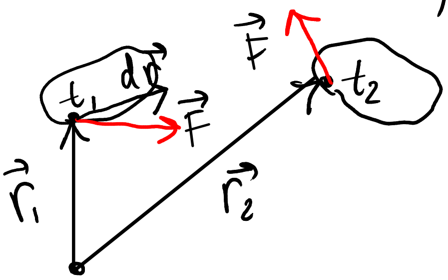
aula 13. 19 de abril

TRABALHO

trabalho realizado por uma força externa $\vec{F}$



$$W_{12}(\vec{F}) = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

← trajetória

integral de linha ao longo da trajetória.

Exemplo 6.2. Uma partícula desloca-se no plano xy, desde $(0,0)$ até $(1,1)$, sob a ação de uma força

$$\vec{F} = (3x+y)\,\hat{\imath} \quad \text{(depende da posição)}$$

determine o trabalho de $\vec{F}$ se a trajetória for:

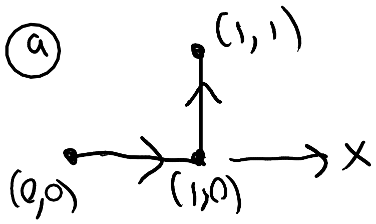
(a) segmento de reta de $(0,0)$ até $(1,0)$ seguido do segmento de $(1,0)$ até $(1,1)$

(b) Segmento de reta de $(0,0)$ até $(1,1)$

(c) Segmento de $(0,0)$ até $(0,1)$, seguido do segmento desde $(0,1)$ até $(1,1)$

Resolução:

(a)



$(0,0) \xrightarrow{x} (1,0)$: $\vec{r} = x\hat{\imath}$ ← 1 parâmetro

$(y=0)$ $\quad d\vec{r} = \hat{\imath}\,dx$

$$\Rightarrow \vec{F} = 3x\,\hat{\imath} \rightarrow \int_0^1 3x\,dx = \frac{3}{2}$$

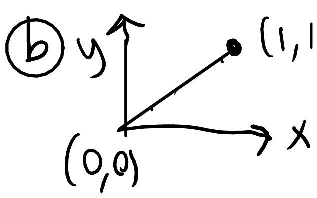
$(1,0) \rightarrow (1,1)$: $\vec{r} = 1\hat{\imath} + y\hat{\jmath} \Rightarrow d\vec{r} = \hat{\jmath}\,dy$

$(x=1)$

$$\vec{F} = (3+y)\,\hat{\imath} \qquad \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$$

$$W_{12}(\vec{F}) = \frac{3}{2}$$

(b)



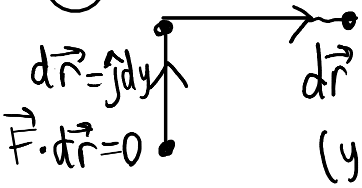
$\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath}$ $\quad (x=y)$ $\quad$ 1 parâmetro (x ou y)

$$0 \le x \le 1 \Rightarrow \vec{r} = (\hat{\imath}+\hat{\jmath})\,x \qquad d\vec{r} = (\hat{\imath}+\hat{\jmath})\,dx$$

$\vec{F} = 4x\,\hat{i}$, $\vec{F}\cdot d\vec{r} = 4x\,\hat{i}\cdot(\hat{i}+\hat{j})dx = 4x\,dx$

$$W_{12}(\vec{F}) = \int_0^1 4x\,dx = 2$$

(c)

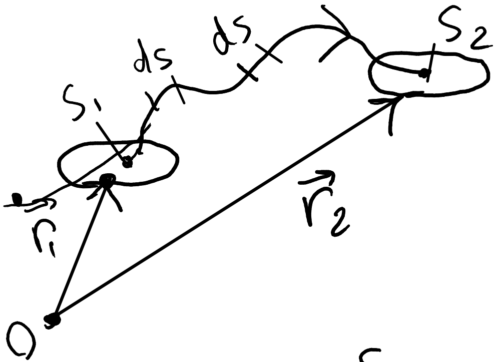


$d\vec{r} = \hat{i}dx \rightarrow \vec{F}\cdot d\vec{r} = (3x+1)\hat{i}\cdot(\hat{i}\,dx)$

$(y=1)$

$$W_{12}(\vec{F}) = \int_0^1 (3x+1)\,dx = \frac{3}{2}+1 = \frac{5}{2}$$

Corpo rígido em translação



$\vec{F}_{res.} = m\vec{a}$ ← qualquer ponto no corpo

$d\vec{r} = \vec{v}\,dt = v\,\hat{e}_t\,dt = \hat{e}_t\,ds$

$\left(\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}\right)$ $\left(v = \frac{ds}{dt}\right)$

$a_t = v\frac{dv}{ds}$

$$\Rightarrow W_{12}(\vec{F}_{res}) = \int_{S_1}^{S_2} m\vec{a}\cdot\hat{e}_t\,ds = \int_{S_1}^{S_2} m a_t\,ds = m\int_{v_1}^{v_2} v\,dv$$

$$\boxed{W_{12}(\vec{F}_{res}) = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2}$$ teorema do trabalho e a energia cinética

$E_c = \frac{1}{2}mv^2$ = energia cinética

> O trabalho realizado pela força resultante é igual ao aumento da energia cinética.

Unidade SI de trabalho ou energia.

$$1\,J\ (\text{joule}) = 1\ N\cdot m = 1\ \frac{kg\cdot m^2}{s^2}$$ ← massa x veloc.^{2}

$$\vec{F}_{res} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{ext_i} \Rightarrow W_{12}(\vec{F}_{res}) = \sum_{i=1}^{n} W_{12}(\vec{F}_{ext_i})$$

Algumas forças nunca realizam trabalho:

(i) Reação normal. $\vec{R}_n = R_n \hat{e}_n$ $\quad \vec{R}_n \cdot d\vec{r} = (R_n ds)\cancel{\hat{e}_n \cdot \hat{e}_t}^{\,0}$

(ii) Força de atrito estático. $d\vec{r} = \vec{v}\,dt$

← ponto onde atua $\vec{F}$

neste caso: $\vec{v} = \vec{0}$

FORÇAS CONSERVATIVAS.

$\vec{F}$ é conservativa se $W_{12}(\vec{F})$ não depende da trajetória entre $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$

(depende apenas de $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$)

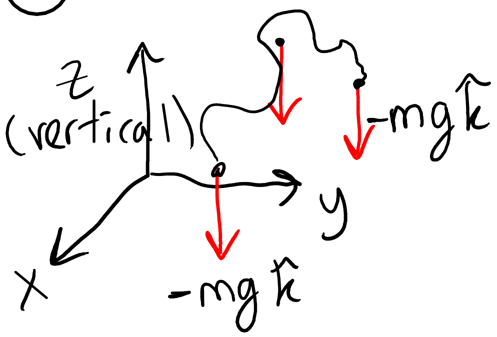
No exemplo 6.2, $\vec{F}$ não é conservativa.

É possível definir energia potencial:

$$U(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

← posição arbitrária onde $U(\vec{r}_0) = 0$

① Peso.



$$\vec{F} = -mg\hat{k}$$

$$d\vec{r} = dx\,\hat{\imath} + dy\,\hat{\jmath} + dz\,\hat{k}$$

$$\vec{F}\cdot d\vec{r} = -mg\,dz$$

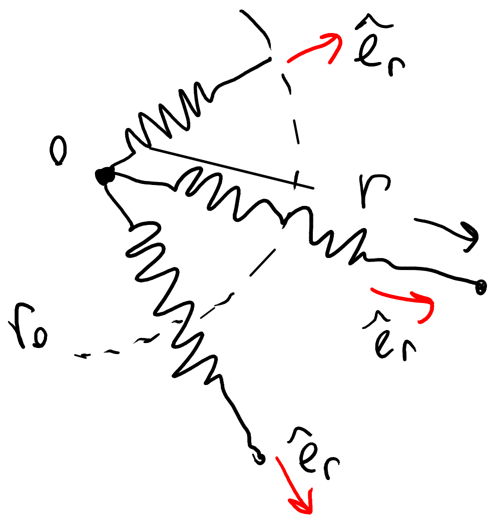
diferença de alturas

$$W_{12}(\vec{F}) = -mg\int_{z_1}^{z_2} dz = mg(z_1 - z_2)$$

$z_0 = 0$ $$\Rightarrow U_g(z) = -\int_0^z \vec{F}\cdot d\vec{r} = +mg\int_0^z dz = mgz$$

energia potencial gravítica $= U_g =$ peso $\times$ altura

② Força elástica (mola)



r_0 = comprimento "normal" da mola

se $r > r_0 \Rightarrow$ força elástica

$$\vec{F}_e = -k(r - r_0)\,\hat{e}_r$$

$\hat{e}_r$ = versor radial

$k > 0$ (constante elástica)

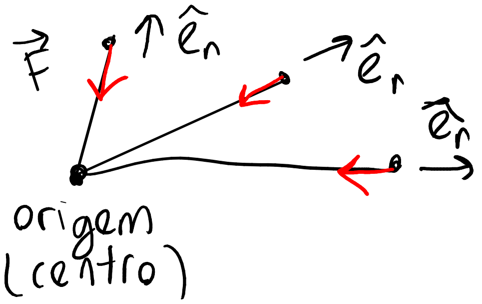
$$\vec{F}\cdot d\vec{r} = -k(r - r_0)\,\hat{e}_r\cdot(\hat{e}_r\,dr) = -k(r - r_0)\,dr$$

$W_{12} = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F}\cdot d\vec{r}$ (depende de r_1 e r_2)

$$U_e(r) = +\int_{r_0}^{r} k(r - r_0)\,dr$$

$$\boxed{U_e(r) = \frac{1}{2}k(r-r_0)^2}$$ $r - r_0$ = elongamento da mola

③ Forças centrais



$\vec{F}_c = f(r)\,\hat{e}_r \Rightarrow$ conservativa

$U_c(r) = -\int f(r)\,dr$ (qualquer primitiva)

$$W_{12}(\vec{F}_{conserv.}) = \int_1^2 \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^2 \vec{F}\cdot d\vec{r} - \int_0^1 \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

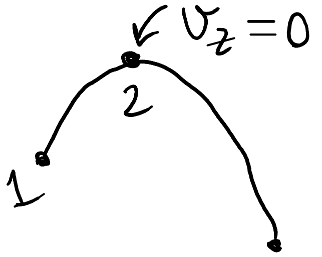
$$\uparrow \int_1^2 \rightarrow \int_0^0 + \int_0^2$$

$W_{12} = -U_2 + U_1$ = diminuição da energia potencial

<u>exemplo</u>: (6.1) Uma esfera é lançada dum prédio de 15 m de altura com velocidade:

$$\vec{v}_1 = 13\hat{\imath} + 22.5\hat{\jmath} + 15\hat{k} \quad (SI)$$ $z \rightarrow$ vertical para cima

determine a altura máxima:



$\vec{F}_{res} = -mg\hat{k}$ (peso)

$v_1^2 = 13^2 + 22.5^2 + 15^2$

$v_2^2 = 13^2 + 22.5^2$

$U_1 = mg15$ $\quad U_2 = mgz_2$

$$W_{12} = \frac{m}{2}\left(v_2^2 - v_1^2\right) = \frac{m}{2}\left(-15^2\right)$$

$$W_{12} = -U_2 + U_1 = mg\left(-z_2 + 15\right)$$

$$z_2 = 15 + \frac{15^2}{2g} = 26.48\ m$$