

(esta secção não será avaliada)

Aula 26. 2 de junho

## SISTEMAS DINÂMICOS DISCRETOS

com uma variável de estado,  $X$ .

valores da variável nos períodos  $0, 1, 2, 3, \dots$  = sequência

$$\rightarrow \{X_0, X_1, X_2, X_3, \dots\} \quad X_n = \text{real}$$

equação de evolução:

$$\boxed{X_{n+1} = f(X_n)}$$

fórmula de recorrência  
equação de diferenças

Exemplo. Modelo logístico.

No caso contínuo:  $\dot{X} = X(a - bX)$  ( $a \geq 0, b \geq 0$ )

No caso discreto:  $X_{n+1} - X_n = X_n(a - bX_n)$

$$\Rightarrow X_{n+1} = cX_n - bX_n^2 \quad (c = a+1 \geq 1)$$

$$X_{n+1} = cX_n \left(1 - \frac{b}{c}X_n\right) \rightarrow \frac{b}{c}X_{n+1} = c \left(\frac{bX_n}{c}\right) \left(1 - \frac{b}{c}X_n\right)$$

definição:  $y_n = \frac{b}{c}X_n$

$$\Rightarrow \boxed{y_{n+1} = c y_n (1 - y_n)} \quad \text{um parâmetro } (c \geq 1)$$

$$y_0 = 0.1 \rightarrow y_1 = c y_0 (1 - y_0) \rightarrow y_2 = c y_1 (1 - y_1) \dots$$

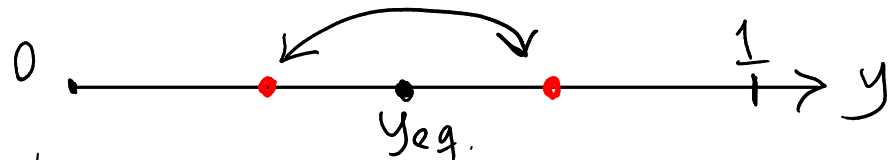
$$(0 \leq y_n \leq 1)$$

pontos de equilíbrio:  $y_{n+1} = y_n \Rightarrow c y_n (1 - y_n) = y_n$

$$y_n (c - c y_n - 1) = 0 \rightarrow y_n = 0$$
$$\rightarrow y_n = \frac{c-1}{c}$$

$c=2 \rightarrow y_{\text{equil.}} = \frac{1}{2}$   $\{y_n\}$  tem limite  $y_n = \frac{1}{2}$   
o ponto de equilíbrio é atrativo.

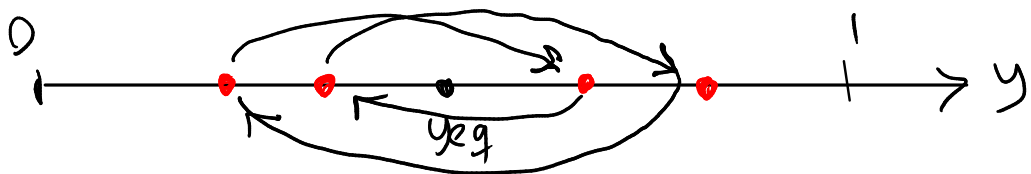
$c=3.2$  .  $y_n \rightarrow \{\dots, 0.5130, 0.7995, 0.5130, \dots\}$



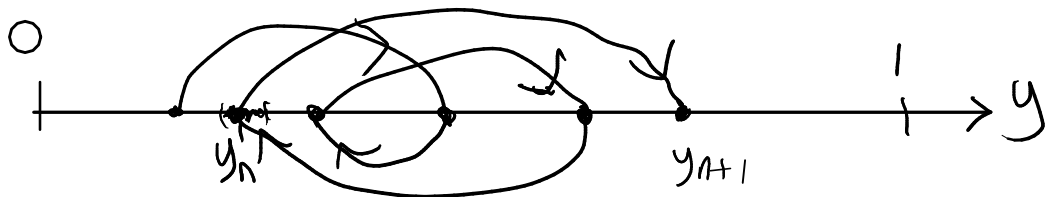
ciclo limite atrativo  $\{0.5130, 0.7995\}$  (período 2)

$c=3.5$  . ciclo limite atrativo

$\{0.5009, 0.875, 0.3828, 0.8269\}$  (período 4)

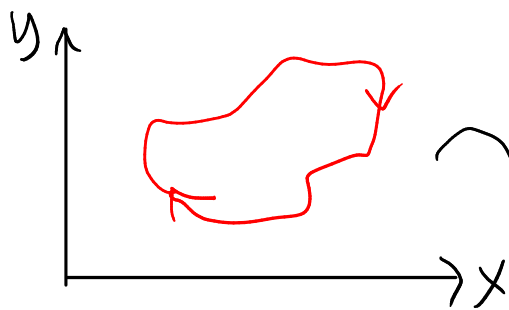


$c=4$  ciclo limite com período infinito (atrator estranho)



SISTEMA CAÓTICO

## SISTEMAS CAÓTICOS CONTÍNUOS



possível se houver outra variável (z)



podem existir atratores estranhos (ciclo limite atrativo com período infinito) se houver 3 ou mais variáveis de estado.

Exemplo. Sistema de Rössler

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - x \\ \dot{y} = x + c y \\ \dot{z} = 2 + (x - 4)z \end{cases} \quad (c \text{ parâmetro real positivo})$$

$x_0 = 2, y_0 = 2, z_0 = 2, c = 0.3 \rightarrow$  ciclo limite atrativo

$c = 0.35$  ciclo limite com período duplo.

$c = 0.375$  ciclo limite com período 4 vezes maior

$c = 0.398$  atrator estranho (período infinito)