aula 18. 5 de maio

FORÇAS NÃO CONSERVATIVAS

$\vec{F}_j$ (não conservativa) aplicada em $\vec{r}_j$

cada coordenada generalizada, q_i, desloca-se para $q_i + \delta q_i$ (δq_i = deslocamento virtual) e que vai implicar $\vec{r}_j \to \vec{r}_j + \delta\vec{r}_j$

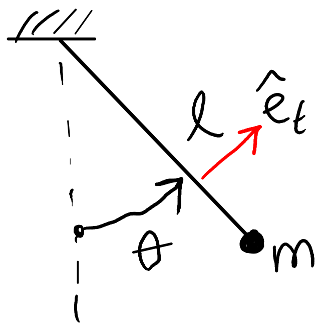
produzindo um trabalho virtual $\vec{F}_j \cdot \delta\vec{r}_j$

Força generalizada: $$Q_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\vec{F}_j \cdot \delta\vec{r}_j}{\delta q_i} \quad (i=1,\ldots,n)$$

Equações de Lagrange

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = Q_i} \quad i=1,2,\ldots,n$$

Exemplo 8.5. Pêndulo simples com resistência do ar proporcional ao quadrado da velocidade.



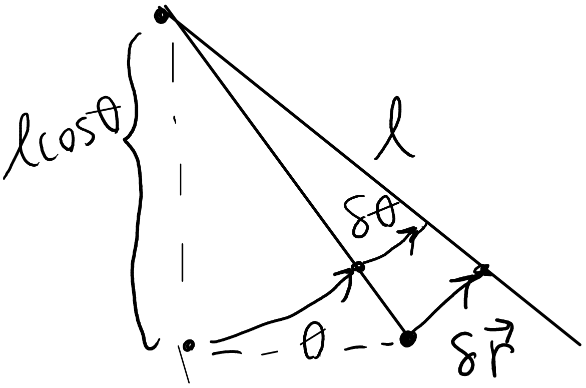
um único grau de liberdade, $\theta(t)$

estado $\to (\theta, \dot{\theta})$

$$\vec{F}_r = -C|\vec{v}|\,\vec{v}$$

$$\vec{v} = \ell\dot{\theta}\hat{e}_t \quad \Rightarrow \vec{F}_r = -C\ell^2|\dot{\theta}|\,\dot{\theta}\,\hat{e}_t$$

C = constante aerodinâmica



$$Q_\theta = \frac{\vec{F}_r \cdot \delta \vec{r}}{\delta\theta}$$

$$\delta\vec{r} = l\,\delta\theta\,\hat{e}_t$$

$$\Rightarrow Q_\theta = -\frac{c\,l^3|\dot\theta|\dot\theta\,\delta\theta}{\delta\theta}$$

$$E_c = \frac{1}{2}m\left(l^2\dot\theta^2\right) \qquad U = -mgl\cos\theta$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial\dot\theta}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial\theta} + \frac{\partial U}{\partial\theta} = Q_\theta$$

$$ml^2\ddot\theta - 0 + mgl\sin\theta = -cl^3|\dot\theta|\dot\theta$$

$$\boxed{\ddot\theta = -\frac{g}{l}\sin\theta - \frac{cl}{m}|\dot\theta|\dot\theta}$$ equação de movimento

FORÇAS DE LIGAÇÃO

$n+1$ coordenadas: $q_1, q_2, \dots, q_{n+1}$

+ equação de ligação: $f(q_1, q_2, \dots, q_{n+1}) = \text{constante}$

$\Downarrow$

permite eliminar q_{n+1} (função de $q_1, \dots, q_n$) ficando com n graus de liberdade.

Força generalizada associada à força de ligação que produz $f = $ constante força de ligação: $\vec{\lambda}$ $\longrightarrow$ $\underset{(\text{ligação})}{Q_i} = \dfrac{\vec{\lambda}\cdot\delta\vec{r}}{\delta q_i} = \lambda \dfrac{\partial f}{\partial q_i}$

Equações de Lagrange:

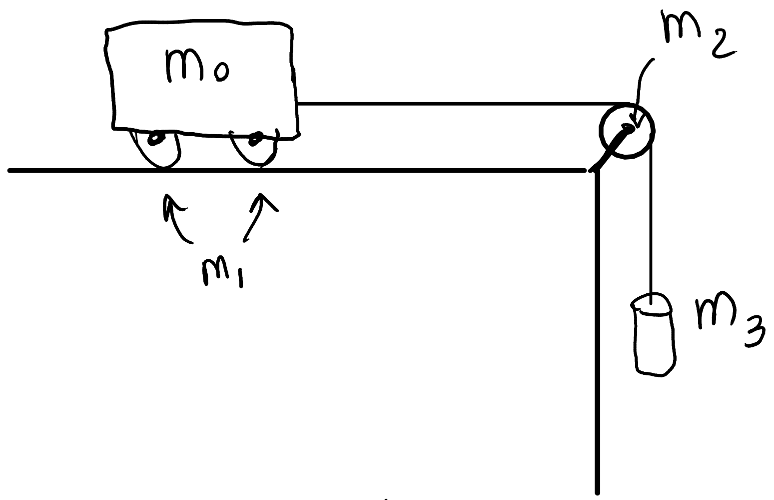
$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} - \lambda\frac{\partial f}{\partial q_i} = Q_i} \quad i=1,2,\ldots,n+1$$

λ = multiplicador de Lagrange

resolvem-se junto com: $f(q_1,\ldots,q_n) = \text{constante}$

$(\dot{f}=0,\ \ddot{f}=0)$ $\leftarrow \ddot{q}_i$

Exemplo.



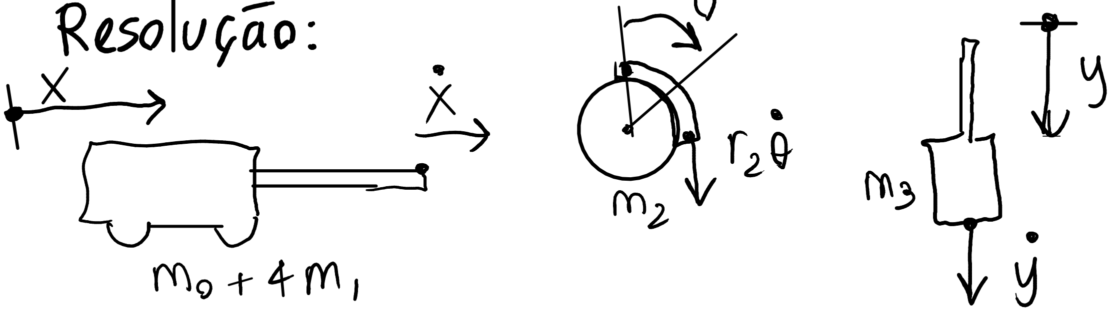
raios de giração:

$r_{g_1} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} r_1$

$r_{g_2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} r_2$

Determine a tensão no fio

Resolução:



3 variáveis: x, y, θ $\quad (\dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta})$

2 equações de ligação

$$\begin{cases} \dot{x} = r_2 \dot{\theta} \\ \dot{y} = r_2 \dot{\theta} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - r_2\theta = \text{constante} \\ y - r_2\theta = \text{constante} \end{cases} \quad \begin{cases} f_1 = x - r_2\theta \\ f_2 = y - r_2\theta \end{cases}$$

dois multiplicadores de Lagrange: λ_1, λ_2
(tensões no fio)

3 equações de Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial x} - \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} - \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial y} - \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} - \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial \theta} + \frac{\partial U}{\partial \theta} - \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial \theta} - \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial \theta} = 0$$

$$E_c = \frac{1}{2}(m_0 + 4m_1)\dot{x}^2 + 2\left(\frac{3}{4}m_1 r_1^2\right)\frac{\dot{x}^2}{r_1^2} + \frac{1}{4}m_2 r_2^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_3 \dot{y}^2$$

$$U = -m_3 g y$$

As 3 equações de Lagrange, junto com as duas equações $\ddot{f}_1 = 0$, $\ddot{f}_2 = 0$, podem ser resolvidas no Maxima para determinar $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{\theta}$, λ_1 e λ_2. Há que usar o comando gradef para definir que vx é derivada de x em ordem ao tempo, etc.

```
(%i1) gradef(x,t,vx)$
(%i2) gradef(y,t,vy)$
(%i3) gradef(q,t,w)$
(%i4) gradef(vx,t,ax)$
(%i5) gradef(vy,t,ay)$
(%i6) gradef(w,t,a)$
(%i7) Ec: expand((m0+4*m1)*vx^2/2 + 2*3*m1*vx^2/4 + m2*r2^2*w^2/4 + m3*vy^2/2);
                             2  2         2           2         2
                        m2 r2   w     m3 vy     7 m1 vx     m0 vx
(%o7)                   --------- + ------ + -------- + ------
                            4         2          2          2
(%i8) U: -m3*g*y;
(%o8)                                - g m3 y
(%i9) f1: x-r2*q;
(%o9)                                x - q r2
(%i10) f2: y-r2*q;
(%o10)                               y - q r2
(%i11) e1:diff(diff(Ec,vx),t)-diff(Ec,x)+diff(U,x)-L1*diff(f1,x)-L2*diff(f2,x)=0
;
(%o11)                     7 ax m1 + ax m0 - L1 = 0
(%i12) e2:diff(diff(Ec,vy),t)-diff(Ec,y)+diff(U,y)-L1*diff(f1,y)-L2*diff(f2,y)=0
;
(%o12)                    (- g m3) + ay m3 - L2 = 0
(%i13) e3:diff(diff(Ec,w),t)-diff(Ec,q)+diff(U,q)-L1*diff(f1,q)-L2*diff(f2,q)=0;
                                    2
                             a m2 r2
(%o13)                       -------- + L2 r2 + L1 r2 = 0
                                2
(%i14) e4: diff(f1,t,2)=0;
(%o14)                            ax - a r2 = 0
(%i15) e5: diff(f2,t,2)=0;
(%o15)                            ay - a r2 = 0
(%i16) sol: solve([e1,e2,e3,e4,e5],[ax,ay,a,L1,L2]);
                             2 g m3                               2 g m3
(%o16) [[ax = ------------------------, ay = ------------------------,
              2 m3 + m2 + 14 m1 + 2 m0        2 m3 + m2 + 14 m1 + 2 m0
                        2 g m3                         14 g m1 m3 + 2 g m0 m3
a = ------------------------------------, L1 = ------------------------,
    2 m3 r2 + m2 r2 + 14 m1 r2 + 2 m0 r2        2 m3 + m2 + 14 m1 + 2 m0
       g m2 m3 + 14 g m1 m3 + 2 g m0 m3
L2 = - --------------------------------]]
          2 m3 + m2 + 14 m1 + 2 m0
(%i17) subst(sol[1],L1);
                              14 g m1 m3 + 2 g m0 m3
(%o17)                       ------------------------
                             2 m3 + m2 + 14 m1 + 2 m0
(%i18) subst(sol[1],L2);
                         g m2 m3 + 14 g m1 m3 + 2 g m0 m3
(%o18)                 - --------------------------------
                              2 m3 + m2 + 14 m1 + 2 m0
(%i19)
```

$$\lambda_1 = \frac{(2m_0 + 14m_1)\, m_3\, g}{2m_0 + 14m_1 + m_2 + 2m_3} \qquad \lambda_2 = -\frac{(2m_0 + 14m_1 + m_2)\, m_3\, g}{2m_0 + 14m_1 + m_2 + 2m_3}$$