12 Sistemas caóticos

Problema 3

O sistema de Rössler é definido pelas seguintes equações de evolução, com 3 parâmetros positivos a, b e c: </p>

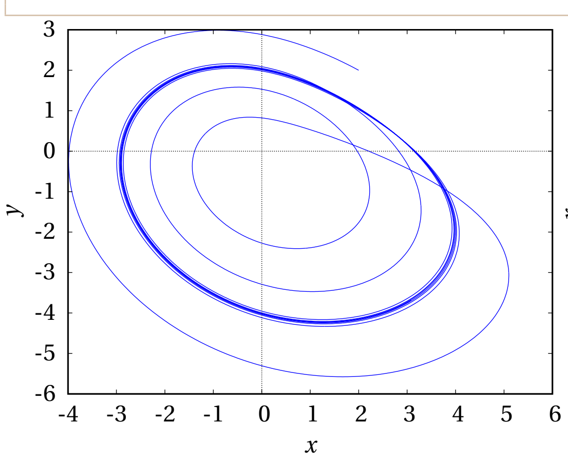
$$\begin{aligned}
\dot{x} &= -y - z \\
\dot{y} &= x + c\,y \\
\dot{z} &= a + (x - b)\,z
\end{aligned}$$

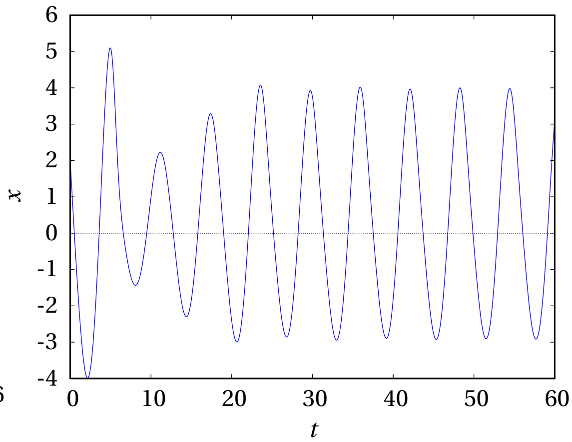
Investigue a solução do sistema com $a = 2$ e $b = 4$ fixos e com os seguintes valores de c: (a) $c = 0.3$ (b) $c = 0.35$ (c) $c = 0.375$ (d) $c = 0.398$.

Em cada caso use o programa rk para obter a solução, com incrementos de tempo $\Delta\, t = 0.01$ e de forma a que sejam feitas 6000 iterações. Pode usar como valores iniciais $x = y = z = 2$. Trace os gráficos da curva projetada no plano $x\,y$ e de x em função de t. Volte a executar 6000 iterações do programa rk, mas agora usando como valores iniciais os valores finais obtidos na primeira execução do programa (o comando rest (last (lista)) extrai o último vetor na lista anterior, excluindo o tempo). Trace novamente os mesmos gráficos e repita o procedimento até conseguir concluir qual é o conjunto limite positivo da curva considerada e se for um ciclo, determine o seu período. Em cada alínea diga qual é o conjunto limite, o seu período (se for um ciclo) e mostre um gráfico que justifique a sua conclusão.

(a) Os quatro comandos seguintes do Maxima definem uma lista com as expressões nos três lados direitos das equações de evolução, com os parâmetros $a = 2$, $b = 4$ e $c = 0.3$. A seguir, usa-se o programa rk usando a lista anterior para definir a velocidade de fase, com variáveis de estado $(x,\ y,\ z)$, valores iniciais $(2, 2, 2)$ e incrementos de tempo iguais a 0.01. Como o sistema é autónomo, o valor inicial de t pode ser qualquer, por exemplo, 0; com esse valor inicial, o valor final de t deverá ser 60, para que sejam executadas 6000 iterações. A solução, na lista sol, usa-se para traçar os gráficos da sua projeção no plano xy e de x em função de t. A seguir aos comandos mostram-se os gráficos obtidos.

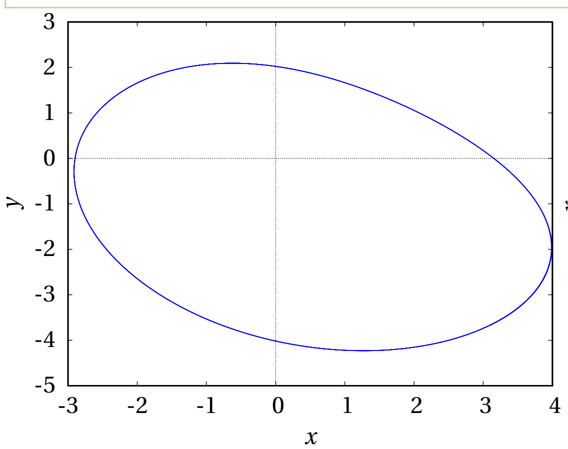
```
(%i1) f: [-y-z, x+0.3*y, 2+(x-4)*z]$
(%i2) sol: rk(f, [x,y,z], [2,2,2], [t,0,60,0.01])$
(%i3) plot2d([discrete, makelist([p[2],p[3]], p, sol)])$
(%i4) plot2d([discrete, makelist([p[1],p[2]], p, sol)],
                [xlabel,"t"], [ylabel,"x"])$
```

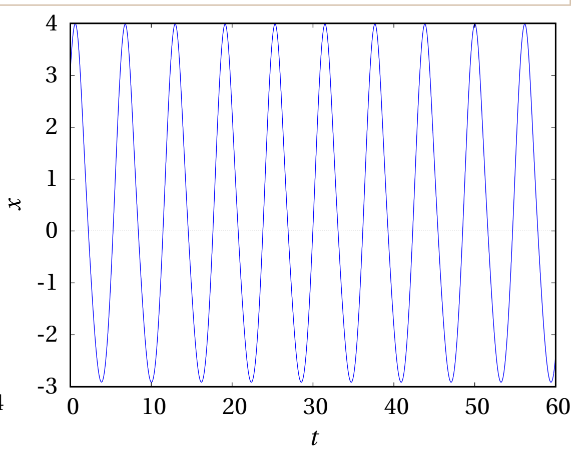




Para saber se a curva de evolução já está próxima do seu conjunto limite positivo, convém executar os mesmos comandos anteriores, usando agora como valores iniciais os valores finais da última iteração, para observar a continuação da curva no próximo intervalo $\Delta t = 60$.

```
(%i5) sol: rk(f, [x,y,z], rest(last(sol)), [t,0,60,0.01])$
(%i6) plot2d([discrete, makelist([p[2],p[3]], p, sol)])$
(%i7) plot2d([discrete, makelist([p[1],p[2]], p, sol)],
                [xlabel,"t"], [ylabel,"x"])$
```



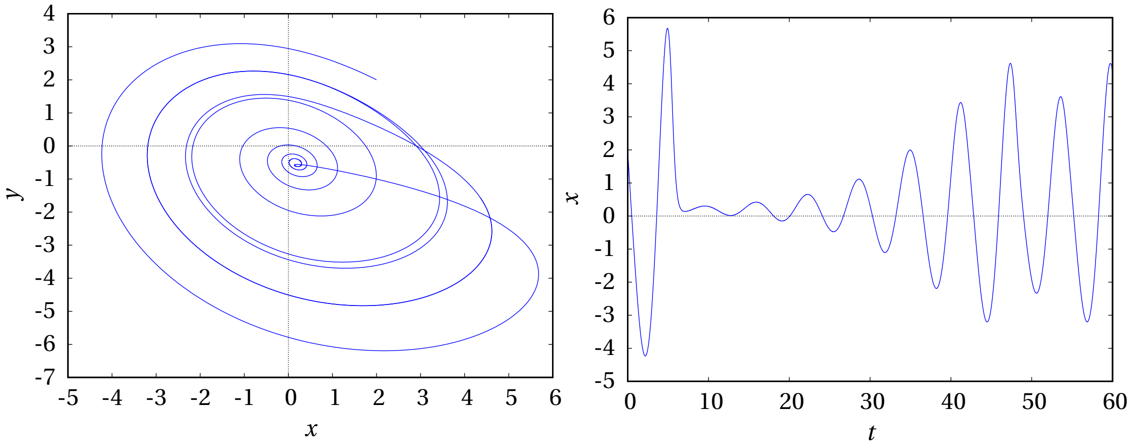


Estes últimos gráficos mostram que o sistema entrou num ciclo limite atrativo (conjunto limite positivo). O período desse ciclo pode obter-se, de forma aproximada, colocando o cursor por cima de dois dos valores máximos no gráfico de $x(t)$ e registando os valores de t indicados pelo Maxima. Convém usar dois máximos que estejam o mais afastados possível no gráfico e dividir pelo número de oscilações entre esses dois máximos. No gráfico acima, com 9 oscilações, o valor medido para o período é:

$$T_1 = \frac{\Delta t}{n} = \frac{56.1828 - 0.634997}{9} = 6.172$$

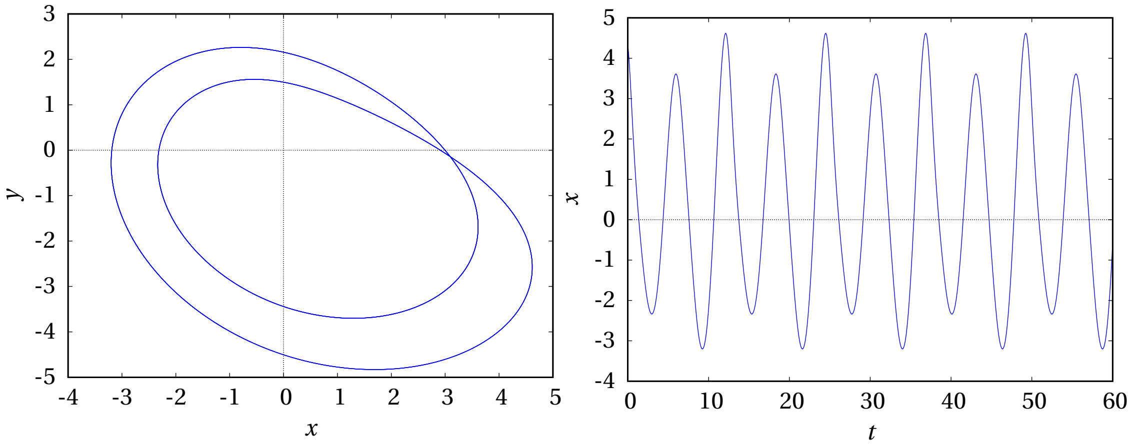
(b) Com $c = 0.35$, repete-se o mesmo procedimento da alínea anterior.

```
(%i8) f: [-y-z, x+0.35*y, 2+(x-4)*z]$
(%i9) sol: rk(f, [x,y,z], [2,2,2], [t,0,60,0.01])$
(%i10) plot2d([discrete, makelist([p[2],p[3]], p, sol)])$
(%i11) plot2d([discrete, makelist([p[1],p[2]], p, sol)],
              [xlabel,"t"], [ylabel,"x"])$
```



E mais 6000 iterações a partir dos valores finais das variáveis de estado após as primeiras 6000 iterações.

```
(%i12) sol: rk(f, [x,y,z], rest(last(sol)), [t,0,60,0.01])$
(%i13) plot2d([discrete, makelist([p[2],p[3]], p, sol)])$
(%i14) plot2d([discrete, makelist([p[1],p[2]], p, sol)],
              [xlabel,"t"], [ylabel,"x"])$
```



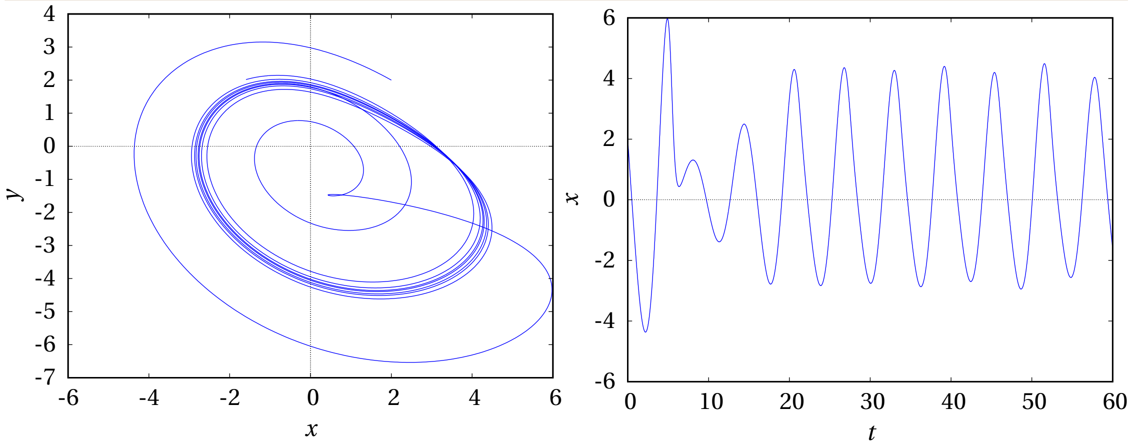
O sistema entrou novamente num ciclo limite atrativo (conjunto limite positivo), que dá duas voltas no espaço de fase antes de se repetir. No gráfico de $x(t)$ observam-se 4 oscilações completas, cada uma com dois máximos locais e dois mínimos locais. O valor medido para o período é:

$$T_2 = \frac{\Delta t}{n} = \frac{55.4849 - 5.92202}{4} = 12.39$$

que é aproximadamente o dobro do período T_1 no ciclo simples obtido com $c = 0.3$. Diz-se que existe uma bifurcação do sistema entre $c = 0.3$ e $c = 0.35$, que se manifesta por uma duplicação do período de oscilação.

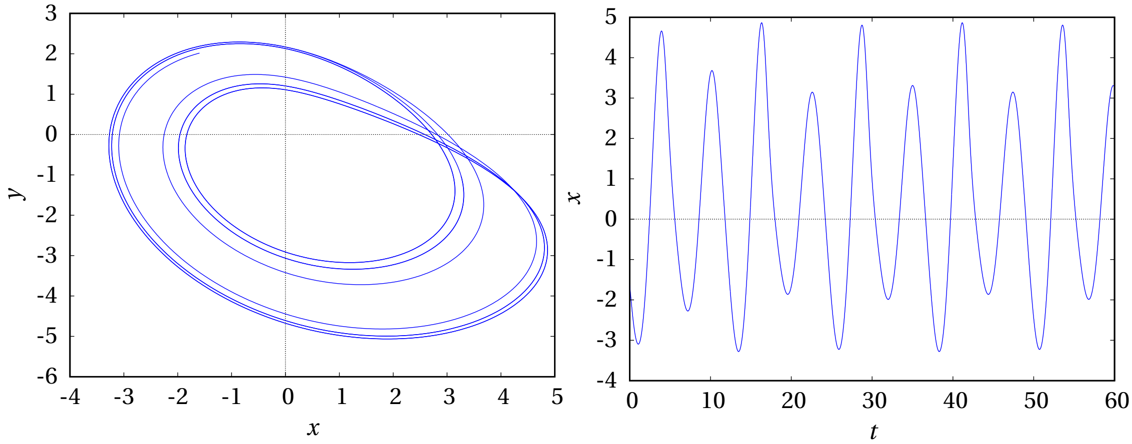
(c) Repetem-se novamente os comandos das alíneas anteriores, agora com $c = 0.375$.

```
(%i15) f: [-y-z, x+0.375*y, 2+(x-4)*z]$
(%i16) sol: rk(f, [x,y,z], [2,2,2], [t,0,60,0.01])$
(%i17) plot2d([discrete, makelist([p[2],p[3]], p, sol)])$
(%i18) plot2d([discrete, makelist([p[1],p[2]], p, sol)],
              [xlabel,"t"], [ylabel,"x"])$
```



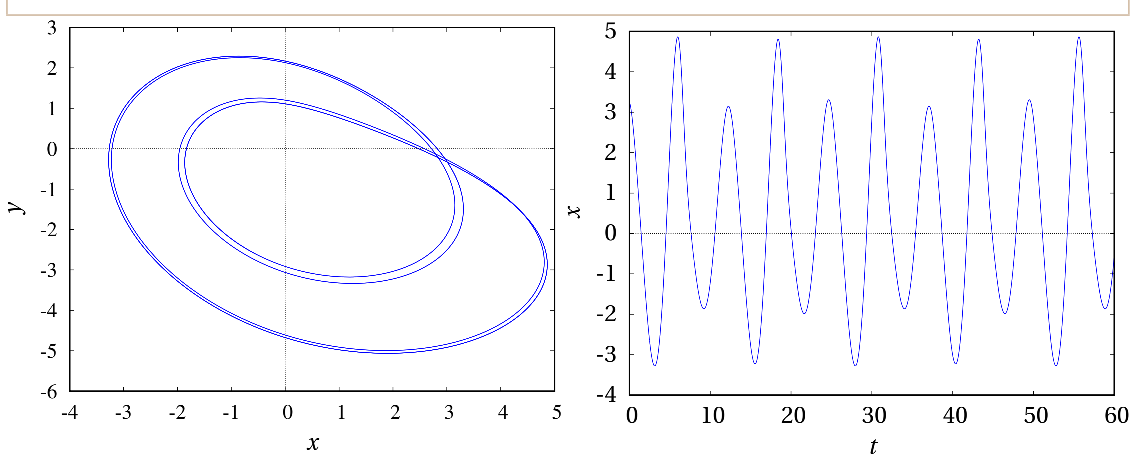
E deixa-se evoluir a solução durante outro intervalo $\Delta t = 60$.

```
(%i19) sol: rk(f, [x,y,z], rest(last(sol)), [t,0,60,0.01])$
(%i20) plot2d([discrete, makelist([p[2],p[3]], p, sol)])$
(%i21) plot2d([discrete, makelist([p[1],p[2]], p, sol)],
              [xlabel,"t"], [ylabel,"x"])$
```



O gráfico no plano xy mostra que o sistema ainda não entrou no ciclo limite, porque a curva não é fechada. Deixaremos evoluir a solução durante mais um intervalo $\Delta t = 60$.

```
(%i22) sol: rk(f, [x,y,z], rest(last(sol)), [t,0,60,0.01])$
(%i23) plot2d([discrete, makelist([p[2],p[3]], p, sol)])$
(%i24) plot2d([discrete, makelist([p[1],p[2]], p, sol)],
              [xlabel,"t"], [ylabel,"x"])$
```



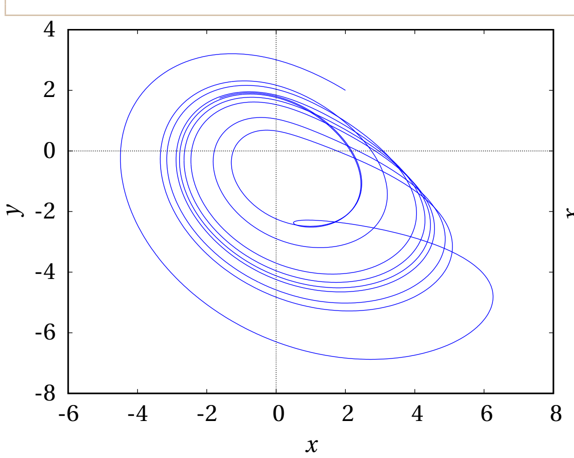
O sistema já entrou no ciclo limite atrativo que é agora de quarta ordem: há 4 máximos locais e 4 mínimos locais em cada oscilação e o ciclo dá quatro voltas no espaço de fase antes de se repetir. No gráfico de $x(t)$ observam-se apenas 2 oscilações completas e o valor medido para o período é:

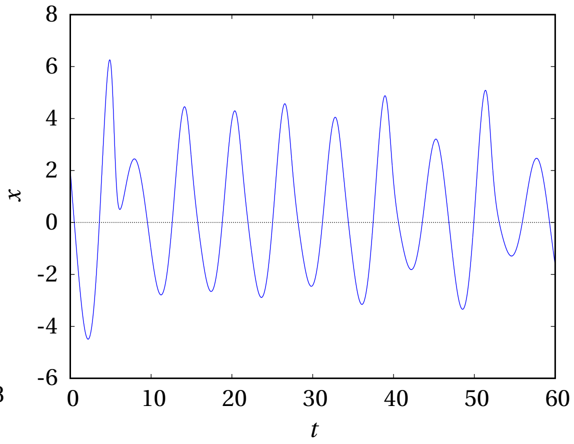
$$T_4 = \frac{\Delta t}{n} = \frac{55.4849 - 5.92202}{2} = 24.81$$

que é aproximadamente o dobro do período T_2 no ciclo de segunda ordem obtido com $c = 0.35$. Existe uma segunda bifurcação do sistema entre $c = 0.35$ e $c = 0.375$ que conduz a uma nova duplicação do período de oscilação.

(d) Repetem-se novamente os comandos das alíneas anteriores, agora com $c = 0.398$.

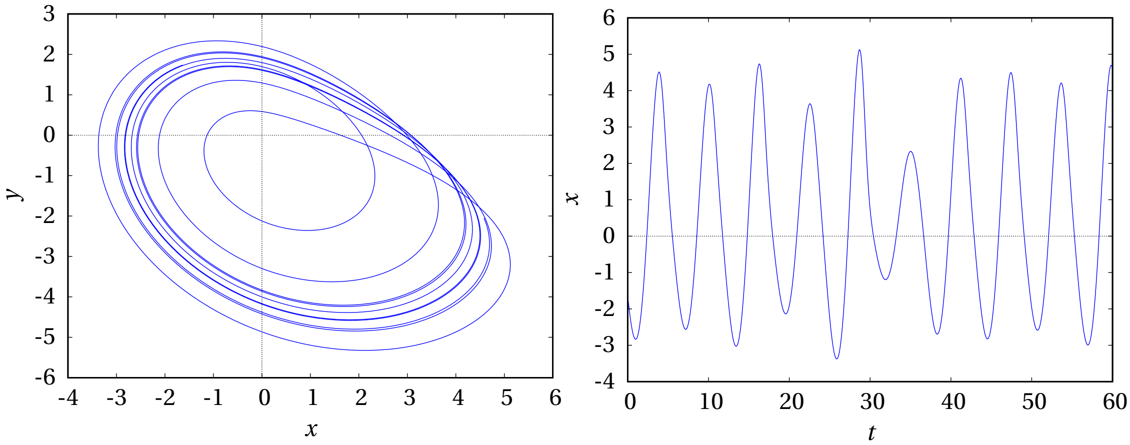
```
(%i25) f: [-y-z, x+0.398*y, 2+(x-4)*z]$
(%i26) sol: rk(f, [x,y,z], [2,2,2], [t,0,60,0.01])$
(%i27) plot2d([discrete, makelist([p[2],p[3]], p, sol)])$
(%i28) plot2d([discrete, makelist([p[1],p[2]], p, sol)],
              [xlabel,"t"], [ylabel,"x"])$
```





E deixa-se evoluir a solução durante outro intervalo $\Delta t = 60$.

```
(%i29) sol: rk(f, [x,y,z], rest(last(sol)), [t,0,60,0.01])$
(%i30) plot2d([discrete, makelist([p[2],p[3]], p, sol)])$
(%i31) plot2d([discrete, makelist([p[1],p[2]], p, sol)],
              [xlabel,"t"], [ylabel,"x"])$
```

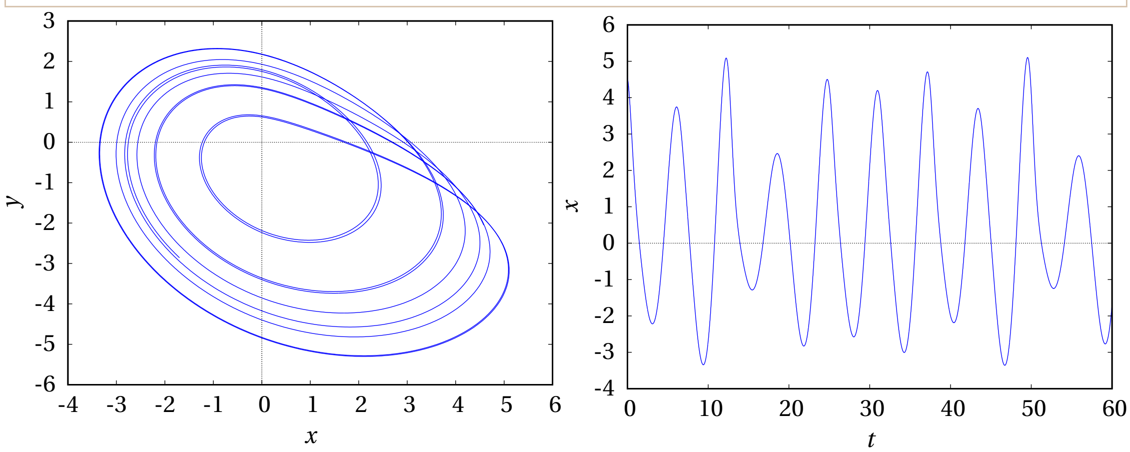


Continuando com mais intervalos $\Delta t = 60$ observa-se que nunca se consegue reproduzir o mesmo resultado do intervalo anterior:

```
(%i32) sol: rk(f, [x,y,z], rest(last(sol)), [t,0,60,0.01])$

(%i33) plot2d([discrete, makelist([p[2],p[3]], p, sol)])$

(%i34) plot2d([discrete, makelist([p[1],p[2]], p, sol)],
                [xlabel,"t"], [ylabel,"x"])$
```



No aumento de c de 0.375 para 0.398 houve infinitas bifurcações. O intervalo entre os valores de c onde há novas bifurcações é cada vez menor, de forma que o período de oscilação aproxima-se de infinito. O sistema é caótico quando $c = 0.398$ e os últimos dois gráficos mostram duas partes do ciclo limite, que é um atrator estranho.