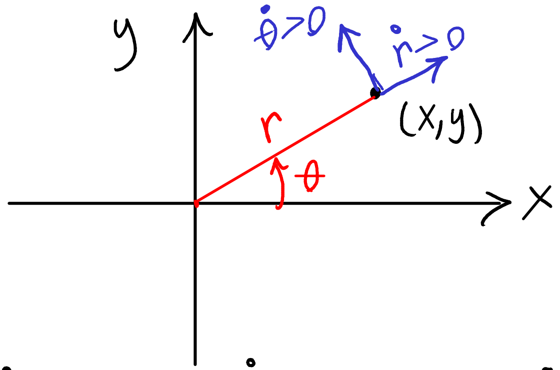
Aula 24. 26 de maio

SISTEMAS DINÂMICOS EM COORDENADAS POLARES

$$\begin{cases} \dot{x} = f_x(x,y) \\ \dot{y} = f_y(x,y) \end{cases}$$

coordenadas cartesianas (x,y)



$x \in \mathbb{R}$
$y \in \mathbb{R}$

$\theta \in \mathbb{R}$
$r \geq 0$

coordenadas polares

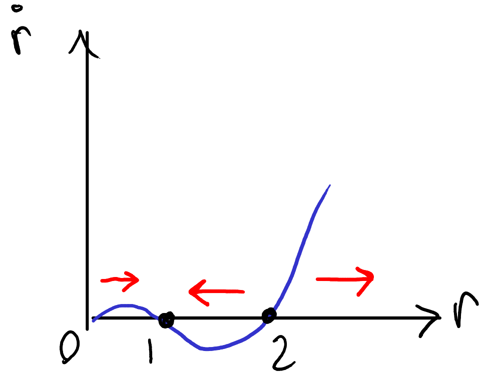
$$x = r\cos\theta \qquad \dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta$$
$$y = r\sin\theta \qquad \dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta$$

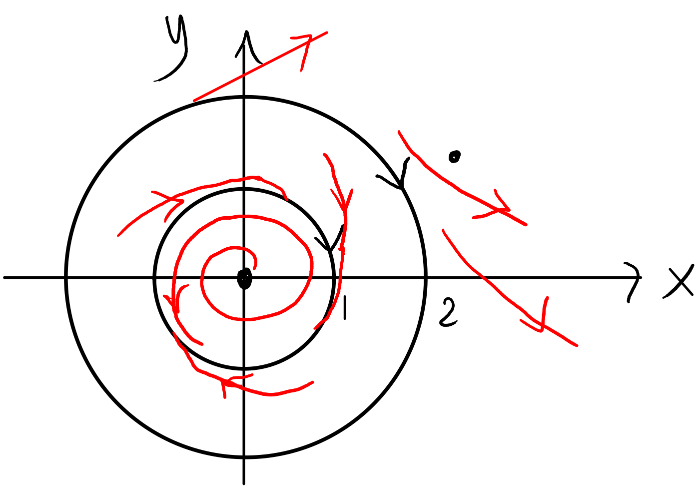
$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{r} = f_r(r,\theta) \\ \dot{\theta} = f_\theta(r,\theta) \end{cases}$$

Exemplo.
$$\begin{cases} \dot{x} = x\left(x^2+y^2-3\sqrt{x^2+y^2}+2\right)+2y \\ \dot{y} = y\left(x^2+y^2-3\sqrt{x^2+y^2}+2\right)-2x \end{cases}$$

análise em coordenadas polares

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{\theta} = -2 & \text{(sentido dos ponteiros)} \\ \dot{r} = -3r|r| + r^3 + 2r \end{cases}$$





(0,0) é foco repulsivo

há 2 ciclos limite

atrativo com $r=1$

repulsivo com $r=2$

DINÂMICA POPULACIONAL

$x(t) \geq 0$ população no instante t (variável real)

equação de evolução (caso autónomo):

$\dot{x} = f(x)$ aumento/diminuição da população, por unidade de tempo.

Modelo de Malthus

$\dot{x} = ax$ $\quad a$ = constante positiva

= taxa de natalidade − taxa de mortalidade

$\Downarrow$

$x(t) = x_0 e^{at}$ crescimento exponencial

Modelo logístico (Verlhust)

a = constante positiva = taxa de natalidade

b = constante positiva

bx = taxa de mortalidade

$\dot{x} = x(a - bx)$ $\quad$ sist. dinâmico na reta $\mathbb{R}^+$

pontos de equilíbrio $\quad x(a-bx) = 0 \quad x_1 = 0$

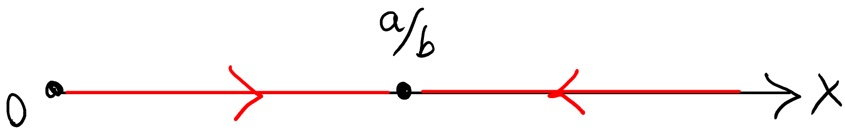
$x_2 = \frac{a}{b}$

$J(x) = \frac{d\dot{x}}{dx} = a - 2bx$

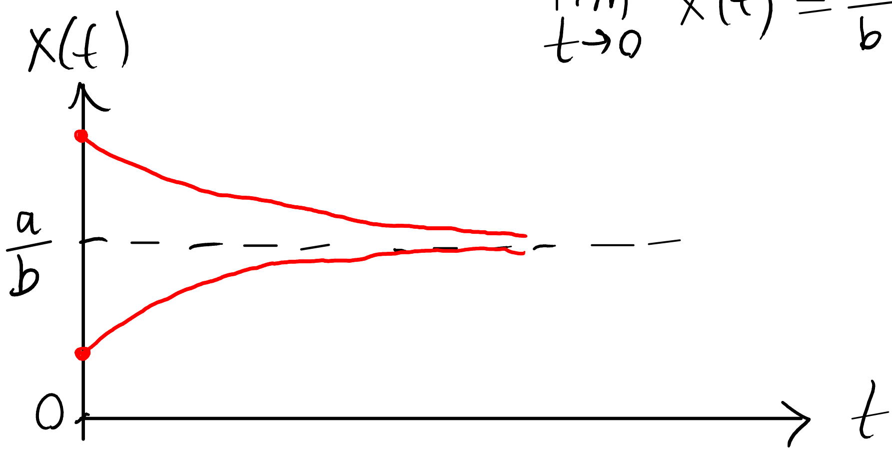
$A_1(0) = a > 0$ (instável)

$A_2\left(\frac{a}{b}\right) = a - 2b\left(\frac{a}{b}\right) = -a < 0$ (estável)

Retrato de fase:



$$\lim_{t\to 0} x(t) = \frac{a}{b}$$



SISTEMAS DE DUAS ESPÉCIES

$x_1(t) \geq 0$ população da espécie 1 em t.
$x_2(t) \geq 0$ população da espécie 2 em t.

equações de evolução:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) \end{cases} \qquad \lim_{x_1\to 0^+} f_1(x_1,x_2) = 0 \qquad \lim_{x_2 \to 0^+} f_2(x_1,x_2) = 0$$

$\Rightarrow (x_1, x_2) = (0,0)$ é ponto de equilíbrio

aumento/diminuição próprio da espécie 1

$$J(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

interação entre as duas espécies

próprio da espécie 2

3 tipos de sistemas

① sistema com cooperação; $\frac{\partial f_1}{\partial x_2} > 0$, $\frac{\partial f_2}{\partial x_1} > 0$

② sistema com competição: $\frac{\partial f_1}{\partial x_2} < 0$, $\frac{\partial f_2}{\partial x_1} < 0$

③ sistema predador-presa: $\underbrace{\frac{\partial f_1}{\partial x_2} > 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_1} < 0}_{x_1 \to \text{predadores} \quad x_2 \to \text{presas}}$

ou: $\underbrace{\frac{\partial f_1}{\partial x_2} < 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_1} > 0}_{x_1 \to \text{presas} \quad x_2 \to \text{predadores}}$