Aula 20. 12 de maio

Programa eigenvectors() do Maxima.

A: matrix ([-0.7, 0.5], [0.5, -0.6]);

$\nwarrow$ 1ª linha $\quad\nwarrow$ 2ª linha

eigenvectors(A); $\rightarrow$ duas listas $\begin{cases}\text{valores próprios + multiplicidades} \\ \text{vetores próprios}\end{cases}$

Soluções dos sistemas dinâmicos lineares.

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v} \qquad (\lambda = \text{valor próprio}, \ \vec{v} = \text{vetor próprio})$$

seja: $\vec{r} = \vec{v}e^{\lambda t} \Rightarrow \begin{cases} A\vec{r} = (A\vec{v})e^{\lambda t} = \lambda\vec{v}e^{\lambda t} = \lambda\vec{r} \\ \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \lambda\vec{v}e^{\lambda t} = \lambda\vec{r}\end{cases}$

$\Rightarrow \dfrac{d\vec{r}}{dt} = A\vec{r} \Rightarrow \vec{r} = \vec{v}e^{\lambda t}$ é solução particular do sistema.

$\lambda, \vec{v}$ complexos $\rightarrow$ $\vec{r}$ é vetor complexo

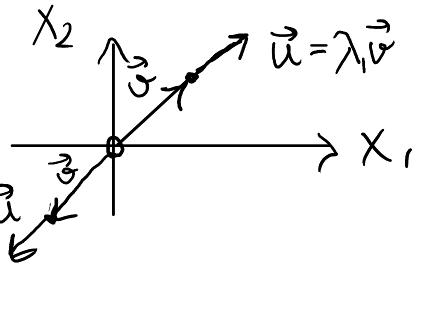
$$A\vec{r} = \mathrm{Re}(A\vec{r}) + i\,\mathrm{Im}(A\vec{r})$$
$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \mathrm{Re}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) + i\,\mathrm{Im}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)$$

$\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Re}(\vec{v}e^{\lambda t})$ é solução, $\mathrm{Im}(\vec{v}e^{\lambda t})$ é solução

$A_{2\times2} \Rightarrow \lambda$ são as raízes dum polinómio quadrático ($\lambda \neq 0$ porque $\det A \neq 0$)

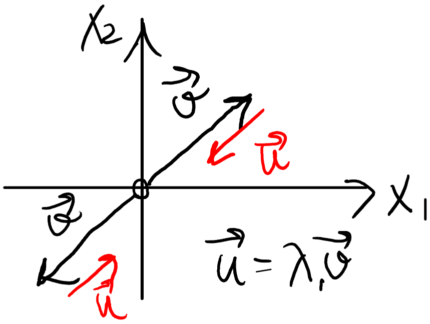
λ_1 e λ_2 reais

$\lambda_1 > 0 \quad \longrightarrow$



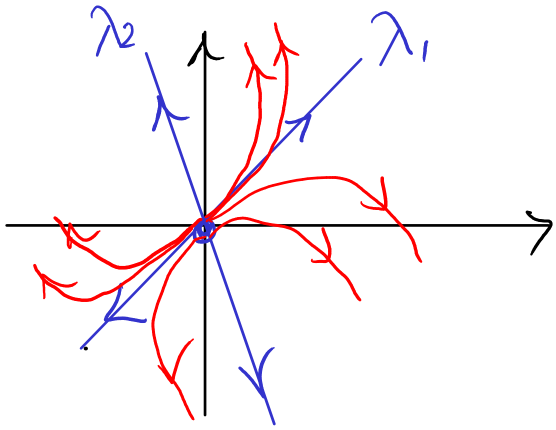
duas retas de evolução que se afastam do ponto de equilíbrio

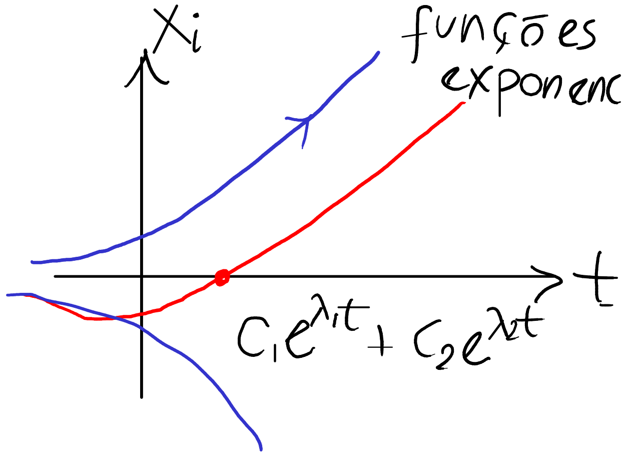
$\lambda_1 < 0 \rightarrow$



duas retas de evolução que se aproximam do ponto de equilíbrio

① $\lambda_1 \neq \lambda_2$, reais e positivos

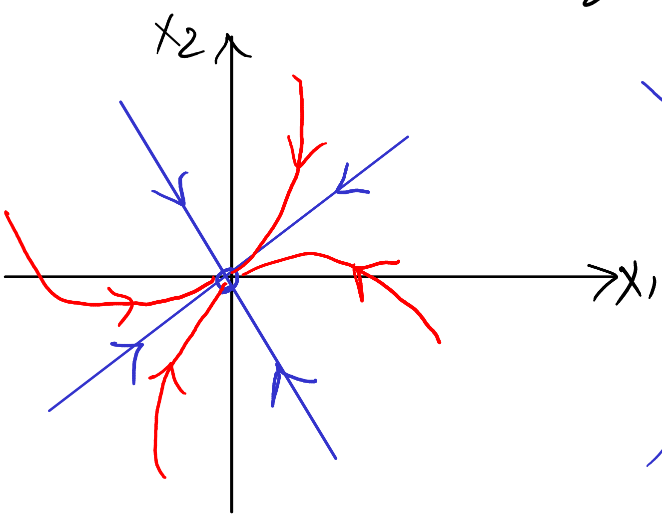


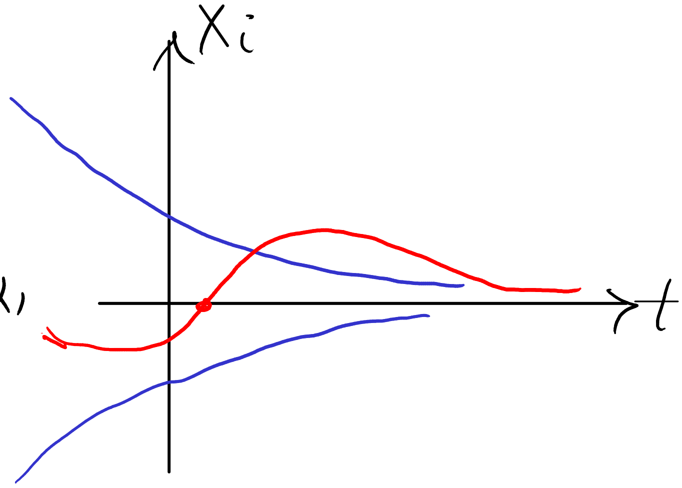


funções exponenciais

Nó repulsivo

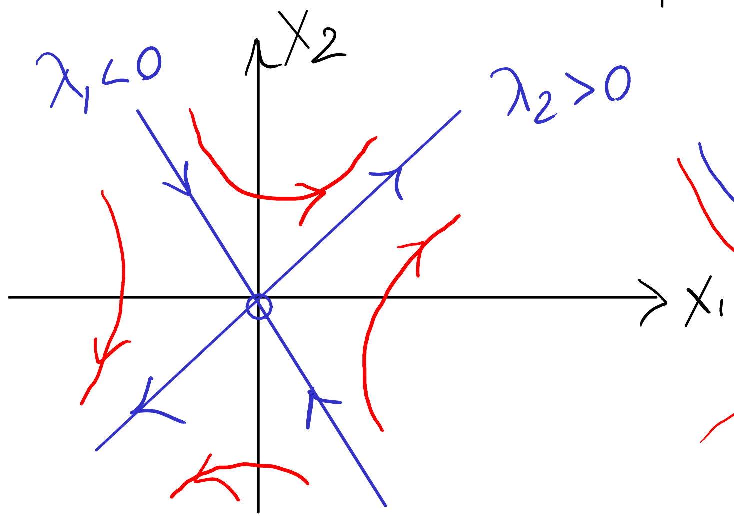
② $\lambda_1 \neq \lambda_2$, reais e negativos

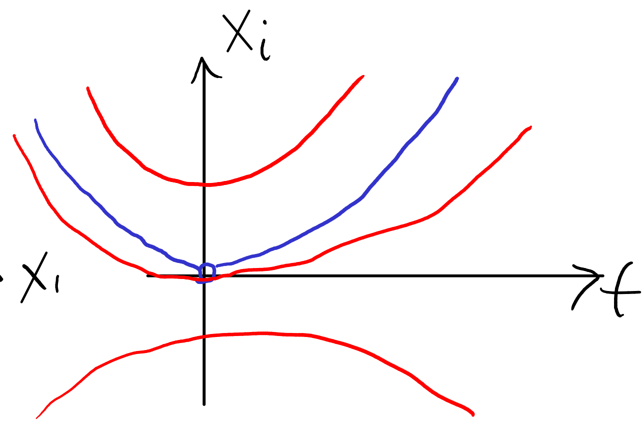




Nó atrativo

③ λ_1, λ_2 reais, um deles positivo e o outro negativo





Ponto de sela

Valores próprios complexos

$$\lambda = a \pm ib \quad (a \text{ e } b \text{ reais})$$

$$\vec{v} = \vec{c}_1 \pm i\vec{c}_2 \quad (\vec{c}_1 \text{ e } \vec{c}_2 \text{ são vetores em } \mathbb{R}^2)$$

soluções particulares:

$$\mathrm{Re}\left(\vec{v}e^{\lambda t}\right), \quad \mathrm{Im}\left(\vec{v}e^{\lambda t}\right)$$

$$\vec{v}e^{\lambda t} = \left(\vec{c}_1 + i\vec{c}_2\right)e^{(a+ib)t} = \left(\vec{c}_1 + i\vec{c}_2\right)e^{at}e^{ibt}$$

$$= e^{at}\left(\vec{c}_1 + i\vec{c}_2\right)\left(\cos(bt) + i\sin(bt)\right)$$

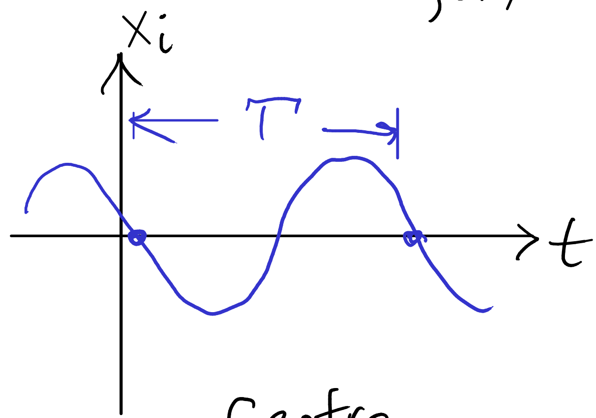
$$\mathrm{Re}\left(\vec{v}e^{\lambda t}\right) = e^{at}\left(\vec{c}_1\cos(bt) - \vec{c}_2\sin(bt)\right)$$

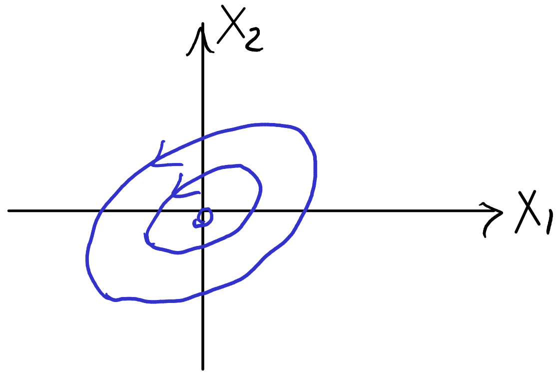
$$\mathrm{Im}\left(\vec{v}e^{\lambda t}\right) = e^{at}\left(\vec{c}_1\sin(bt) + \vec{c}_2\cos(bt)\right)$$

funções quase-periódicas, com frequência angular b e amplitude variável.

④ $a = 0 \quad \longrightarrow \quad \vec{r}(t) = \vec{C}_1 \cos(bt) - \vec{C}_2 \sin(bt)$

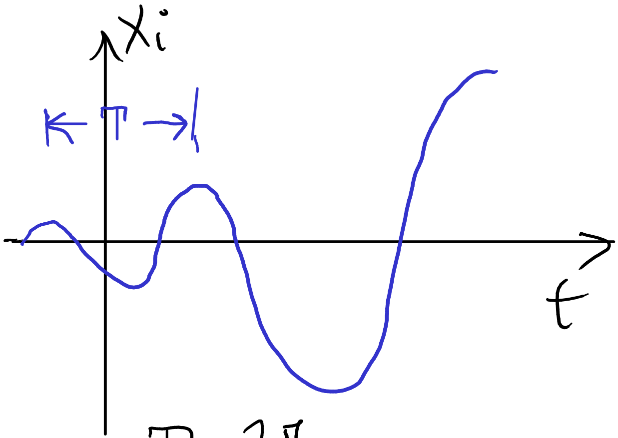
função periódica $\left(T = \frac{2\pi}{b} \right)$





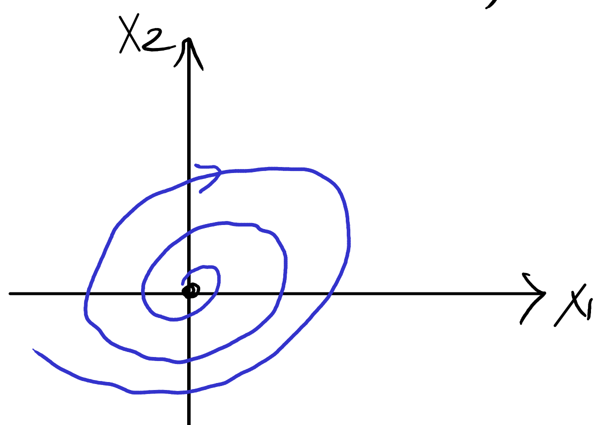
Centro

⑤ $a > 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{r}(t) = e^{at}\left(\vec{C}_1 \cos(bt) - \vec{C}_2 \sin(bt)\right)$



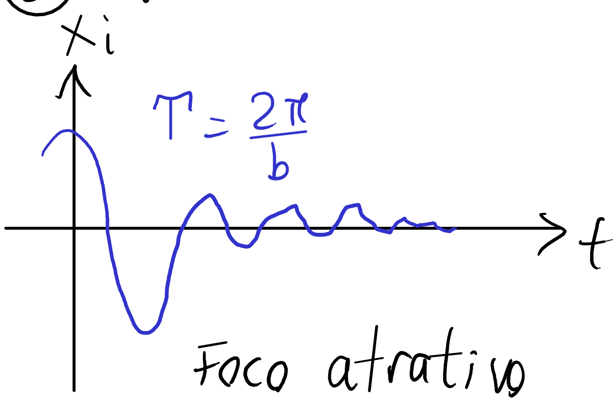
$T = \frac{2\pi}{b}$

Foco repulsivo

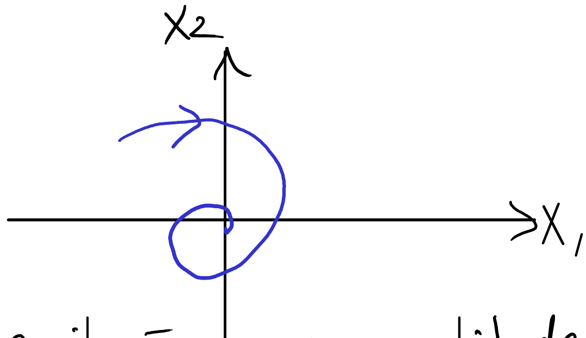


oscilações com A crescente

⑥ $a < 0$



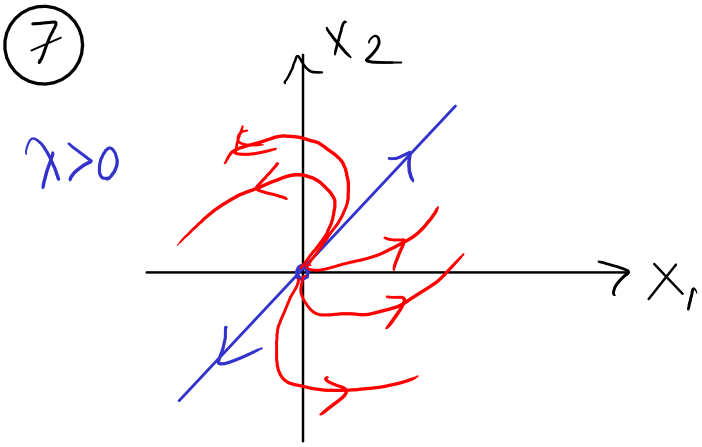
Foco atrativo



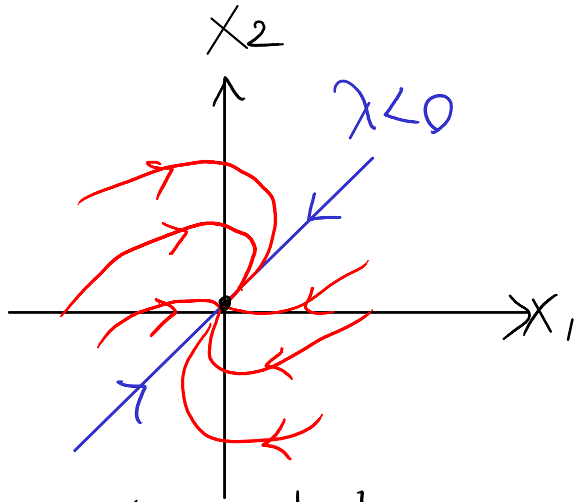
oscilações com amplitude decrescente

$\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 \quad (\Rightarrow \lambda \text{ real})$

7



Nó impróprio repulsivo

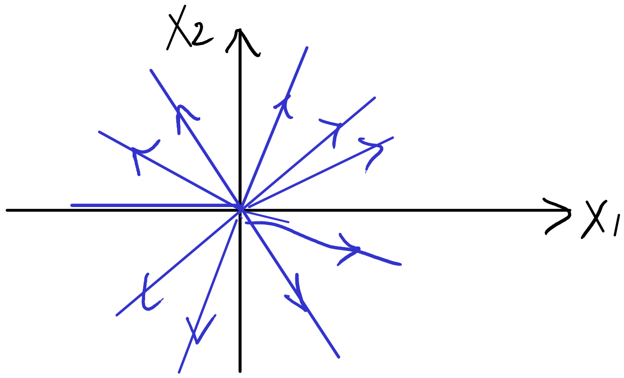


Nó impróprio atrativo

8 x_1 evolui independentemente de x_2 $\Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = c_1 x_1 \\ \dot{x}_2 = c_2 x_2 \end{cases}$

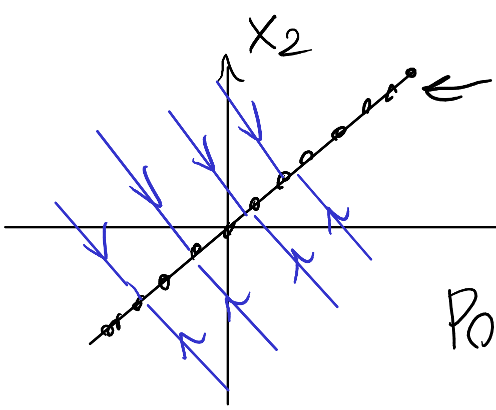
$A = \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = c_1 \;,\; \lambda_2 = c_2$

se $c_1 = c_2$ $\quad A = c\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ qualquer $\vec{v}$ é vetor próprio



Nó próprio
(atrativo ou repulsivo)

9 $\det(A) = 0 \quad \Rightarrow$ duas equações dependentes
$\lambda = 0$ é valor próprio



infinitos pontos de equilíbrio

Ponto não hiperbólico

Polinómio caraterístico

$$A\vec{v} = \lambda \vec{v} \qquad A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} A_{11}-\lambda & A_{12} \\ A_{21} & A_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(\lambda - A_{11})(\lambda - A_{22}) - A_{12}A_{21} = \lambda^2 - (A_{11}+A_{22})\lambda + A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}$$

traço de A: $\mathrm{tr}A = A_{11} + A_{22}$

determinante: $\det A = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}$

$$\boxed{\lambda^2 - (\mathrm{tr}A)\lambda + \det A = 0} \quad \text{polinómio caraterístico}$$

$$\Leftrightarrow (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = 0 = \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = \mathrm{tr}A \\ \lambda_1\lambda_2 = \det A \end{cases}$$

$$\lambda = \frac{\mathrm{tr}A}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\mathrm{tr}A}{2}\right)^2 - \det A}$$

(i) $\det A < 0$ $\sqrt{(\ldots) - \ldots}$ é real e maior que $\frac{\mathrm{tr}A}{2}$

$\Rightarrow$ λ_1 e λ_2 reais com sinais opostos

(ii) $\det A > 0$, e $\det A < \left(\frac{\mathrm{tr}A}{2}\right)^2 \rightarrow$ duas raízes reais com o sinal de $\mathrm{tr}A$

(iii) $\det A > \left(\frac{\mathrm{tr}A}{2}\right)^2 \rightarrow$ raízes complexas.