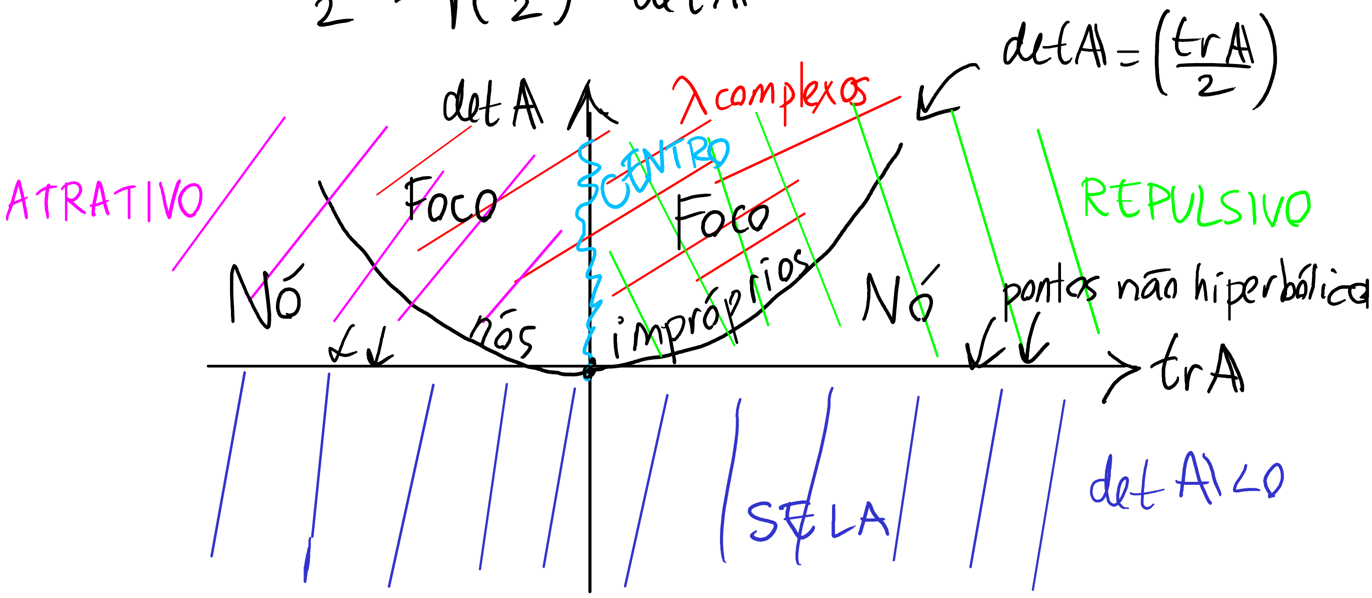
Aula 21. 17 de maio

Polinómio caraterístico:

$$\lambda^2 - (\mathrm{tr}A)\lambda + \det A = 0$$

$$\lambda = \frac{\mathrm{tr}A}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\mathrm{tr}A}{2}\right)^2 - \det A}$$



Oscilador harmónico simples.

$$U = \frac{1}{2}ks^2 \quad (s=0, \text{ ponto de equilíbrio})$$

$$F_t = -\frac{dU}{ds} = -ks = m\ddot{s}$$

Equação de movimento:

$$\boxed{\ddot{s} + \Omega^2 s = 0} \qquad \Omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

EDO, linear de 2ª ordem

equivalente ao sistema dinâmico.

$$\begin{cases} \dot{s} = v \leftarrow (c_1 s + c_2 v) \\ \dot{v} = -\Omega^2 s \leftarrow (d_1 s + d_2 v) \end{cases} \longrightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\Omega^2 & 0 \end{bmatrix}$$

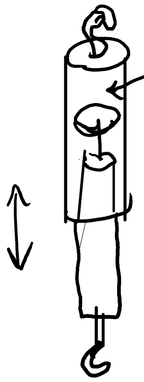
$\mathrm{tr}A = 0$, $\det A = \Omega^2 > 0$

$\lambda^2 + \Omega^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i\Omega$

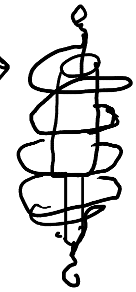
CENTRO

Oscilador harmónico amortecido

amortecedor



mola
(k)



constante

$$F_r = -C v$$

$$U = \frac{1}{2} k s^2$$

$$F_t = -ks - c\dot{s} = m\ddot{s}$$

Equação de movimento:

$$\boxed{\ddot{s} + \alpha^2 \dot{s} + \Omega^2 s = 0}$$

$\Omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, $\alpha = \sqrt{\frac{c}{m}}$

EDO, linear de 2ª ordem

sist. dinâmico linear

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dot{s} = v \\ \dot{v} = -\Omega^2 s - \alpha^2 v \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\Omega^2 & -\alpha^2 \end{bmatrix}$$

$\operatorname{tr} A = -\alpha^2 < 0$ (atrativo) $\quad \det A = \Omega^2 > 0$

polinómio caraterístico

$$\lambda^2 + \alpha^2 \lambda + \Omega^2 = 0$$

3 casos

① amortecimento fraco. $\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 < \Omega^2$

$\alpha < 2\Omega \Rightarrow \lambda$ complexos $\rightarrow$ FOCO ATRATIVO

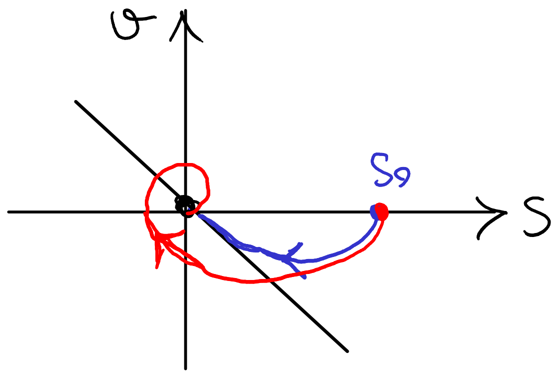
② amortecimento forte. $\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 > \Omega^2$

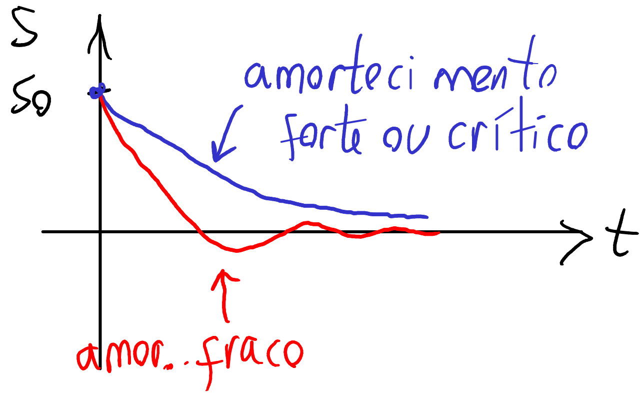
$\alpha > 2\Omega \Rightarrow \lambda$ reais negativos $\rightarrow$ NÓ ATRATIVO

③ amortecimento crítico. $\alpha = 2\Omega \rightarrow \lambda_1 = \lambda_2$ (real <0)
$= \lambda = -\frac{\alpha}{2}^2$

$\rightarrow$ NÓ IMPRÓPRIO ATRATIVO

Vetores próprios. (λ reais)
$-\lambda s + v = 0 \Rightarrow v = \lambda s \quad (\lambda < 0)$

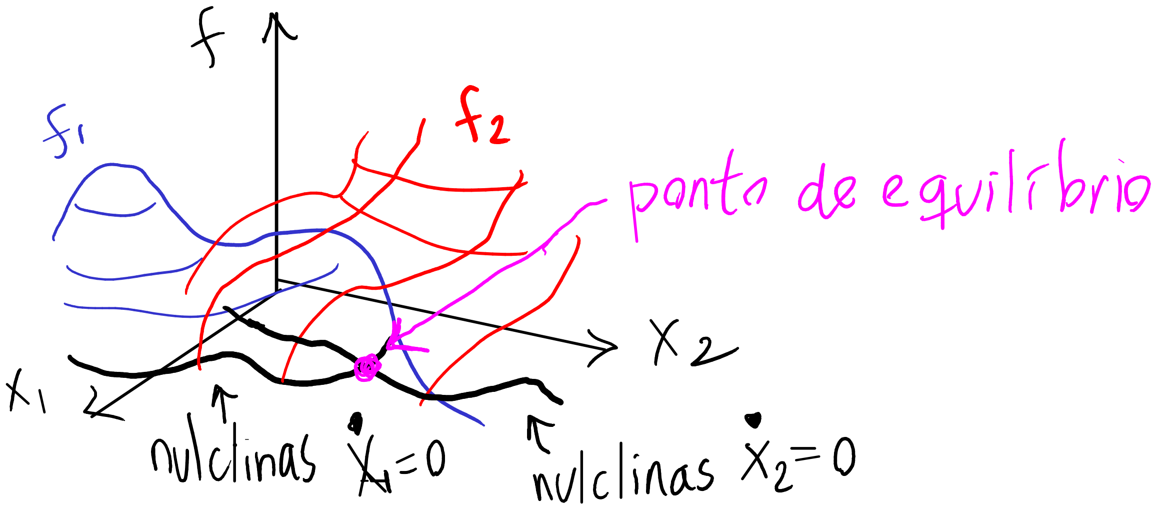




SISTEMAS DINÂMICOS NÃO LINEARES.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) \end{cases}$$

f_1 e f_2 são funções contínuas no plano (x_1, x_2)
uma delas, ou as duas, não linear.



podem existir qualquer número de pontos de equilíbrio

Exemplo 7.2. $\dot{x}_1 = 4 - x_1^2 - 4x_2^2 \,, \quad \dot{x}_2 = x_2^2 - x_1^2 + 1$

Maxima (5.45) → plot2d([4-x1^2-4*x2^2=0, x2^2-x1^2+1=0], [x1,-3,3], [x2,-3,3], nolegend)$

⇒ 4 pontos de equilíbrio (dois pontos de sela e 2 focos)

APROXIMAÇÃO LINEAR

Se $(x_1, x_2) = (a, b)$ for ponto de equilíbrio.

⇒ Séries de McClaurin para f_1 e f_2.

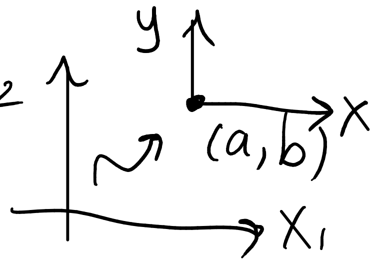
$$f_1(x_1,x_2) = f_1(a,b) + (x_1 - a)\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a,b) + (x_2 - b)\frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a,b) + O^2(x_1,x_2)$$

$$f_2(x_1,x_2) = f_2(a,b) + (x_1 - a)\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a,b) + (x_2 - b)\frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a,b) + O^2(x_1,x_2)$$

zero

<u>Matriz Jacobiana</u>

$$\mathbb{J}(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$



$$\begin{cases} x = x_1 - a \\ y = x_2 - b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \dot{x}_1 \\ \dot{y} = \dot{x}_2 \end{cases} \qquad \begin{aligned} \dot{x}_1 &\approx J_{11}(a,b)\,x + J_{12}(a,b)\,y \\ \dot{x}_2 &\approx J_{21}(a,b)\,x + J_{22}(a,b)\,y \end{aligned}$$

Sistema linear com matriz: $A = \mathbb{J}(a,b)$

No exemplo 7.2: jacobian([4-x1^2-4*x2^2, x2^2-x1^2+1], [x1,x2]);