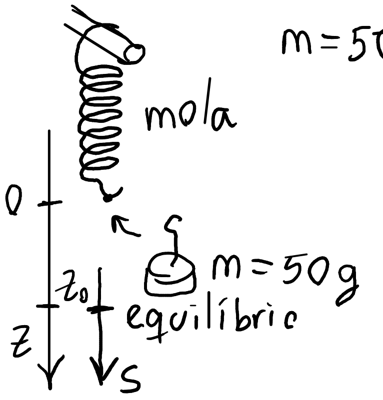
aula 15. 26 de abril

OSCILADOR HARMÓNICO SIMPLES



$m = 50g \longrightarrow z_0 = 17.5$ cm (alongamento da mola)

$$k = \frac{mg}{z_0} = 2.8\ \frac{N}{m}$$

$$U = \underbrace{-mgz}_{\text{gravítica}} + \underbrace{\frac{1}{2}kz^2}_{\text{elástica}} \qquad (F_e = -kz)$$

$$U = \frac{1}{2}k\left(z^2 - \frac{2mg}{k}z\right) = \frac{1}{2}k\left(z^2 - 2z_0 z + z_0^2\right) - \frac{1}{2}kz_0^2$$

$$\boxed{U = \frac{1}{2}ks^2} + \text{constante}$$

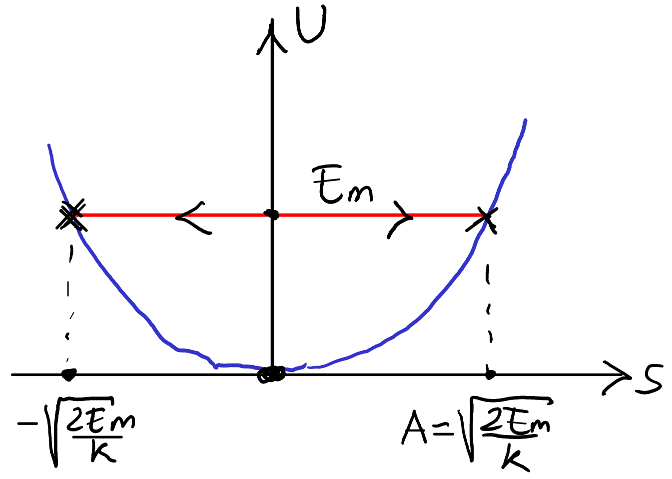
onde $s = z - z_0$
($s=0$ na posição de equilíbrio)

$$F_t = -\frac{dU}{ds} \qquad \Rightarrow \qquad m a_t = -ks$$

Possíveis movimentos

possíveis valores de E_m

$$E_m = \frac{1}{2}ks^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

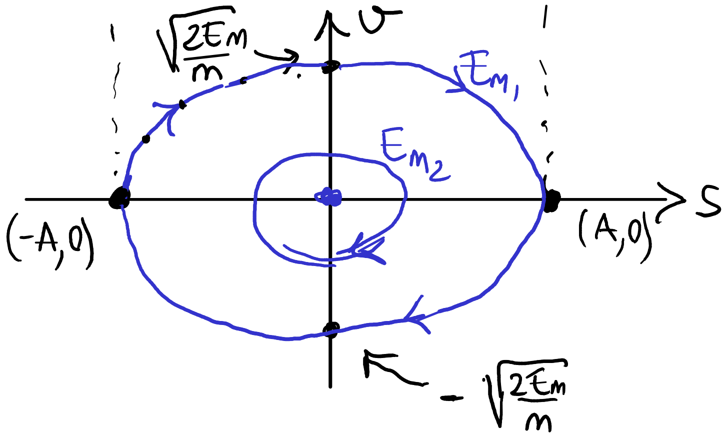


ESPAÇO DE FASE

plano (s, v)

estado do sistema num instante t é $(s(t), v(t))$

um ponto no espaço de fase

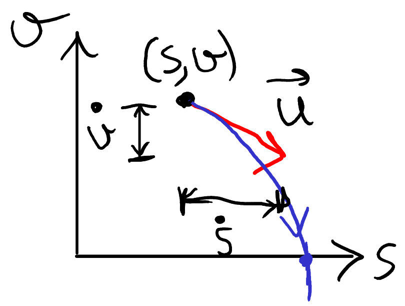


Curva de evolução: curva que segue o estado, no espaço de fase, em função do tempo.

Neste caso: elipse $\dfrac{k}{2E_m}s^2 + \dfrac{m}{2E_m}v^2 = 1$

VELOCIDADE DE FASE

$\vec{u}$ = deslocamento do estado, no espaço de fase, por unidade de tempo



$$\vec{u} = (\dot{s}, \dot{v}) = (v, a_t)$$

Neste caso: $\vec{u} = \left(v, -\dfrac{k}{m}s\right)$

Mudança de variável: $y^2 = \dfrac{m}{k}v^2$

curvas de evolução: $\dfrac{k}{2E_m}s^2 + \dfrac{m}{2E_m}v^2 = 1$

$$\Rightarrow \quad \frac{k}{2E_m}\left(s^2 + y^2\right) = 1$$

$$\boxed{s^2 + y^2 = A^2}$$

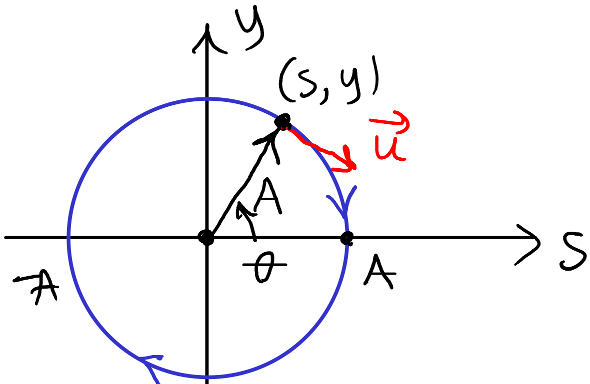
$A = \sqrt{\dfrac{2E_m}{k}}$ = amplitude de oscilação

circumferência de raio A.

$$\vec{u}: \begin{cases} \dot{s} = v = \sqrt{\dfrac{k}{m}}\,y \\ \dot{y} = \dfrac{dy}{dv}\dfrac{dv}{dt} = \sqrt{\dfrac{m}{k}}\,a_t = \sqrt{\dfrac{m}{k}}\left(-\dfrac{k}{m}s\right) = -\sqrt{\dfrac{k}{m}}\,s \end{cases}$$

$$\Omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \text{velocidade angular}$$

$\vec{u} = (\Omega y, -\Omega s)$
perpendicular ao estado
(s, y)



$$|\vec{u}| = \Omega\sqrt{y^2 + s^2} = \Omega A = \text{constante}$$

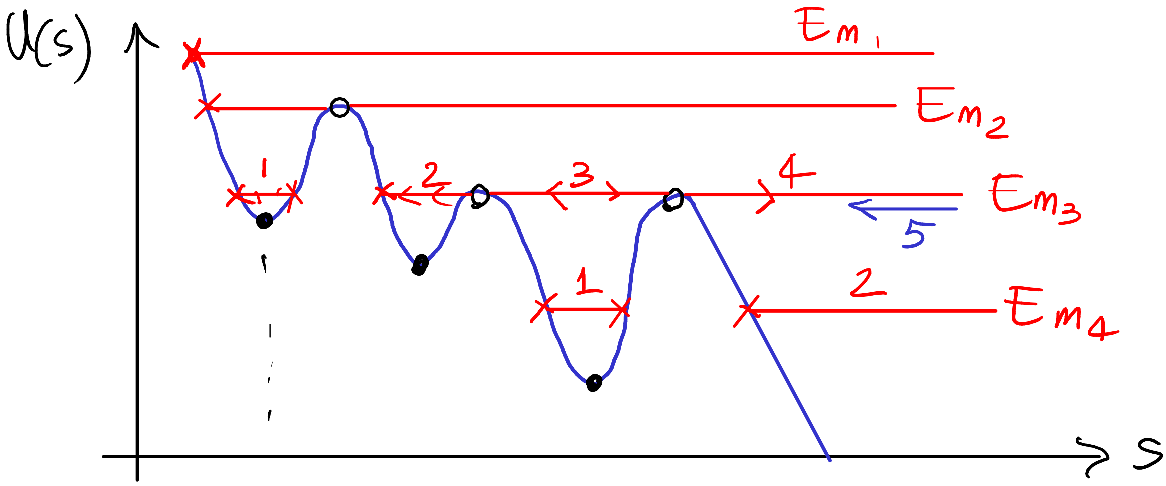
Movimento circular uniforme, com raio $A = \sqrt{\frac{2E_m}{k}}$
e velocidade angular $\Omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

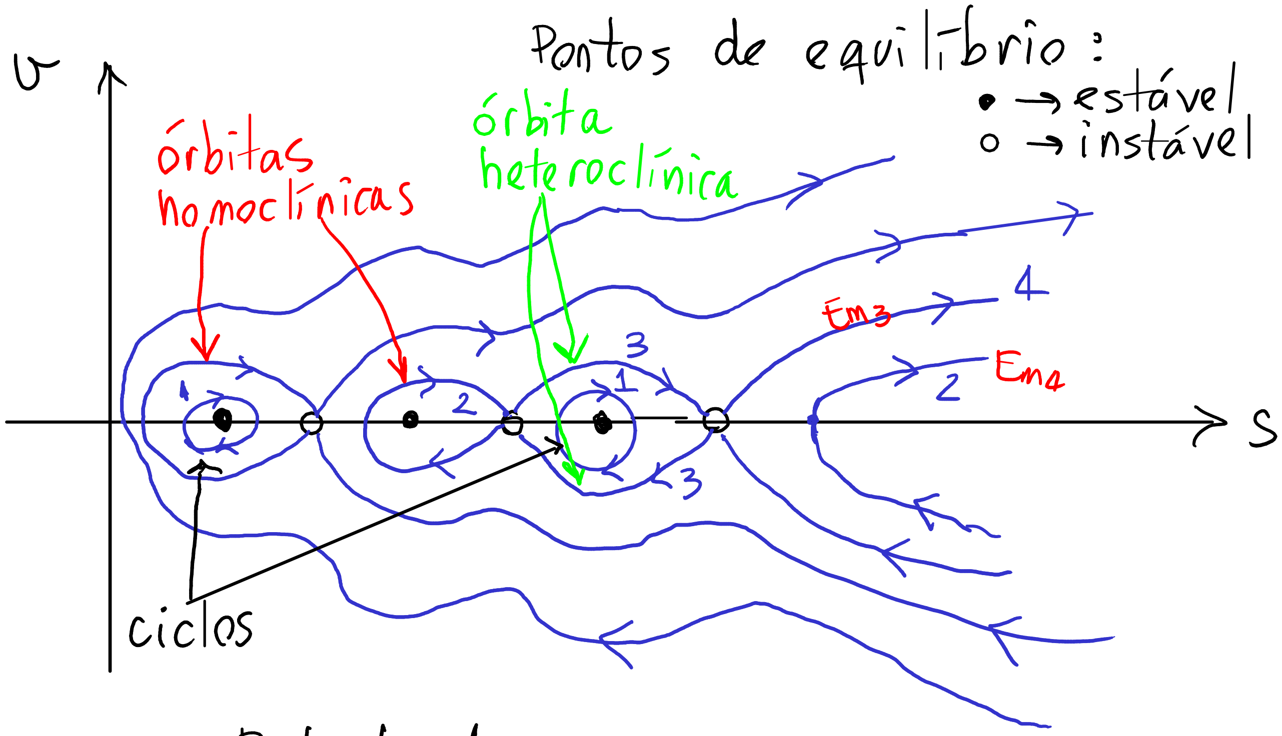
Se em $t=0$, $\theta = 0$ $\Rightarrow$ $\boxed{\theta(t) = -\Omega t}$

$$\begin{cases} s(t) = A\cos\theta \\ y(t) = A\sin\theta \end{cases}$$
$(v = \Omega y)$

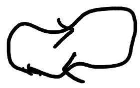
$$\boxed{\begin{aligned} s(t) &= A\cos(\Omega t) \\ v(t) &= -A\Omega\sin(\Omega t) \end{aligned}} \quad v = \dot{s}$$

SISTEMAS CONSERVATIVOS





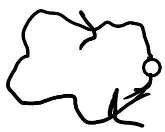
Retrato de fase

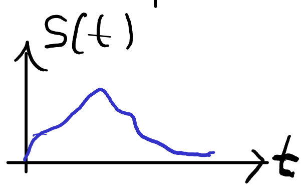


CICLO. Curva fechada no espaço de fase (oscilação)

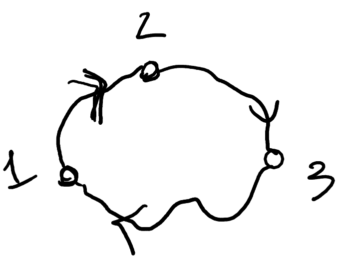
ÓRBITA HOMOCLÍNICA. Curva fechada com um ponto de equilíbrio instável

oscilação que não se repete





ÓRBITA HETEROCLÍNICA. Curva fechada com dois ou mais pontos de equilíbrio instável



3 movimentos diferentes