

## 2 Cinemática vetorial

### Problema 2

Um berlinde é lançado sobre a superfície horizontal no topo de umas escadas e sai no início das escadas com velocidade horizontal igual a 3 m/s. Cada degrau tem 18 cm de altura e 30 cm de largura. Qual será o primeiro degrau onde o berlinde bate?

No eixo horizontal  $x$ , a projeção da velocidade permanece constante e é igual à velocidade inicial  $v_x = 3$  (unidades SI). A distância que o berlinde se desloca na horizontal é então  $x = 3t$ , a partir de  $t = 0$ , quando abandona a superfície horizontal. Como a largura de cada degrau é 0.3, então o tempo que o berlinde demora em avançar cada degrau é 0.1 segundos. Se durante o tempo que demora até avançar algum degrau a distância vertical que cai chega a ultrapassar a distância que esse mesmo degrau desce, em relação ao ponto inicial, então o berlinde não chegará a ultrapassar esse degrau, batendo nele.

Como tal, é necessário calcular a sequência de posições verticais  $y_n$  em  $t_n = 0.1, 0.2, 0.3, \dots$  e compará-las com as posições verticais dos degraus:  $h_n = -0.18, -0.36, -0.54, \dots$ . O primeiro valor de  $n$  na sequência que faça com que  $y_n$  seja menor que  $h_n$ , será o degrau em que o berlinde bate.

A projeção vertical da velocidade em  $t_0 = 0$  é  $v_y = 0$ , porque o berlinde é lançado horizontalmente. Integrando a aceleração,  $a_y = -9.8$ , em ordem a  $t$ , obtém-se:

$$v_y = -9.8 t$$

Arbitrando  $y_0 = 0$ , a posição  $y$  em qualquer instante  $t$  é então o integral de  $-9.8 t$ , desde zero até  $t$ :

$$y = -4.9 t^2$$

E a sequência de posições verticais é então,

$$y_n = -0.049, -0.196, -0.441, -0.784, \dots$$

Comparando com  $h_n = -0.18 n$ , conclui-se que o berlinde bate no quarto degrau ( $-0.784$  é menor que  $-0.72$ ).

### Problema 6

A velocidade de uma partícula em movimento no plano  $xy$  é dada pela expressão:  $\vec{v} = 3e^{-2t}\hat{i} - 5e^{-t}\hat{j}$  (unidades SI). No instante  $t = 0$  a partícula encontra-se no eixo dos  $y$ , na posição  $2\hat{j}$ .

- (a) Determine em que instante passará pelo eixo dos  $x$  e a que distância da origem estará nesse instante.
- (b) Calcule a aceleração em  $t = 0$  e no instante em que passa pelo eixo dos  $x$ .

A expressão da posição obtém-se somando a posição inicial mais o integral da velocidade, em ordem ao tempo, desde o instante inicial até um instante qualquer

```
(%i1) v: [3*exp(-2*t), -5*exp(-t)]&dollar;
(%i2) r0: [0, 2]&dollar;
(%i3) r: r0 + integrate(v,t,0,t);
(%o3)      [ 3 ( 1/2 - e^-2t/2 ), 2 - 5 (1 - e^-t) ]
(%i4) float(solve(r[2]=0, t));
(%o4)      [ t = 0.5108 ]
(%i5) float(subst(%,r));
(%o5)      [ 0.96, 0.0 ]
```

Ou seja, a partícula passa pelo eixo dos  $x$  no instante  $t = 0.5108$  s e a uma distância de 0.96 m da origem.

```
(%i6) a: diff(v,t);
(%o6)      [-6e^-2t, 5e^-t]
(%i7) subst(t=0,a);
(%o7)      [-6, 5]
(%i8) subst(%o4,a);
(%o8)      [-2.16, 3.0]
```

A aceleração no instante inicial é  $(-6\hat{i} + 5\hat{j}) \text{ m/s}^2$  e quando passa pelo eixo dos  $x$  é  $(-2.16\hat{i} + 3\hat{j}) \text{ m/s}^2$ .

### Problema 9

Uma pedra roda pelo telhado de uma casa, que faz um ângulo de  $20^\circ$  com a horizontal. No instante em que a pedra abandona o telhado e cai livremente, o valor da sua velocidade é  $4 \text{ m/s}$  e encontra-se a uma altura de  $6 \text{ m}$ . Admitindo que a resistência do ar é desprezável,

- Calcule o tempo que demora a cair ao chão, desde o instante em que abandona o telhado.
- A que distância horizontal bate a pedra no chão, em relação ao ponto onde abandonou o telhado?
- Calcule o ângulo que a velocidade da pedra faz com a vertical no instante em que bate no chão.

(a) Com  $x$  na horizontal e  $y$  na vertical, a velocidade inicial é (unidades SI)

$$\vec{v}_i = 4 \cos(20^\circ) \hat{i} - 4 \sin(20^\circ) \hat{j} = 3.759 \hat{i} - 1.368 \hat{j}$$

A posição inicial é  $6 \hat{j}$  e a aceleração é constante:  $\vec{a} = -9.8 \hat{j}$ . A expressão da velocidade obtém-se integrando a aceleração desde o instante inicial até um instante qualquer

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_i + \int_0^t \vec{a}(t') dt' = 3.759 \hat{i} - (1.368 + 9.8 t) \hat{j}$$

e a expressão da posição obtém-se integrando essa expressão da velocidade desde o instante inicial até um instante qualquer

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_i + \int_0^t \vec{v}(t') dt' = 3.759 t \hat{i} + (6 - 1.368 t - 4.9 t^2) \hat{j}$$

O tempo que demora até bater no chão é o tempo que faz com que a componente  $y$  da posição seja nula

$$t = \frac{1.368 - \sqrt{1.368^2 + 4 \times 4.9 \times 6}}{-9.8} = 0.9757 \text{ s}$$

(b) A distância horizontal entre o ponto onde a pedra bate no chão e o ponto onde abandonou o telhado é o valor da componente  $x$  da posição no instante em que bate no chão

$$3.759 \times 0.9757 = 3.668 \text{ m}$$

(c) A velocidade no instante em que bate no chão é

$$3.759 \hat{i} - (1.368 + 9.8 \times 0.9757) \hat{j} = 3.759 \hat{i} - 10.93 \hat{j}$$

e o ângulo que faz com a vertical é a tangente inversa da componente  $x$  dividida pelo valor absoluto da componente  $y$

$$\theta = \arctan\left(\frac{3.759}{10.93}\right) = 18.98^\circ$$

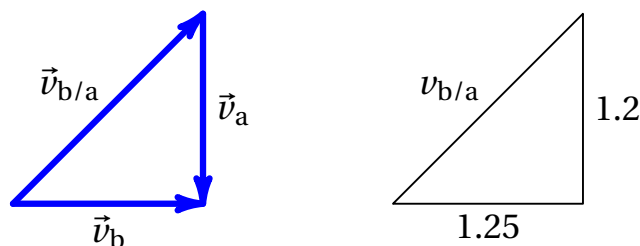
### Problema 10

Um barco transpõe passageiros de uma margem de um rio para a outra margem, seguindo o percurso mais curto de 1.5 km entre as duas margens. Quando o motor do barco funciona na potência máxima, a travessia demora 20 minutos, num dia em que o valor da velocidade da corrente no rio é 1.2 m/s; calcule o valor da velocidade do barco, nesse dia, (a) em relação à Terra e (b) em relação à água. (c) Determine o tempo mínimo que o barco demorava a atravessar o mesmo rio, num dia em que o valor da velocidade da corrente fosse 0.8 m/s.

(a) O barco desloca-se 1500 m entre as duas margens, durante 20 minutos, com velocidade constante. Como tal, a sua velocidade em relação à terra é igual a

$$v_b = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{1500}{20 \times 60} = 1.25 \text{ m/s}$$

(b) A velocidade do barco em relação à água,  $\vec{v}_{b/a}$ , mais a velocidade da corrente,  $\vec{v}_a$ , é igual à velocidade do barco em relação à Terra,  $\vec{v}_b$ , como se mostra na figura seguinte.



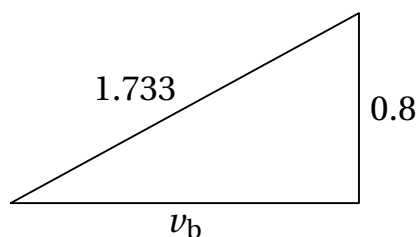
Como o barco atravessa o rio na direção perpendicular às margens, a velocidade da corrente é perpendicular à velocidade do barco e essas duas velocidades são os catetos num triângulo retângulo onde  $v_{b/a}$  é a hipotenusa.

Como tal, a velocidade do barco em relação à água é

$$v_{b/a} = \sqrt{1.25^2 + 1.2^2} = 1.733 \text{ m/s}$$

(c) O motor do barco é responsável pela sua velocidade em relação à água,  $\vec{v}_{b/a}$ . A velocidade em relação à Terra depende também da corrente no rio. O valor de  $v_{b/a}$  calculado na alínea anterior corresponde à velocidade máxima produzida pelo motor. No segundo dia, para atravessar o rio no tempo mínimo, o motor deverá funcionar à sua potência máxima produzindo esse mesmo valor da velocidade,  $v_{b/a}$ , mas a direção do vetor  $\vec{v}_{b/a}$  deverá ser diferente, para que  $\vec{v}_b = \vec{v}_{b/a} + \vec{v}_a$  seja novamente perpendicular às margens do rio.

No triângulo retângulo da figura acima, o comprimento da hipotenusa será então 1.733, mas os catetos terão valores diferentes. O cateto vertical (velocidade da corrente) terá comprimento 0.8.



Como tal, o comprimento do cateto horizontal será:

$$v_b = \sqrt{1.733^2 - 0.8^2} = 1.537 \text{ m/s}$$

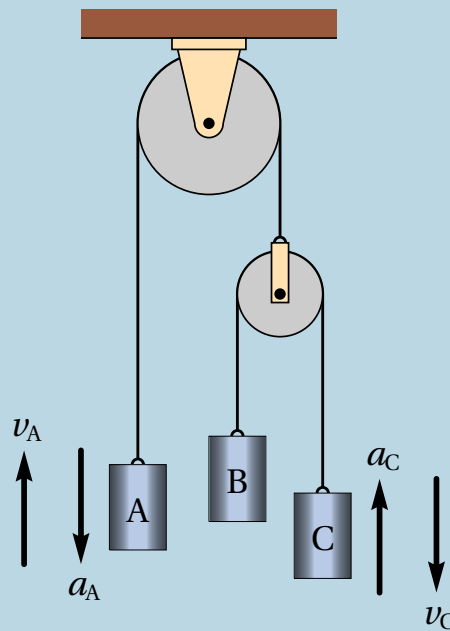
Com essa velocidade, o tempo mínimo necessário para atravessar o rio será

$$\Delta t = \frac{\Delta s}{v_b} = \frac{1500}{1.537} = 975.9 \text{ s}$$

ou seja, aproximadamente 16 minutos e 16 segundos.

**Problema 13**

Três cilindros A, B e C foram pendurados no sistema de duas roldanas que mostra a figura. Num instante, a velocidade do bloco A é  $v_A = 3 \text{ m/s}$ , para cima, e a sua aceleração é  $a_A = 2 \text{ m/s}^2$ , para baixo; no mesmo instante, a velocidade e aceleração do bloco C são:  $v_C = 1 \text{ m/s}$ , para baixo,  $a_C = 4 \text{ m/s}^2$ , para cima. Determine a velocidade e aceleração do bloco B, no mesmo instante, indicando se são para cima ou para baixo.



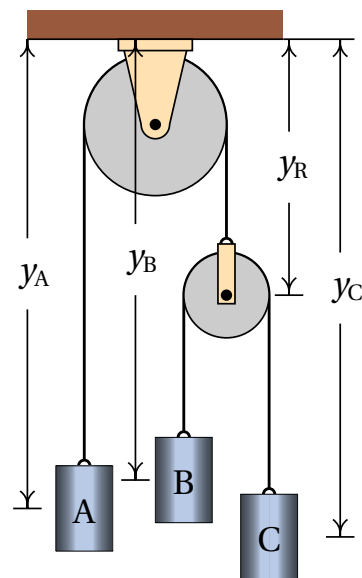
Definem-se 4 variáveis  $y_A$ ,  $y_B$ ,  $y_C$  e  $y_R$  para medir as posições dos cilindros e da roldana móvel, em relação a algo fixo, por exemplo o teto, tal como mostra a figura ao lado.

Como o cilindro A e a roldana móvel estão ligados por um fio, então

$$y_A + y_R = \text{constante}$$

e a ligação dos cilindros B e C com outro fio que passa pela roldana móvel implica:

$$(y_B - y_R) + (y_C - y_R) = \text{constante}$$



Derivando essas duas equações em ordem ao tempo, obtêm-se as relações para as velocidades:

$$\begin{cases} v_A + v_R = 0 \\ v_B + v_C - 2v_R = 0 \end{cases} \implies v_B = -2v_A - v_C$$

Como as distâncias  $y$  aumentam quando os objetos descem, então as velocidades para baixo são positivas e para cima são negativas. Assim sendo, as velocidades dadas no enunciado são  $v_A = -3$  e  $v_C = 1$  e a equação acima dá  $v_B = 5$ ; ou seja, a velocidade do cilindro B é 5 m/s, para baixo.

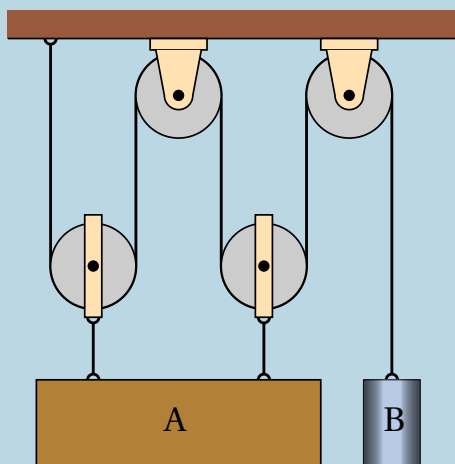
Derivando novamente a relação entre as velocidades obtêm-se a relação entre as acelerações:

$$a_B = -2a_A - a_C$$

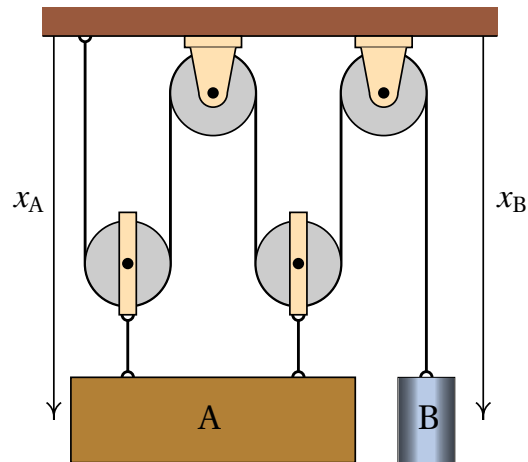
e substituindo os valores dados,  $a_A = 2$  e  $a_C = -4$ , obtêm-se  $a_B = 0$ ; ou seja, a aceleração do cilindro B é nula.

#### Problema 14

No sistema da figura, encontre a relação entre os valores das velocidades e das acelerações da barra A e do cilindro B, admitindo que a barra A permanece sempre horizontal.



Há dois movimentos diferentes: o movimento da barra e das duas roldanas móveis e o movimento do cilindro. Esses dois movimentos são a variação da posição da barra e do cilindro em relação a algum objeto fixo; usando como referência o teto (ver figura) as posições da barra e do cilindro são  $x_A$  e  $x_B$ .



A distância entre o centro de uma das roldanas móveis e o centro de uma das roldanas fixas é  $x_A$  menos uma constante. Assim sendo, o comprimento do fio é

$$L = 4 x_A + x_B + \text{constantes}$$

Derivando esta equação em ordem ao tempo obtém-se

$$v_B = -4 v_A$$

e derivando novamente

$$a_B = -4 a_A$$