Aula 25. 31 de maio

SISTEMAS PREDADOR PRESA

Exemplo 11.3. Sistema de Lotka-Volterra

$$\begin{cases} \dot{x} = x(a-cy) \\ \dot{y} = y(bx-d) \end{cases}$$

duas populações x e y.
4 parâmetros positivos: a, b, c e d

$x \to$ presas $\quad y \to$ predadores

$$\lim_{x\to 0^+} x(a-cy) = 0 \qquad \lim_{y\to 0^+} y(bx-d) = 0$$

$$J(x,y) = \begin{bmatrix} a-cy & \overset{\leq 0}{-cx} \\ \underset{\geq 0}{by} & bx-d \end{bmatrix}$$

pontos de equilíbrio

$$\begin{cases} x(a-cy) = 0 & \to & x=0, \vee, \; y = \frac{a}{c} \\ y(bx-d) = 0 & \to & y=0, \vee, \; x = \frac{d}{b} \end{cases}$$

há dois pontos de equilíbrio:

$$P_1 = (0,0) \qquad P_2 = \left(\frac{d}{b}, \frac{a}{c}\right)$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -d \end{bmatrix} \quad \det A_1 < 0$$

$\Downarrow$

ponto de sela

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{cd}{b} \\ \frac{ab}{c} & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \operatorname{tr} A_2 = 0 \\ \det A_2 > 0 \end{matrix}$$

$\Downarrow$

centro ✓ $\quad \lambda = \pm i\sqrt{ad}$

Exemplo: $a=6$, $b=3$, $c=2$, $d=15$ → $P_2=(5,3)$ centro

oscilações com freq. angular $\Omega=\sqrt{90}$ $T\approx\frac{2\pi}{\sqrt{90}}$

realista

Problema: ciclos com amplitude arbitrária

Exemplo 11.4. Modelo de Holling-Tanner

$$\dot{x} = x\left(1-\frac{x}{7}\right) - \frac{6xy}{7+7x} \qquad \dot{y} = \frac{y}{5}\left(1-\frac{y}{2x}\right)$$

x → presas $\qquad$ y → predadores

3 pontos de equilíbrio:

$P_1=(0,0)$, $P_2=(1,2)$, $P_3=(7,0)$

extinção de x e y $\qquad$ extinção dos predadores

P_2 é foco repulsivo → não existe coexistência das espécies

P_1 e P_3 são pontos de sela (não existe exclusão de y)

Há um ciclo limite, atrativo.