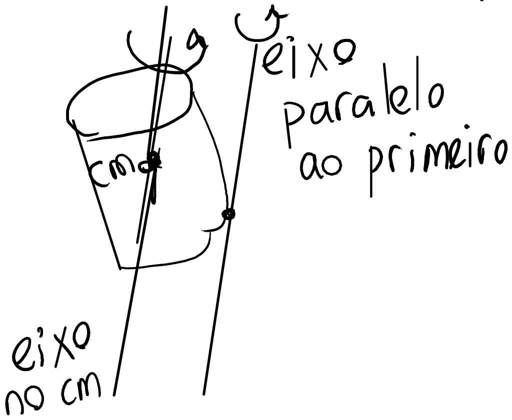
$$= \rho L \left(\frac{r^4}{4}\right)(2\pi) = \frac{\pi \rho L}{2} r^4$$

$m = \rho \times \text{volume} = \rho \pi r^2 L \quad \Rightarrow \quad \boxed{I_z = \frac{1}{2} m r^2}$

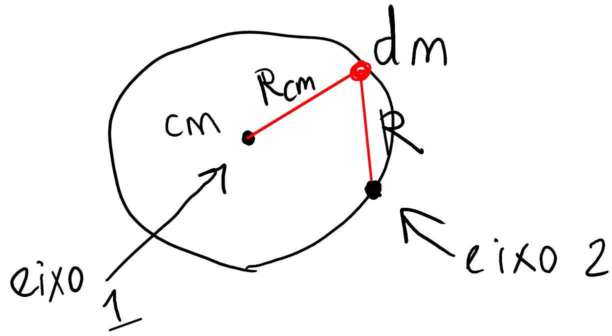
$I_z = m\, r_g^2 \qquad r_g$ = raio de giração

neste caso $r_g = \dfrac{r}{\sqrt{2}}$

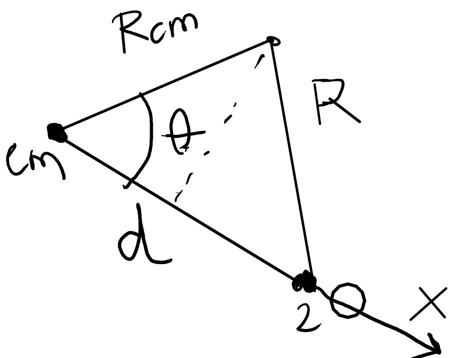
Teorema dos eixos paralelos



plano de rotação



$$I_{cm} = \int_{corpo} R_{cm}^2 \, dm \qquad I_2 = \int_{corpo} R^2 \, dm$$



lei dos cossenos

$$R^2 = d^2 + R_{cm}^2 - 2 d R_{cm} \cos\theta$$

$$I_2 = \underbrace{\int_{corpo} d^2 \, dm}_{m d^2} + \underbrace{\int_{corpo} R_{cm}^2 \, dm}_{I_{cm}} - \int_{corpo} 2d \underbrace{R_{cm} \cos\theta}_{x \text{ (com origem no cm)}} dm$$

$$-2d \underbrace{\int_{corpo} x \, dm}_{x_{cm} \text{ (com origem no cm)} = 0}$$

$$\vec{r}_{cm} = \int \vec{r} \, dm = \left(\int x \, dm\right) \hat{\imath} + \dots$$

$$\boxed{I_2 = I_{cm} + m d^2}$$

$$m d^2 > 0$$

I_z é mínimo quando o eixo z passa pelo cm.

Sumário (mov. do corpo rígido)

① equilíbrio: $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$, $\sum M_P(\vec{F}_{ext}) = 0$

qualquer ponto

② aceleração linear sem rotação

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_{cm} \quad , \quad \sum M_{cm}(\vec{F}_{ext}) = 0$$

em outros pontos $\neq 0$

③ rotação com eixo fixo

$$\sum M_z(\vec{F}_{ext}) = I_z \alpha$$

fora do eixo

⋮ (capítulo 8)