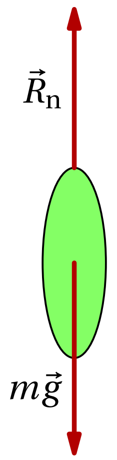
4 Mecânica vetorial

Problema 1
Uma pessoa com 70 kg sobe num ascensor até o sexto andar de um prédio. O ascensor parte do repouso no rés de chão, acelera até o segundo andar, com aceleração uniforme de 2 m/s^2, mantém a velocidade constante entre o segundo e o quarto andar e trava entre o quarto e o sexto andar, com aceleração uniforme de -2 m/s^2. Determine o módulo da reação normal nos pés da pessoa, em cada parte do percurso.



A figura mostra o diagrama de corpo livre da pessoa, onde $\vec{R}_\text{n}$ é a reação normal do chão do elevador nos seus pés. Definindo o sentido positivo de baixo para cima, a soma das duas forças externas é então

$$R_\text{n} - m\,g = R_\text{n} - 686$$

Entre o rés de chão e o segundo andar a força resultante aponta para cima e, assim sendo

$$R_\text{n} - 686 = 70 \times 2 \quad \Longrightarrow \quad R_\text{n} = 826\ \text{N}$$

Entre o segundo e o quarto andar, a força resultante é nula

$$R_\text{n} - 686 = 0 \quad \Longrightarrow \quad R_\text{n} = 686\ \text{N}$$

Finalmente, entre o quarto e o sexto andar, a força resultante é negativa, porque aponta para baixo

$$R_\text{n} - 686 = -70 \times 2 \quad \Longrightarrow \quad R_\text{n} = 546\ \text{N}$$

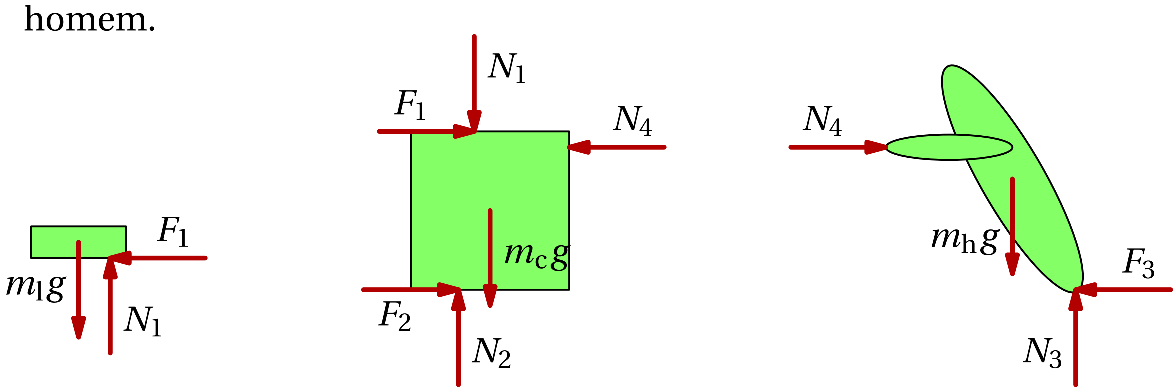
Problema 5

Um homem com 72 kg empurra uma caixa de madeira com 8 kg sobre um chão horizontal, exercendo uma força horizontal nela que a faz deslizar no chão. Sobre a caixa está pousado um livro com 0.6 kg. O homem, a caixa e o livro deslocam-se conjuntamente, com aceleração igual a 0.5 m/s^2. Determine os valores das forças de atrito entre o chão e a caixa, entre a caixa e o livro e entre o chão e os pés do homem, ignorando a resistência do ar e sabendo que os coeficientes de atrito estático (μ_e) e atrito cinético (μ_c) são: entre o chão e a caixa, $\mu_\text{e} = 0.25$ e $\mu_\text{c} = 0.2$; entre a caixa e o livro, $\mu_\text{e} = 0.35$ e $\mu_\text{c} = 0.28$; entre o chão e os pés do homem, $\mu_\text{e} = 0.4$ e $\mu_\text{c} = 0.3$.

Existem quatro pontos de contacto entre corpos rígidos:

1. Entre a base do livro e a tampa da caixa.
2. Entre a base da caixa e o chão.
3. Entre os pés do homem e o chão.
4. Entre as mãos do homem e a parede lateral direita da caixa (admitindo que está a ser empurrada para a esquerda).

Em 1 há reação normal, N_1, vertical, e força horizontal, F_1, de atrito estático porque o livro não está a deslizar sobre a caixa. Em 2 há força de reação normal, N_2, vertical, e força horizontal, F_2, de atrito cinético, porque a caixa desliza sobre o chão. Em 3 há reação normal, N_3, vertical, e força horizontal, F_3, de atrito estático porque os pés do homem não derrapam sobre o chão. Em 4 há apenas reação normal, N_4, porque o enunciado diz que a força que o homem exerce na caixa é horizontal. A figura seguinte mostra os diagramas de corpo livre do livro, da caixa e do homem.



No livro, F_1 aponta para a esquerda, porque o livro acelera para a esquerda. O mesmo acontece com a força F_3 no homem. Essas duas forças de atrito estático não podem ultrapassar o valor máximo, $\mu_e N$, mas podem ter qualquer valor entre 0 e esse valor máximo. A força de atrito cinético F_2 é no sentido oposto ao movimento da caixa e tem módulo igual a $F_2 = \mu_c N_2 = 0.2\,N_2$. Os pesos do livro, da caixa e do homem são: $P_l = 5.88$ N, $P_c = 78.4$ N e $P_h = 705.6$ N.

As duas equações de movimento de translação do livro são (unidades SI):

$$N_1 = 5.88 \qquad\qquad F_1 = m_l\, a = 0.6 \times 0.5 = 0.3$$

As equações de movimento de translação da caixa são:

$$N_2 = 78.4 + N_1 = 84.28 \qquad\qquad N_4 - F_1 - F_2 = m_c\, a$$
$$\Longrightarrow \quad N_4 = 8 \times 0.5 + 0.3 + 0.2 \times 84.28 = 21.156$$

E as equações de movimento de translação do homem são:

$$N_3 = 705.6 \qquad\qquad F_3 - N_4 = m_h\, a$$
$$\Longrightarrow \quad F_3 = 72 \times 0.5 + 21.156 = 57.156$$

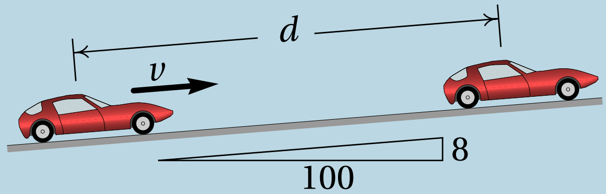
O valor máximo que pode ter F_1 é $0.35\,N_1 = 2.058$ e o valor máximo possível de F_3 é $0.4\,N_3 = 282.24$. Como os resultados obtidos não ultrapassam esses valores máximos, esses resultados são válidos e a resposta é: a força de atrito entre a caixa e o livro é 0.3 N, a força de atrito entre a caixa e o chão é $0.2 \times 84.28 = 16.856$ N e a força de atrito entre o chão e os pés do homem é 57.156 N.

Problema 6

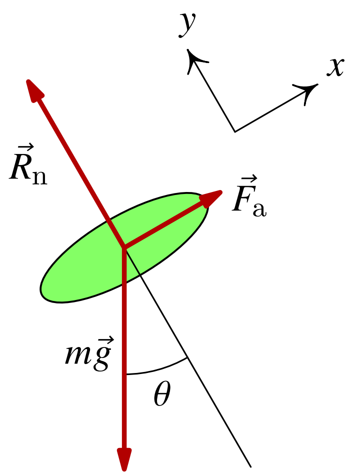
Um automóvel com 1230 kg sobe uma rampa com declive de 8 por cento, com velocidade constante. Determine:

(*a*) O valor da força de atrito total (soma das forças nos quatro pneus).

(*b*) O valor mínimo do coeficiente de atrito estático entre a estrada e os pneus para que o automóvel consiga subir a rampa.



A figura mostra o diagrama de corpo livre do automóvel, onde $\vec{R}_\text{n}$ e $\vec{F}_\text{a}$ são a soma das reações normais e das forças de atrito nos quatro pneus (para que $\vec{F}_\text{a}$ aponte no sentido do movimento, deve ser atrito estático, pelo menos em alguns dos pneus). Como a velocidade é linear e constante, a aceleração é nula e a soma das forças externas também. Usando os dois eixos indicados na figura, as somas das componentes x e y das forças devem ser ambas nulas



$$R_\text{n} - m\,g\,\cos\theta = 0 \qquad\qquad F_\text{a} - m\,g\,\sin\theta = 0$$

(a) Como o ângulo θ é igual à inclinação da rampa, então a segunda equação conduz a

$$F_\text{a} = m\,g\,\sin\theta = \frac{1230 \times 9.8 \times 8}{\sqrt{100^2 + 8^2}} = 961.2\ \text{N}$$

(b) A reação normal determina-se resolvendo a condição da soma das componentes y das forças

$$R_\text{n} = m\,g\,\cos\theta = \frac{1230 \times 9.8 \times 100}{\sqrt{100^2 + 8^2}} = 12015.6\ \text{N}$$

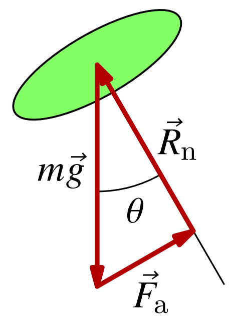
E como

$$F_\text{a} \le \mu_\text{e}\,R_\text{n}$$

então

$$\mu_\text{e} \ge \frac{F_\text{a}}{R_\text{n}} \qquad \Longrightarrow \qquad \mu_\text{e} \ge 0.08$$

Este problema também podia ser resolvido colocando as três forças uma a continuação da outra, como se mostra na figura ao lado. Como a força resultante é nula, os três vetores formam um triângulo, que neste caso é retângulo e semelhante ao triângulo da rampa. Por semelhança de triângulos conclui-se que a força de atrito é igual a $8\,m\,g/\sqrt{10064}$, a reação normal é igual a $100\,m\,g/\sqrt{10064}$ e o coeficiente de atrito mínimo é $8/100$.

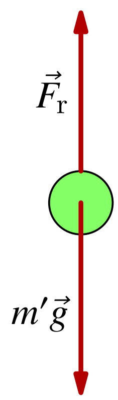


Problema 8

Uma esfera de raio R e massa volúmica ρ_e cai livremente dentro de um fluido com massa volúmica ρ e coeficiente de viscosidade η. (*a*) Encontre as expressões para a velocidade terminal quando a resistência do fluido é proporcional à velocidade ou quando é proporcional ao quadrado da velocidade. (*b*) Calcule a velocidade terminal dentro de glicerina, água e ar de uma esfera de aço (massa volúmica 7800 kg/m^3) e diâmetro de 1 cm; em cada caso determine o valor do número de Reynolds. Use os dados na tabela seguinte:

Fluido	**Viscosidade** (kg/(m·s))	**Massa volúmica** (kg/m^3)
Glicerina	1.5	1200
Água	10^{-3}	1000
Ar	1.8×10^{-5}	1.2

(*a*) A figura mostra o diagrama de corpo livre da esfera, onde m' é igual à massa da esfera menos a massa do fluido que ocuparia o mesmo volume da esfera e $\vec{F}_r$ é a força de resistência do fluído, que inicialmente é nula, mas aumenta à medida que a velocidade da esfera aumenta. No instante em que o módulo da força de resistência seja igual ao peso, a aceleração será nula, a esfera atingirá a velocidade limite constante e a força de resistência permanecerá também constante. Como tal, a condição que permite determinar a velocidade terminal é



$$m' g = F_r \quad\Longrightarrow\quad \frac{4}{3}\pi R^3 (\rho_e - \rho)\, g = F_r$$

No caso da força de resistência proporcional à velocidade, a equação 4.12 para uma esfera conduz à seguinte expressão

$$\frac{4}{3}\pi R^3 (\rho_e - \rho)\, g = 6\pi\eta R v$$

$$v = \frac{2R^2 g}{9\eta}(\rho_e - \rho)$$

E no caso da força de resistência proporcional ao quadrado da velocidade, a equação 4.14 para uma esfera conduz à seguinte expressão

$$\frac{4}{3}\pi R^3 (\rho_e - \rho)\, g = \frac{\pi}{4}\rho R^2 v^2$$
$$v = \sqrt{\frac{16}{3} R g \left(\frac{\rho_e}{\rho} - 1\right)}$$

(*b*) Na glicerina, como a viscosidade é elevada, admite-se que a força de resistência seja proporcional à velocidade e, assim sendo, a velocidade terminal da esfera é

$$v = \frac{2 \times 0.005^2 \times 9.8}{9 \times 1.5}(7800 - 1200) = 0.240\,\text{m/s}$$

Usando o raio da esfera, o número de Reynolds é

$$N_\text{R} = 0.005 \times 0.240 \left(\frac{1200}{1.5}\right) = 0.958$$

Que por ser da ordem de grandeza das unidades corrobora que a força de resistência sim é proporcional à velocidade. Os mesmos cálculos no caso da água conduzem aos seguintes resultados

$$v = \frac{2 \times 0.005^2 \times 9.8}{9 \times 10^{-3}}(7800 - 1000) = 370.2\,\text{m/s}$$
$$N_\text{R} = 0.005 \times 370.2 \left(\frac{1000}{10^{-3}}\right) = 1.85 \times 10^6$$

Que é um resultando inconsistente, porque o número de Reynolds é da ordem dos milhões. Isso implica que é necessário repetir os cálculos admitindo que a força de resistência é proporcional ao quadrado da velocidade

$$v = \sqrt{\frac{16}{3} \times 0.005 \times 9.8 \left(\frac{7800}{1000} - 1\right)} = 1.33\,\text{m/s}$$
$$N_\text{R} = 0.005 \times 1.33 \left(\frac{1000}{10^{-3}}\right) = 6665$$

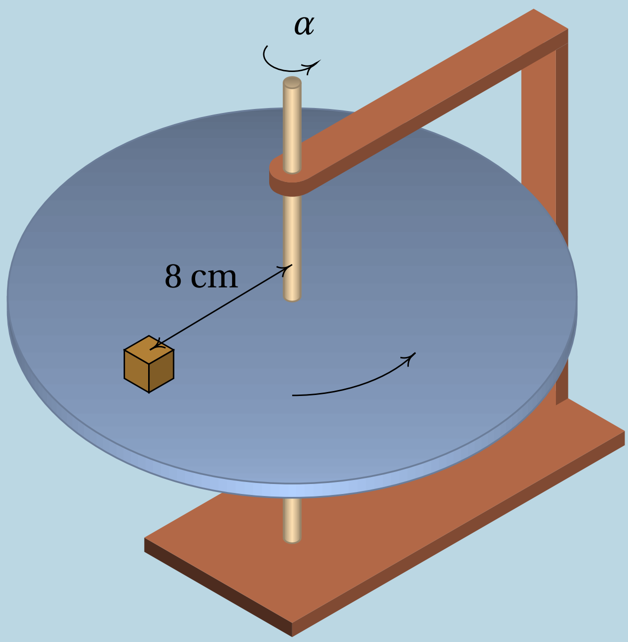
Que sim é um resultado consistente. Repetindo os mesmos cálculos para o caso do ar, encontra-se

$$v = \sqrt{\frac{16}{3} \times 0.005 \times 9.8 \left(\frac{7800}{1.2} - 1\right)} = 41.2\,\text{m/s}$$

$$N_\text{R} = 0.005 \times 41.2 \left(\frac{1.2}{1.8 \times 10^{-5}}\right) = 13737$$

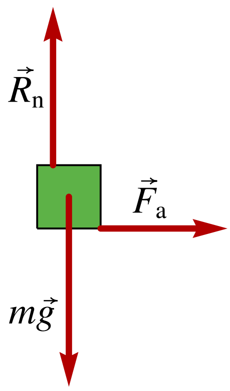
Problema 10

Para medir o coeficiente de atrito estático entre um bloco e um disco, fez-se rodar o disco com uma aceleração angular $\alpha = 5\ \text{rad/s}^2$ constante. O disco parte do repouso em $t = 0$ e no instante $t = 0.82$ s o bloco começa a derrapar sobre o disco. Determine o valor do coeficiente de atrito estático.



A figura seguinte mostra o diagrama de corpo livre do bloco, onde $\vec{R}_\text{n}$ é a reação normal e $\vec{F}_\text{a}$ a força de atrito estático. Como não há movimento vertical, a reação normal é igual ao peso e a força de atrito é a força resultante $F_\text{a} = m\,a$. Enquanto o bloco acompanha o movimento do disco, a sua aceleração a é a mesma aceleração do movimento circular do disco, ou seja

$$F_\text{a} = m\sqrt{a_\text{t}^2 + a_\text{n}^2} = m\sqrt{\alpha^2 r^2 + \omega^4 r^2} = m\,r\,\sqrt{\alpha^2 + \omega^4}$$



No instante em que o bloco começa a derrapar, a força de atrito estático é máxima, e

$$\mu_e = \frac{F_a}{R_n} = \frac{r}{g}\sqrt{\alpha^2 + \omega^4}$$

Para encontrar a velocidade angular no instante em que o bloco começa a derrapar, integra-se a equação que relaciona a aceleração angular com a velocidade angular e o tempo, $\alpha = \dot{\omega}$. Usando o método de separação de variáveis,

$$\int_0^{\omega} d\omega = \int_0^{0.82} 5\,dt \quad \Longrightarrow \quad \omega = 4.1$$

E substituindo na expressão para o coeficiente de atrito

$$\mu_e = \frac{0.08}{9.8}\sqrt{5^2 + 4.1^4} = 0.143$$