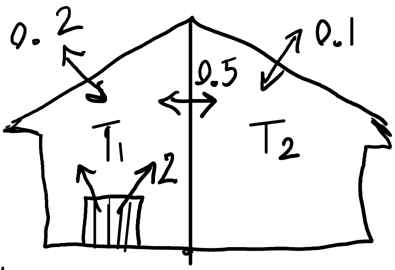
Aula 19. 10 de maio

SISTEMAS DINÂMICOS LINEARES

Exemplo 9.1.

8°C



T_1, T_2 = temperaturas

As equações de evolução para T_1 e T_2 são:

$$\dot{T}_1 = 2 - 0.2(T_1 - 8) - 0.5(T_1 - T_2)$$
$$\dot{T}_2 = -0.5(T_2 - T_1) - 0.1(T_2 - 8)$$

sistema dinâmico linear

Determine T_1 e T_2 após um tempo elevado.

Resolução.

$$\dot{T}_1 = -0.7\,T_1 + 0.5\,T_2 + 3.6$$
$$\dot{T}_2 = 0.5\,T_1 - 0.6\,T_2 + 0.8$$

$$\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} \dot{T}_1 \\ \dot{T}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.7 & 0.5 \\ 0.5 & -0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3.6 \\ 0.8 \end{bmatrix}$$

Pontos de equilíbrio ($\dot{T}_1 = 0$, $\dot{T}_2 = 0$)

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -0.7 & 0.5 \\ 0.5 & -0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3.6 \\ -0.8 \end{bmatrix}$$

sistema linear de 2 equações

matriz inversa:
(determinante $\neq 0$)

$$\frac{\begin{bmatrix} -0.6 & -0.5 \\ -0.5 & -0.7 \end{bmatrix}}{0.42 - 0.25} = \begin{bmatrix} -3.53 & -2.94 \\ -2.94 & -4.12 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3.53 & -2.94 \\ -2.94 & -4.12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3.6 \\ -0.8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15.06 \\ 13.88 \end{bmatrix}$$

$T_1 = 15.06\,°C$

$T_2 = 13.88\,°C$

Retrato de fase: plotdf([-0.7*T_1+0.5*T_2+3.6, 0.5*T_1-0.6*T_2+0.8],
(ponto de equilíbrio atrativo).   [T_1,T_2],[T_1,10,20],[T_2,10,20]);

$$\Rightarrow \lim_{t\to\infty} T_1 = 15.06°C \qquad \lim_{t\to\infty} T_2 = 13.88°C$$

Deslocamento <u>do</u> ponto de equilíbrio para origem

$$\begin{cases} x_1 = T_1 - 15.06 \\ x_2 = T_2 - 13.88 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{T}_1 \\ \dot{x}_2 = \dot{T}_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.7 & 0.5 \\ 0.5 & -0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

SISTEMAS LINEARES

$$\boxed{\frac{d\vec{r}}{dt} = A\vec{r}}$$

$(|A| \neq 0)$

$\vec{r} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ = posição no espaço de fase

$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ matriz do sistema (4 números reais)

$\boxed{\text{Têm sempre um único ponto de equilíbrio na origem}}$

velocidade de fase:

$$\vec{u} = A\vec{r} = \begin{bmatrix} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 \\ A_{21}x_1 + A_{22}x_2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{u} = \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{bmatrix}$$

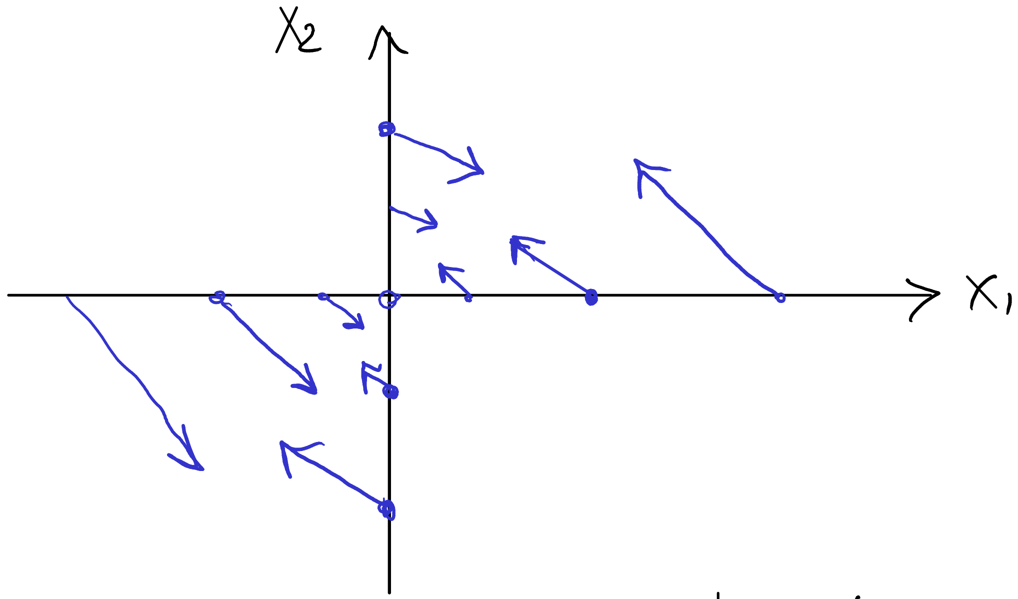
A primeira coluna de A é a velocidade de fase em (1, 0), e a segunda coluna é a velocidade de fase em (0, 1)

$\vec{u}(\vec{r}) = A\vec{r}$ k = constante real

$$\rightarrow \vec{u}(k\vec{r}) = A(k\vec{r}) = k(A\vec{r}) = k(\vec{u}(\vec{r}))$$ (mesma direção de $\vec{u}(\vec{r})$)

A direção de $\vec{u}$ é a mesma em cada reta que passa pela origem. O sentido é oposto nos dois lados da origem

no exemplo 9.1, $A = \begin{bmatrix} -0.7 & 0.5 \\ 0.5 & -0.6 \end{bmatrix}$



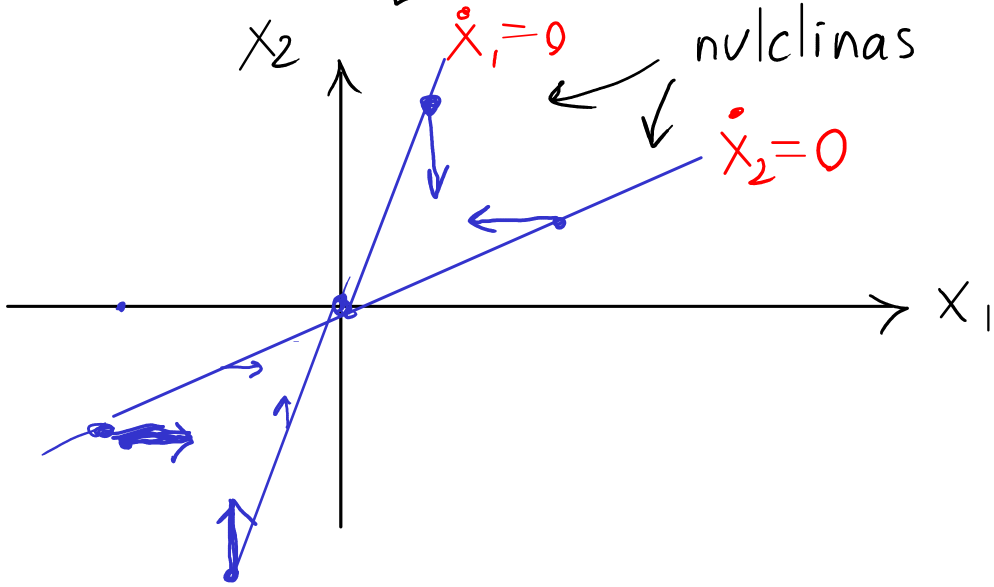
$\vec{u} = A\vec{r} \Rightarrow \vec{r} = A^{-1}\vec{u}$ (sistema linear com solução única)

Dado um vetor $\vec{v}$ no espaço $\mathbb{R}^2$, existe um único ponto $\vec{r}$ onde a velocidade de fase é igual a $\vec{v}$.

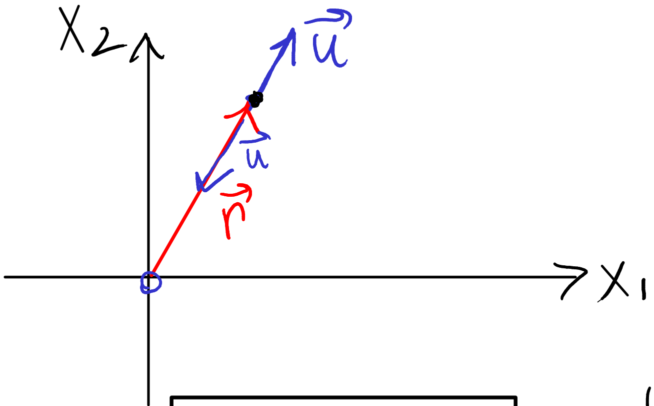
$A^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad \vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{r} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix}$

A primeira coluna da matriz inversa é a posição onde $\vec{u}=(1,0)$, e a segunda coluna é a posição onde $\vec{u}=(0,1)$ (nulclinas de $\dot{r}_2=0$ e $\dot{r}_1=0$).

No exemplo 9.1, $A^{-1} = \begin{bmatrix} -3.53 & -2.94 \\ -2.94 & -4.12 \end{bmatrix}$



"Curvas" de evolução retas.



pontos $\vec{r}$ onde $\vec{u}$ é paralela a $\vec{r}$

$$\vec{u} = \lambda \vec{r} \quad \left(\begin{array}{c}\lambda \text{ número} \\ \text{real positivo} \\ \text{ou negativo}\end{array}\right)$$

$\rightarrow$ $\boxed{A\vec{r} = \lambda\vec{r}}$ problema de valores próprios para a matriz A.

Exemplo 9.2. Encontre os valores e vetores próprios do sistema no exemplo 9.1.

Resolução:

$$\begin{bmatrix} -0.7 & 0.5 \\ 0.5 & -0.6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -0.7 & 0.5 \\ 0.5 & -0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -0.7-\lambda & 0.5 \\ 0.5 & -0.6-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

pelo menos uma solução (trivial) $x_1=0$, $x_2=0$)
se o determinante da matriz no lado esquerdo $=0$
$\Rightarrow$ infinitas soluções

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} -0.7-\lambda & 0.5 \\ 0.5 & -0.6-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (-0.7-\lambda)(-0.6-\lambda) - 0.25 = 0$$

(equação dos valores próprios λ)

$\lambda_1 = -1.152$, $\lambda_2 = -0.1475$

vetores próprios correspondentes a λ_1

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -0.7+1.152 & 0.5 \\ 0.5 & -0.6+1.152 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (-0.7+1.152)x_1 + 0.5x_2 = 0$$

variável livre

$$\Rightarrow x_2 = \underbrace{\frac{(0.7-1.152)}{0.5}}_{\text{declive}} x_1$$

(reta que passa por (0,0))