aula 17. 3 de maio

SISTEMAS CONSERVATIVOS

Corpo rígido com translação, sem rotação

$$E_m = \frac{1}{2} m v^2 + U(s)$$

se $W_{12}(\text{não cons.}) = 0 \Rightarrow E_m = \text{constante}$

$$\frac{dE_m}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dE_m}{dt} = \frac{\partial E_m}{\partial v}\frac{dv}{dt} + \frac{\partial E_m}{\partial s}\frac{ds}{dt} = 0$$

$$m v \dot{v} + \frac{dU}{ds}\dot{s} = m v \dot{v} - m a_t v = 0$$

$\dot{v}$

Função hamiltoniana.

$-F_t = -m\dot{v}$

$$H(s,v) = \frac{E_m}{m} \qquad \frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial s}\dot{s} + \frac{\partial H}{\partial v}\dot{v} = \frac{1}{m}\frac{dU}{ds}\dot{s} + v\dot{v} = 0$$

Equações de Hamilton

$$\begin{cases} \dot{s} = \dfrac{\partial H}{\partial v} \\ \dot{v} = -\dfrac{\partial H}{\partial s} \end{cases}$$

equações de evolução

curvas de evolução: $H(s,v) = \text{constante}_i$

Em geral, qualquer função $H(x,y)$ (contínua) define um sistema dinâmico:

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{\partial H}{\partial y} \\ \dot{y} = -\dfrac{\partial H}{\partial x} \end{cases}$$

(equações de Hamilton)

curvas de evolução $\rightarrow$ $H(x,y) = \text{constante}$ (curvas de nível de H)

observe-se: $\dfrac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \dfrac{\partial \dot{y}}{\partial y} = \dfrac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial^2 H}{\partial y \partial x} = 0$ (divergência de $\vec{u}$)

Um sistema dinâmico com variáveis de estado x e y é conservativo se, e só se, $\frac{d\dot{x}}{dx} + \frac{d\dot{y}}{dy} = 0$
(a divergência da velocidade de fase é nula)

Exemplo. Sistema $\dot{x} = -2y$, $\dot{y} = -2x$

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(-2y) + \frac{\partial}{\partial y}(-2x) = 0 + 0 = 0 \rightarrow \text{conservativo}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial H}{\partial y} = -2y & \rightarrow \quad -2\int y\, dy + k(x) = H \\ \frac{\partial H}{\partial x} = 2x & \end{cases}$$

$$H = -y^2 + k(x)$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} = 0 + \frac{dk}{dx} = 2x$$

$$\rightarrow k = \int 2x\, dx + \text{constante} \qquad k = \frac{2x^2}{2} = x^2$$

$$H(x,y) = x^2 - y^2$$

curvas de evolução = curvas de nível de H

MECÂNICA LAGRANGIANA

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 \rightarrow \frac{\partial E_c}{\partial v} = mv \rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial v}\right) = \frac{d(mv)}{dt} = F_t$$

$$\frac{\partial U}{\partial s} = -F_t \rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial v}\right) + \frac{\partial U}{\partial s} = 0$$

em geral, com n graus de liberdade:

n coordenadas generalizadas $\rightarrow q_1, q_2, \ldots, q_n$

+ n velocidades generalizadas → $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n$

$(v_i = \dot{q}_i)$

Estado do sistema → $(q_1, q_2, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n)$

espaço de fase → $\mathbb{R}^{2n}$

Energia cinética: $E_c(q_1, q_2, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n)$

Energia potencial: $U(q_1, q_2, \ldots, q_n)$

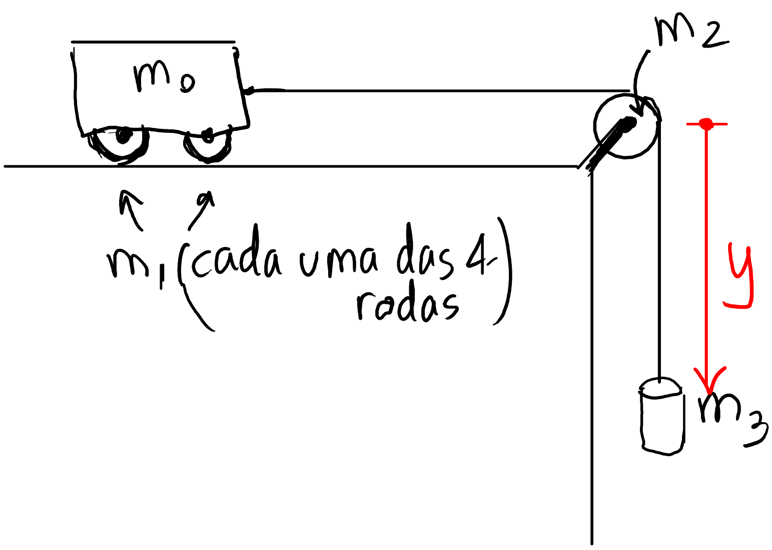
Se o trabalho das forças não conservativas for nulo

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = 0}$$

n Equações de Lagrange

$i = 1, 2, 3, \ldots, n$

Exemplo 1.



raios de giração:

roldana → $\frac{r_2}{\sqrt{2}}$

(r_2 = raio da roldana)

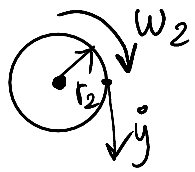
rodas → $\frac{\sqrt{3}}{2} r_1$

(r_1 = raio das rodas)

as rodas não deslizam na mesa horizontal e o fio não desliza na roldana ⟹ um único grau de liberdade (y = altura do cilindro) duas variáveis de estado $(y, \dot{y})$

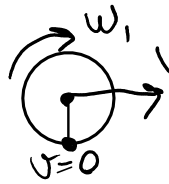
cilindro: $v_3 = \dot{y}$ carrinho: $v_0 = \dot{y}$

roldana:



$v_2 = 0$ $\quad \omega_2 = \dfrac{\dot{y}}{r_2}$ $\quad I_2 = \dfrac{m_2}{2} r_2^2$

rodas:



$v_1 = \dot{y}$ $\quad \omega_1 = \dfrac{\dot{y}}{r_1}$ $\quad I_1 = \dfrac{3m_1}{4} r_1^2$

$$E_c = \frac{m_0}{2}\dot{y}^2 + \frac{m_3}{2}\dot{y}^2 + \overset{2}{\cancel{4}}\left(\frac{m_1}{\cancel{2}}\dot{y}^2\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{m_2}{2}\cancel{r_2^2}\right)\frac{\dot{y}^2}{\cancel{r_2^2}} + \frac{\cancel{4}}{2}\left(\frac{3m_1}{\cancel{4}}\cancel{r_1^2}\right)\frac{\dot{y}^2}{\cancel{r_1^2}}$$

$$E_c = \left(\frac{m_0}{2} + \frac{m_3}{2} + 2m_1 + \frac{m_2}{4} + \frac{3}{2}m_1\right)\dot{y}^2$$

$$= \left(\frac{m_0}{2} + \frac{7}{2}m_1 + \frac{m_2}{4} + \frac{m_3}{2}\right)\dot{y}^2$$

$U = -m_3 g y$ (+ constantes)

Desprezando o atrito nos eixos das rodas e da roldana, e a resistência do ar,

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial \dot{y}} = \left(m_0 + 7m_1 + \frac{m_2}{2} + m_3\right)\dot{y} \qquad \frac{\partial E_c}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = -m_3 g$$

$$\left(m_0 + 7m_1 + \frac{m_2}{2} + m_3\right)\ddot{y} - m_3 g = 0$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{y} = \frac{m_3}{m_0 + 7m_1 + \frac{m_2}{2} + m_3}\, g$$

(constante)

$(\ddot{y} > 0)$