Aula 22. 19 de maio

Exemplo 7.2. $\dot{x}_1 = 4 - x_1^2 - 4x_2^2 \quad \dot{x}_2 = x_2^2 - x_1^2 + 1$

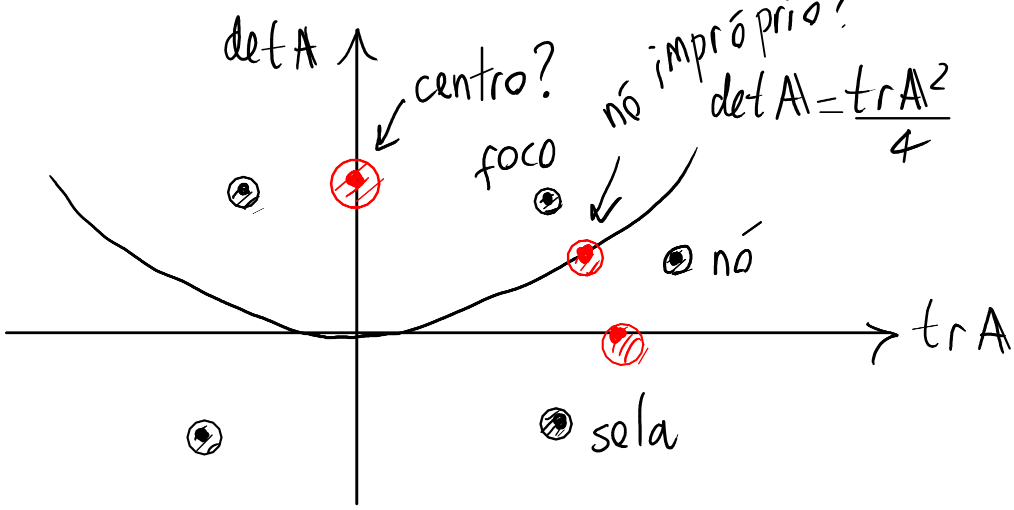
pontos de equilíbrio:

$$\begin{cases} 4 - x_1^2 - 4x_2^2 = 0 \\ x_2^2 - x_1^2 + 1 = 0 \end{cases} \rightarrow$$ 4 pontos, nos 4 quadrantes do plano $x_1 x_2$

$$\mathbb{J}(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_1 & -8x_2 \\ -2x_1 & 2x_2 \end{bmatrix}$$

4 aproximações lineares: $\mathbb{A}_1 = \mathbb{J}(P_1), \ldots, \mathbb{A}_4 = \mathbb{J}(P_4)$

os pontos no 1º e 3º quadrantes são pontos de sela.
o ponto no 2º quadrante é foco repulsivo.
o ponto no 4º quadrante é foco atrativo.



SISTEMAS DINÂMICOS NÃO AUTÓNOMOS

exemplo $\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, t) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, t) \end{cases} \Rightarrow \vec{u}$ depende de t

t é também variável de estado $\vec{u} = (\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{t})$

acrescenta-se a equação de evolução $\dot{t} = 1$

$$\Rightarrow \vec{u} = (f_1, f_2, 1)$$

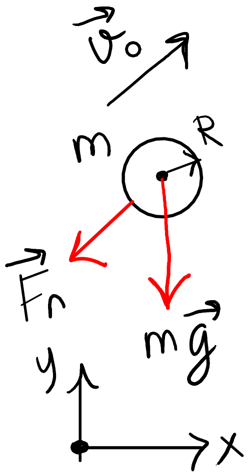
mas plotdf admite unicamente 2 variáveis de estado

MÉTODO DE RUNGE-KUTTA

Maxima → programa rk( ).

$$rk\Big(\underbrace{[f_1, f_2, \ldots, f_n]}_{\vec{u}\text{ sem incluir } \dot{t}=1}, \underbrace{[x_1, x_2, \ldots, x_n]}_{\text{estado}}, \underbrace{[x_{10}, \ldots, x_{n0}]}_{\text{estado inicial}}, [\underset{\substack{\uparrow\\ \text{var. independente}}}{t}, t_0, t_f, \underset{\substack{\uparrow\\ \text{incrementos}}}{\Delta t}]\Big)$$

Exemplo. Lançamento de projéteis esféricos no ar.



$$\vec{F}_r = -\frac{\pi \rho R^2}{4} |\vec{v}|\, \vec{v}$$ (ρ massa volúmica do ar ≈ 1.2 kg/m³)

$$\vec{a} = \frac{m\vec{g} + \vec{F}_r}{m}$$ movimento plano

$$\vec{g} = -g\,\hat{\jmath}$$

$$\vec{F}_r = -\frac{\pi \rho R^2}{4} \sqrt{v_x^2 + v_y^2}\, (v_x \hat{\imath} + v_y \hat{\jmath})$$

4 equações de evolução

$$\dot{x} = v_x \qquad \dot{y} = v_y$$

$$\dot{v}_x = -\frac{\pi \rho R^2}{4m} \sqrt{v_x^2 + v_y^2}\, v_x \qquad \dot{v}_y = -g - \frac{\pi \rho R^2}{4m} \sqrt{v_x^2 + v_y^2}\, v_y$$

Exemplo: bola de tenis ($R = 3.25$ cm, $m = 62$ g) com $|\vec{v}_0| = 12\,\frac{m}{s}$ com um ângulo de 45° sobre a horizontal.

```
k: float(%pi*1.2*0.0325^2/4/0.062);
v: sqrt(vx^2 + vy^2);
curva: rk([vx, vy, -k*v*vx, -9.8-k*v*vy], [x,y,vx,vy],
        [0,0,12*cos(%pi/4),12*sin(%pi/4)],[t,0,2,0.01])$
last(curva);
```

$\rightarrow [2.0, 14.72, -3.188, 6.307, -10.59]$

$t_f \quad x_f \quad y_f \quad v_{xf} \quad v_{yf}$

desce até $y=0$ antes de $t_f = 2$. Para descobrir onde:

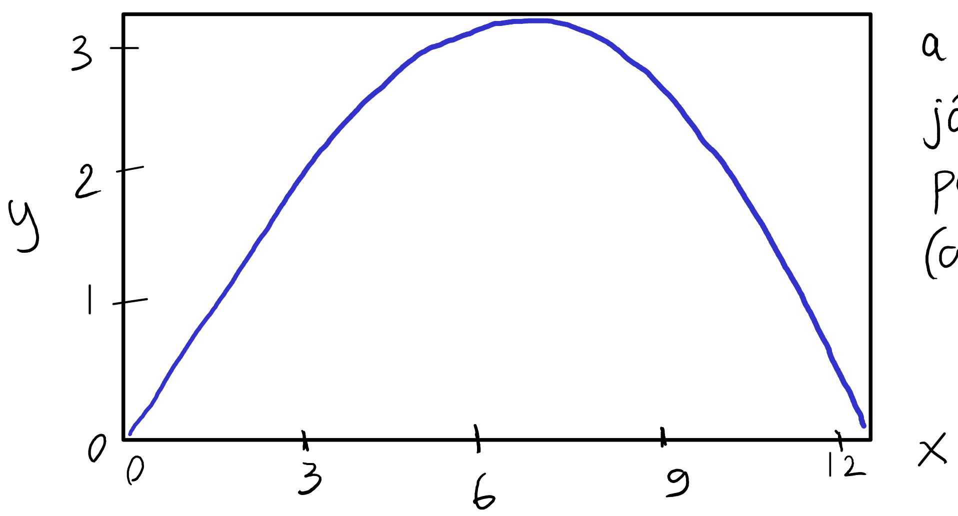
```
first(sublist_indices(curva, lambda([p], p[3]<0)));
```

↳ 167

só queremos os primeiros 166 elementos de "curva" ($y \geq 0$)

Gráfico da trajetória (y vs x):

```
yvsx: makelist([curva[i][2],curva[i][3]],i,1,166)$
plot2d([discrete, yvsx])$
```



a trajetória já não é parabólica (asimétrica)

RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Exemplo: $x^2 y'' + x y' + \left(x^2 - \frac{1}{9}\right) y = 0 \qquad \left(y' = \frac{dy}{dx}\right)$

condições iniciais: em $x=0$, $y=0$ e $y'=1$

sistema dinâmico

$$\begin{cases} y' = u \\ u' = \left(\frac{1}{9x^2} - 1\right) y - \frac{u}{x} \\ x' = 1 \end{cases}$$

não podemos usar $x_0 = 0$, porque $u'_0 \to \infty$

```
sol: rk([u,(1/9/x^2-1)*y-u/x],[y,u],[0,1],[x,0.1,30,0.1])$
last(sol); → [30.0,-0.04711,0.01111]
```

$\uparrow x_f \quad \uparrow y_f \quad \uparrow u_f$

para determinar se $\Delta x = 0.1$ é suficientemente pequeno,

```
sol: rk([u,(1/9/x^2-1)*y-u/x],[y,u],[0,1],[x,0.1,30,0.01])$
last(sol); → [30.0,-0.04711,0.01121]
```

(a discrepância indica que $\Delta x = 0.1$ não chega)

```
sol: rk([u,(1/9/x^2-1)*y-u/x],[y,u],[0,1],[x,0.1,30,0.005])$
last(sol); → [30.0,-0.04711,0.01121]
```

(resultados confiáveis com 4 algarismos significativos)

Gráfico de $y(x)$:

```
plot2d([discrete,makelist([p[1],p[2]],p,sol)])$
```