SISTEMAS AUTÓNOMOS

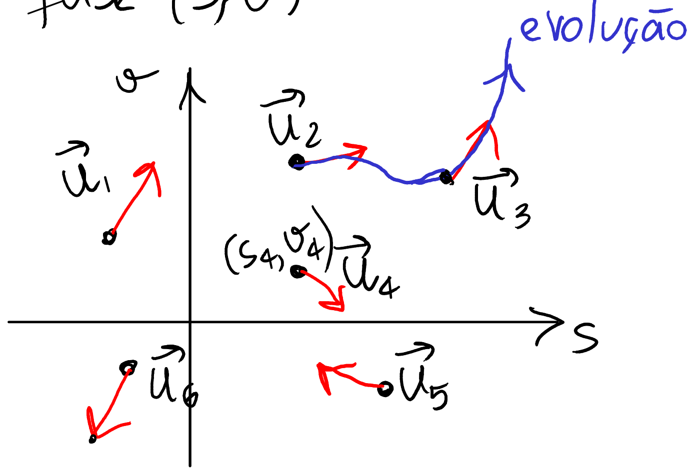
A força resultante não depende de t.

$$F_t = f(s, v) \quad \text{(expressão das variáveis do espaço de fase)}$$

a evolução a partir dum estado inicial (s_0, v_0), será igual independentemente do instante t em que ocorre esse estado.

Campo de direções

campo vetorial $\vec{u}$ (velocidade de fase) no plano de fase (s, v)



$$\vec{u} = (\dot{s}, \dot{v}) = (v, a_t)$$

$$a_t = \frac{F_t}{m} = \frac{f(s,v)}{m}$$

$$\vec{u} = \left(v, \frac{f(s,v)}{m}\right)$$

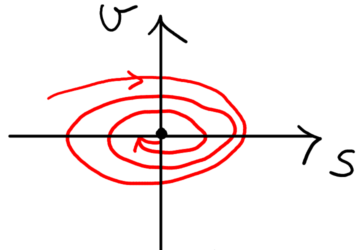
Maxima: Programa plotdf (Plot Direction Field)

$$\text{plotdf}([v, f(s,v)/m], [s, v], [s, s_{mín}, s_{máx}], [v, v_{mín}, v_{máx}]);$$

Exemplo. Oscilador harmónico simples, com $k = 28\ \frac{N}{m}$, $m = 0.05$ kg, com resistência do ar de constante aerodinámica $C = 0.015\ \frac{N \cdot s^2}{m^2}$

$$F_t = F_{gte} + F_r = -ks - C|v|v$$

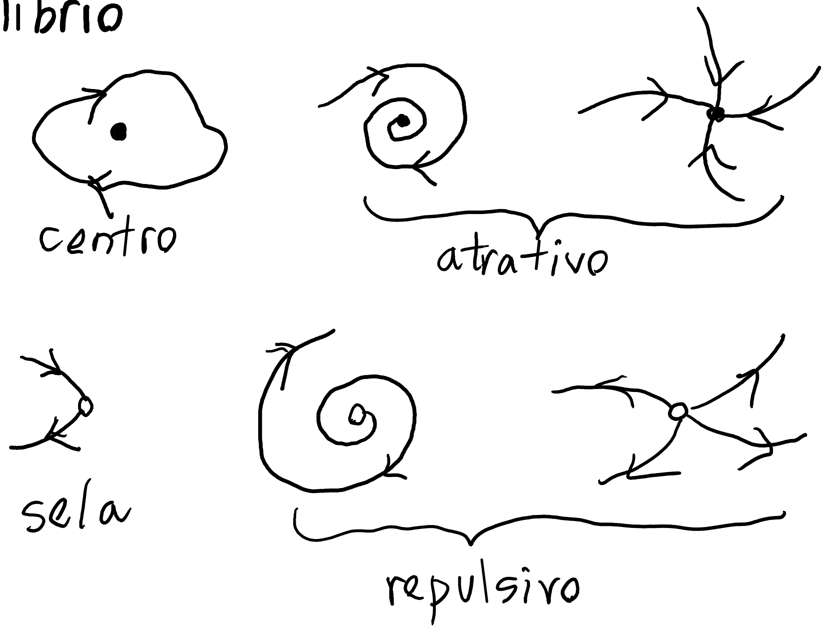
$$a_t = -\frac{(ks + C|v|v)}{m}$$



(Maxima)

Pontos de equilíbrio

- estável
- instável



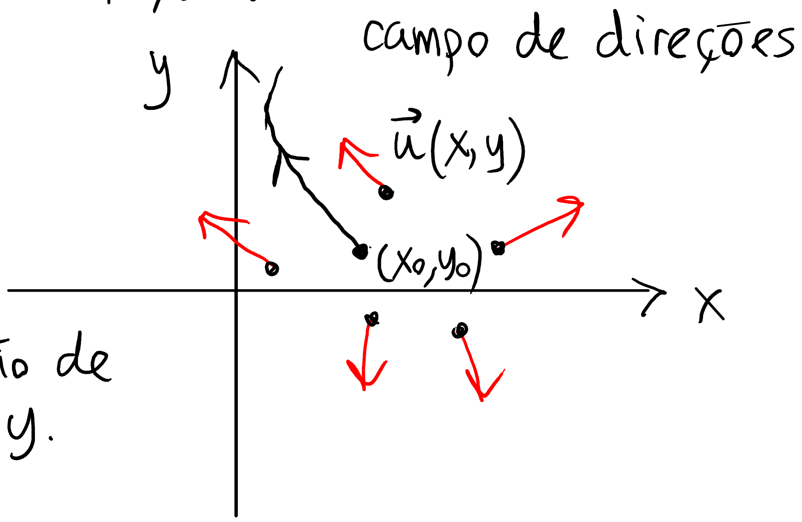
SISTEMAS DINÂMICOS AUTÓNOMOS

Duas variáveis de estado: $x(t)$, $y(t)$ (funções contínuas de t)

+ Duas equações de evolução:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases}$$

$\vec{u} = (f, g)$ função de x e y.



Pontos de equilíbrio

onde o estado (x, y) permanece fixo.

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x_e, y_e) = 0 \\ g(x_e, y_e) = 0 \end{cases}$$

Exemplo 7.2. Sistema dinâmico com equações

$$\dot{x} = 4 - x^2 - 4y^2 \qquad \dot{y} = y^2 - x^2 + 1$$

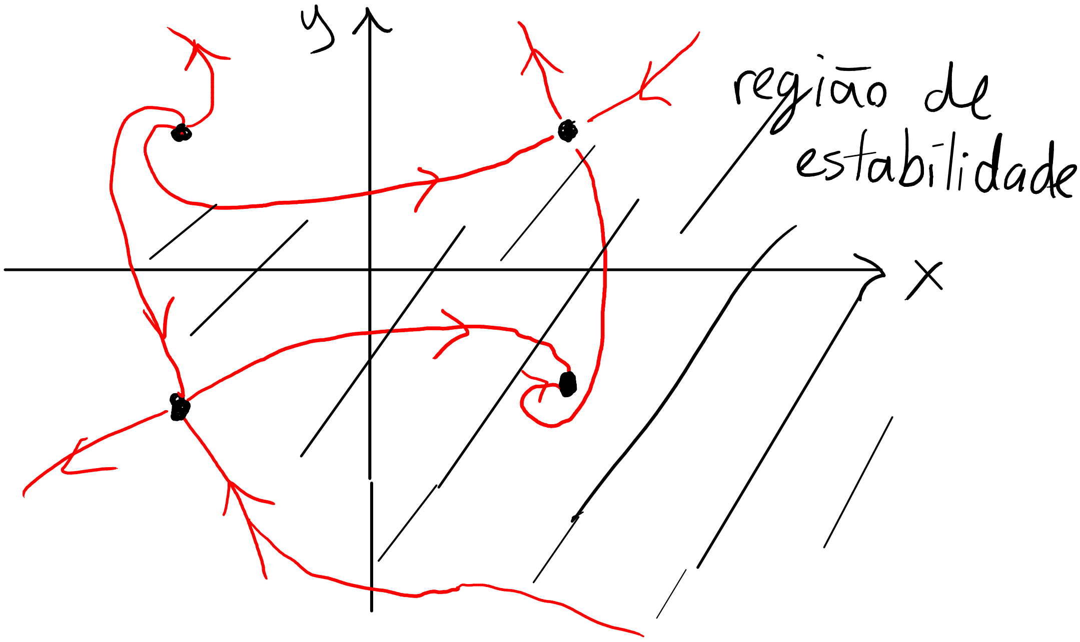
Resolução: variáveis de estado $\rightarrow (x, y)$

velocidade de fase $\rightarrow \quad \vec{u} = (4 - x^2 - 4y^2, y^2 - x^2 + 1)$

pontos de equilíbrio $\rightarrow \begin{cases} 4 - x^2 - 4y^2 = 0 \\ y^2 - x^2 + 1 = 0 \end{cases}$

Maxima:

4 pontos ; 2 pontos de sela, 1 ponto atrativo e 1 ponto repulsivo



Equações diferenciais autónomas de 2ª ordem

$\frac{d^2x}{dt^2} = f\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$ com condições iniciais $x(t_0)$, $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=t_0}$

Exemplo: equação de movimento dum sistema mecânico $\quad a_t = f(s, v) \Leftrightarrow \ddot{s} = f(s, \dot{s})$

em geral:

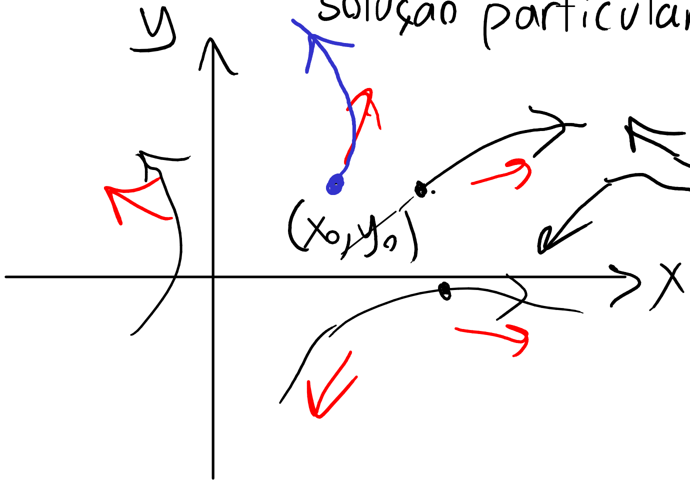
$$\ddot{x} = f(x, \dot{x})$$

para torna-lo sistema dinâmico, define-se outra variável $y(t)$ $\quad (y = \dot{x} \Rightarrow \dot{y} = \ddot{x})$

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = f(x, y) \end{cases} \Rightarrow \vec{u} = (y, f) \text{ no plano de fase } (x, y)$$

solução = curva de evolução que passa pelo ponto $\left(x_0, y_0 = \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t_0}\right)$ (cond. iniciais)

solução particular



solução geral da equação diferencial (curvas de evolução)

Retrato de fase: gráfico que mostra as curvas de evolução

$\hookrightarrow$ solução geral