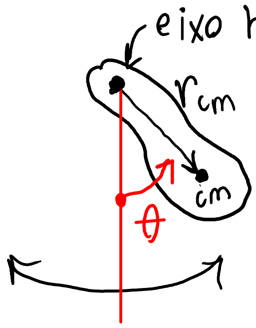
Aula 23. 24 de maio

PÊNDULO FÍSICO



eixo paralelo ao eixo fixo

$$E_c = \frac{1}{2}m\left(r_{cm}\dot{\theta}\right)^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\underbrace{\left(m r_{cm}^2 + I_{cm}\right)}_{I_{\text{eixo fixo}} = m r_g^2}\dot{\theta}^2$$

$$E_c = \frac{1}{2} m r_g^2 \dot{\theta}^2$$

$$U_g = -mg\, r_{cm}\cos\theta$$

Desprezando a resistência do ar e o atrito no eixo:

$$m r_g^2 \ddot{\theta} + mg\, r_{cm}\sin\theta = 0 \quad\Rightarrow\quad \ddot{\theta} = -\frac{g\, r_{cm}}{r_g^2}\sin\theta$$

$$\ell = \frac{r_g^2}{r_{cm}} \quad\Longrightarrow\quad \boxed{\ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell}\sin\theta}$$

eq. de movimento dum pêndulo simples de comprimento ℓ

equação diferencial não linear

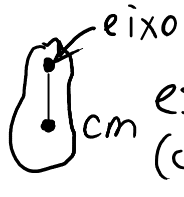
$$\begin{cases} \dot{\theta} = \omega \\ \dot{\omega} = -\frac{g}{\ell}\sin\theta \end{cases} \qquad J(\theta,\omega) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{\ell}\cos\theta & 0 \end{bmatrix}$$

pontos de equilíbrio: $\omega = 0$, $\wedge$, $\sin\theta = 0$

① $\theta = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots \quad\Longrightarrow\quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{\ell} & 0 \end{bmatrix}$ ($\approx$ oscilador harmónico)

$\Rightarrow$ Oscilações harmónicas com frequência angular $\Omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$

(realmente é um ponto)



estável (centro)

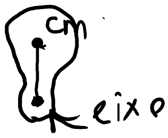
② $\theta = \pm\pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi, \ldots \Rightarrow \sin\theta = 0, \cos\theta = -1$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ +\frac{g}{l} & 0 \end{bmatrix}$$

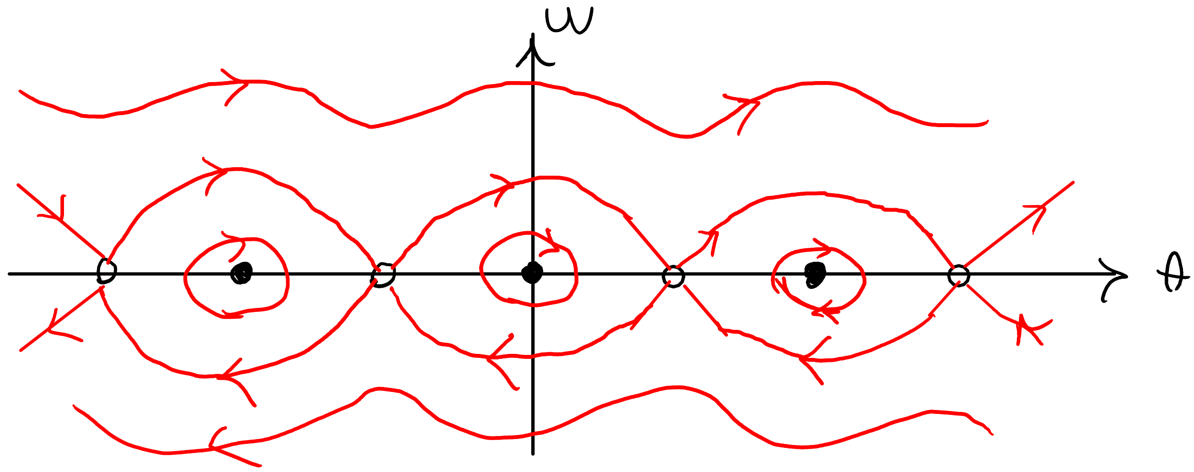
$\det A = -\frac{g}{l} < 0 \Rightarrow$ pontos de sela

(oscilador invertido)

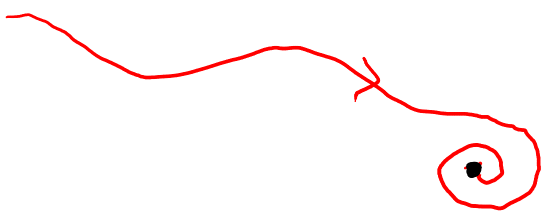
instável



Retrato de fase



Com resistência do ar e atrito no eixo

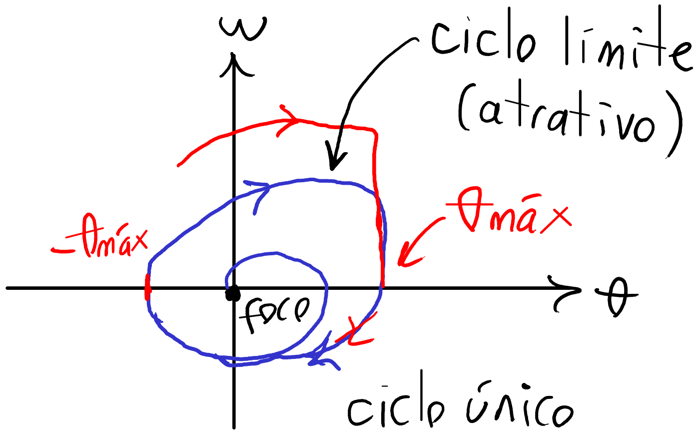


$\theta = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$

→ focos atrativos

$\theta = \pm\pi, \pm 3\pi, \ldots \rightarrow$ sela

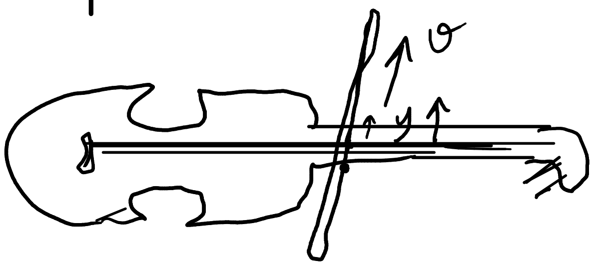
Relógio de pêndulo

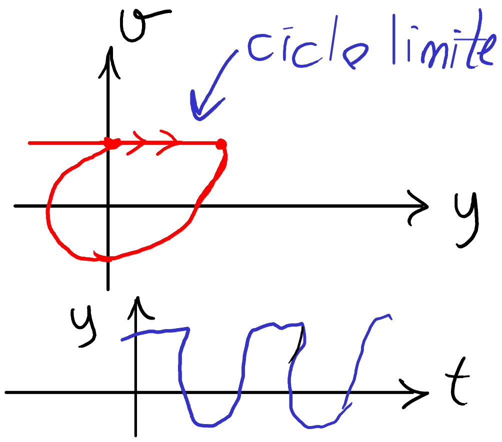


CICLOS LIMITE

Dentro de cada ciclo limite existe um ponto de equilíbrio, atrativo ou repulsivo.

Exemplos: Violino





Equação de Van der Pol.

$$\ddot{x} + 2\varepsilon(x^2-1)\dot{x} + x = 0 \qquad (\varepsilon \text{ parâmetro positivo})$$

não conserv.   oscil. harmónico

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = 2\varepsilon(1-x^2)y - x \end{cases} \qquad 2\varepsilon(1-x^2)\begin{cases} |x|>1 \to \text{dissipação de energia} \\ |x|<1 \to \text{aumento da energia} \end{cases}$$

Um único ponto de equilíbrio: $x=0$, $y=0$.
espera-se que exista um ciclo limite com $|x| \approx 1$

$$J(x,y) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4\varepsilon xy - 1 & 2\varepsilon(1-x^2) \end{bmatrix} \to A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2\varepsilon \end{bmatrix}$$

$\operatorname{tr}A = 2\varepsilon \quad \det A = 1$

$$\lambda^2 - 2\varepsilon\lambda + 1 = 0 \implies \lambda = \varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 - 1}$$

① $\varepsilon < 1 \Rightarrow$ foco repulsivo. exemplo: $\varepsilon = 0.17$

② $\varepsilon > 1 \Rightarrow$ nó repulsivo. exemplo: $\varepsilon = 1.7$

③ $\varepsilon = 1 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \varepsilon \Rightarrow$ nó impróprio repulsivo

Exemplo 11.1. $\dot{x} = -y + x(1-2x^2-3y^2)$, $\dot{y} = x + y(1-2x^2-3y^2)$

Sistema não linear com único ponto de equilíbrio: $x=0, y=0$

O retrato de fase, na região $-100 \leq x \leq 100$, $-100 \leq y \leq 100$ mostra retas que se aproximam da origem.

Mas o ponto de equilíbrio na origem é de facto foco repulsivo, como mostra o retrato de fase na vizinhança da origem, $-0.1 \leq x \leq 0.1$, $-0.1 \leq y \leq 1$.

Traçando o retrato de fase na região $-1 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$, observa-se um ciclo limite. As "retas" começando em (x, y) muito maiores que 1, curvam-se aproximando-se do ciclo limite, e as espirais que saem da origem aproximam-se também desse ciclo.

O ciclo limite é atrativo.