9 Sistemas lineares

Problema 1

Em cada caso, use o Maxima para encontrar os valores e vetores próprios do sistema. Diga que tipo de ponto de equilíbrio tem cada sistema e represente os retratos de fase.

(a) $\dot{x} = x + y \qquad \dot{y} = 4\,x + y$

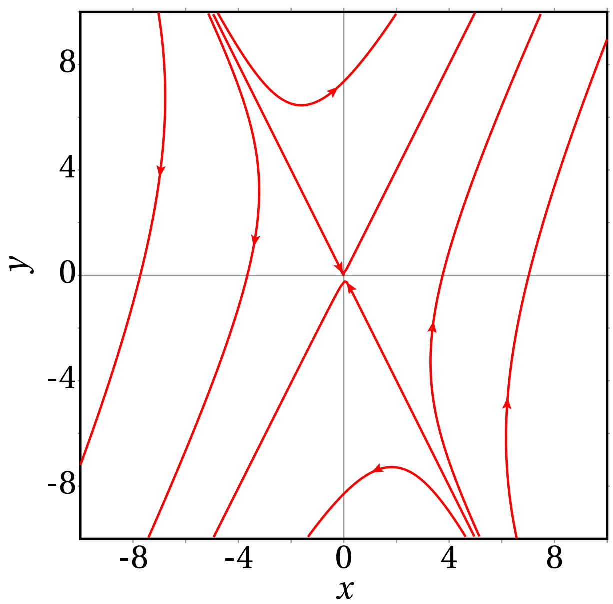
(b) $\dot{x} = -3\,x + \sqrt{2}\,y \; \dot{y} = \sqrt{2}\,x - 2\,y$

(c) $\dot{x} = x - y \qquad \dot{y} = x + 3\,y$

(a) No Maxima

```
(%i1) vars: [x, y]$
(%i2) A: matrix ([1,1], [4,1])$
(%i3) eigenvectors (A);
(%o3)    [[[3,-1], [1, 1]], [[[1, 2 ]], [[1,-2 ]]]]
(%i4) plotdf (list_matrix_entries (A.vars), vars, [vectors,""]);
```

E após traçar algumas curvas de evolução, o retrato de fase é



Os valores próprios são 3, com vetor próprio (1, 2), e -1, com vetor próprio (1,-2). O ponto de equilíbrio é ponto de sela.

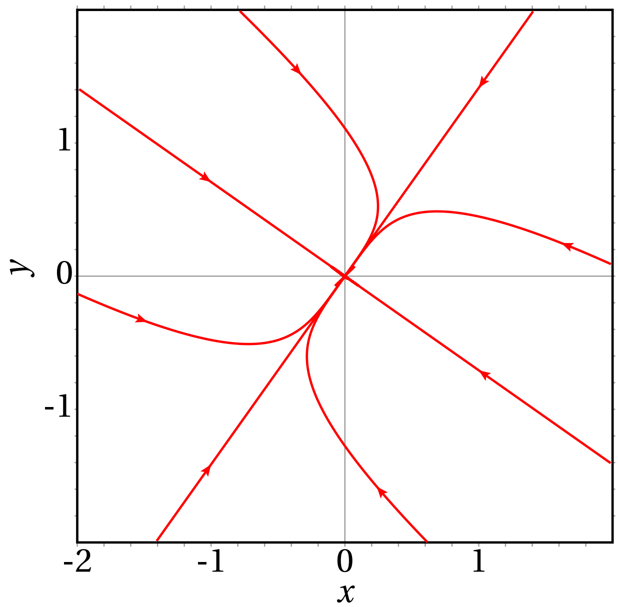
(b)

```
(%i5) A: matrix ([-3,sqrt(2)], [sqrt(2),-2])$
(%i6) eigenvectors (A);
```

$$(\%o6)\quad \left[[[-4,-1],\ [1,\ 1]],\ \left[\left[\left[1,\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right] \right],\ [[1,\ \sqrt{2}\ ]] \right] \right]$$

```
(%i7) plotdf (list_matrix_entries (A.vars), vars, [vectors,""],
        [x,-2,2], [y,-2,2]);
```

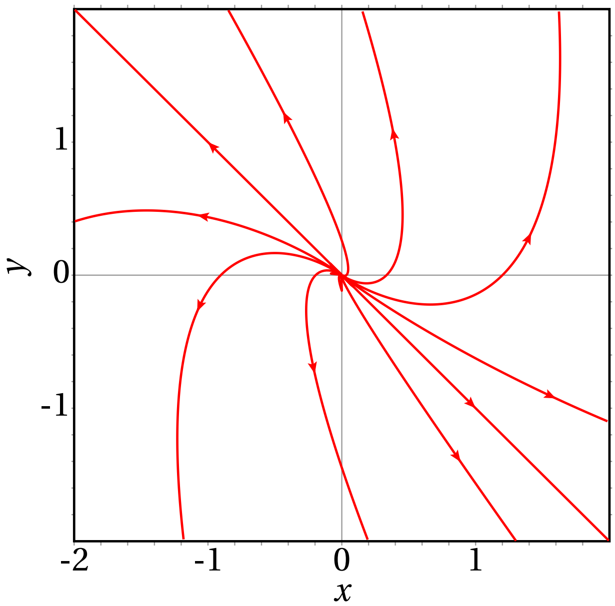
Os valores próprios são -4, com vetor próprio (1, -1/$\sqrt{2}$), e -1, com vetor próprio (1,$\sqrt{2}$). O ponto de equilíbrio é nó atrativo.



(c)

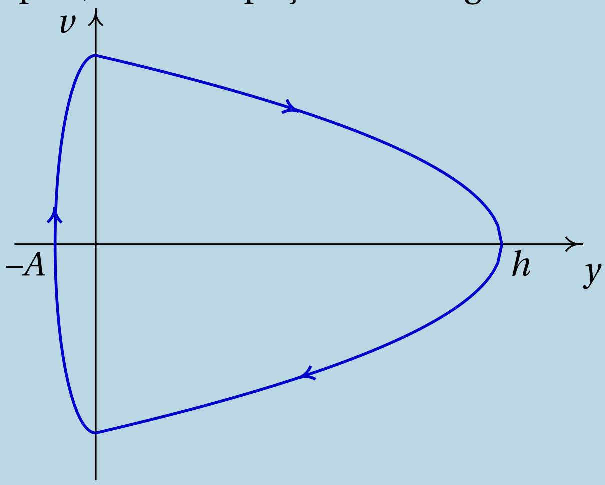
```
(%i8) A: matrix ([1,-1], [1,3])$
(%i9) eigenvectors (A);
(%o9)    [[[2], [2 ]], [[[1, -1 ]]]]
(%i10) plotdf (list_matrix_entries (A.vars), vars, [vectors,""],
         [x,-2,2], [y,-2,2]);
```

Existe um único valor próprio igual a 2, com vetor próprio (1, -1). O ponto de equilíbrio é nó impróprio repulsivo.



Problema 2

A figura mostra a curva de evolução hipotética de uma bola que cai em queda livre e é disparada para cima novamente após ter batido no chão, se não existisse nenhuma força dissipativa. A parte do gráfico para valores positivos de y corresponde ao lançamento vertical de um projétil, ignorando a resistência do ar. A parte do gráfico para valores negativos de y corresponde à deformação elástica da bola quando choca com o chão; durante o tempo de contacto com o chão, admite-se que o movimento vertical da bola é um movimento harmónico simples, sem dissipação de energia.



Sabendo que a altura máxima atingida pela bola é $h = 10$ m e que a deformação máxima quando a bola bate no chão é $A = 1$ cm, determine:

(a) A velocidade máxima da bola ao longo do seu movimento.

(b) A frequência angular da deformação elástica da bola.

(c) O tempo que a bola pernaece em contacto com o chão.

(*a*) No ponto de altura máxima, com coordenadas (10, 0) no espaço de fase, a energia mecânica é

$$E_\mathrm{m} = \frac{m}{2}\,v^2 + m\,g\,h = 0 + 98\,m$$

e no ponto (0, v_m), onde a velocidade é máxima, a energia potencial é nula e a energia mecânica é então igual à energia cinética

$$98\,m = \frac{m}{2}\,v_m^2 \qquad \Longrightarrow \qquad v_m = \sqrt{196} = 14\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

(*b*) No ponto (−0.01,0), onde a deformação elástica é máxima, a energia cinética é nula e a energia mecânica é igual à energia potencial de um oscilador harmónico com constante elástica k

$$98\,m = \frac{k}{2}\,0.01^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{k}{m} = 1960000$$

A frequência angular de oscilação é então

$$\Omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{1960000} = 1400\ \mathrm{s}^{-1}$$

(*c*) Como a curva de evolução da bola em contacto com o chão é metade de uma elipse, o tempo de contacto com o chão é metade do período do oscilador harmónico

$$\Omega = \frac{2\,\pi}{T} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\Omega} = \frac{\pi}{1400} = 2.24\ \mathrm{ms}$$

Problema 4

Um cilindro de massa m está pendurado, na vertical, de uma mola com constante elástica k, tal como na figura 6.2; se y é a altura do centro de massa do cilindro, na posição em que a mola não está nem esticada nem comprimida, despreze a resistência do ar.

(*a*) Encontre a equação de movimento, a partir da equação de Lagrange, ou se preferir, a partir da segunda lei de Newton.

(b) Encontre o valor de y no ponto de equilíbrio.

(c) Mostre que o sistema pode escrever-se como sistema linear, com uma mudança de variável de y para uma nova variável z e que a equação de movimento em função de z é a equação de um oscilador harmónico simples com frequência angular $\sqrt{k/m}$.

(a) As energias cinética e potencial gravítica mais potencial elástica são

$$E_\text{c} = \frac{m}{2}\,\dot{y}^2 \qquad U = m\,g\,y + \frac{k}{2}\,y^2$$

A equação de Lagrange é

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(\frac{\partial E_\text{c}}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial E_\text{c}}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial y} = m\,\ddot{y} + m\,g + k\,y = 0$$

e a equação de movimento é

$$\ddot{y} = -g - \frac{k}{m}\,y$$

(b) No ponto de equilíbrio $\dot{y}$ e $\ddot{y}$ são nulas, ou seja

$$-g - \frac{k}{m}\,y_\text{e} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad y_\text{e} = -\frac{m\,g}{k}$$

(c) Para que o sistema fosse linear, não podia aparecer o termo constante $-g$ na equação de movimento. Introduz-se então uma nova variável z tal que

$$-g - \frac{k}{m}\,y = -\frac{k}{m}\,z$$

ou seja, $z = y + \dfrac{m\,g}{k}$ e, assim sendo, $\ddot{z} = \ddot{y}$ e a nova equação de movimento é

$$\ddot{z} = -\frac{k}{m}\,z$$

que é a equação de um oscilador harmónico simples, com frequência angular

$$\Omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Problema 5

Um cilindro tem base circular de área $A = 10\ \text{cm}^2$, altura $h = 16$ cm e massa volúmica $\rho = 0.9\ \text{g/cm}^3$. Como essa massa volúmica é menor que a da água, $\rho_{ag} = 1\ \text{g/cm}^3$, quando o cilindro é colocando num recipiente com água flutua na superfície, com uma parte x da sua altura por fora da água, como mostra a figura ($0 \le x \le h$). Empurrando o cilindro para baixo, começa a oscilar com x a variar em função do tempo. Use o seguinte procedimento para analisar a oscilação do cilindro:

(*a*) Sabendo que a força da impulsão da água, para cima, é igual ao peso da água que ocupava a parte do volume do cilindro que está dentro da água, ou seja, $I = A\,(h - x)\,\rho_{ag}\,g$

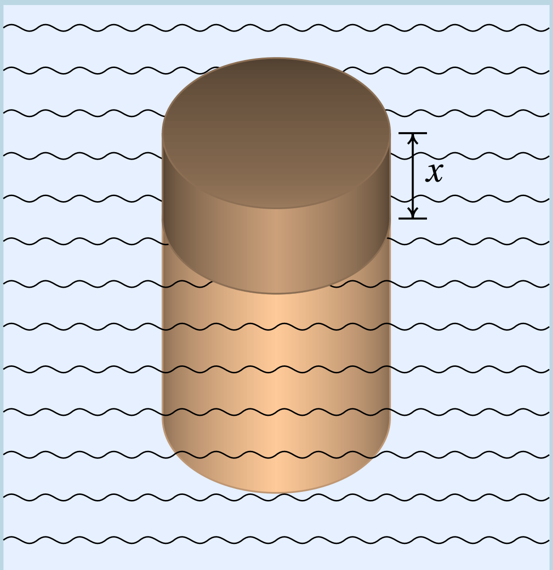
Encontre a expressão para a força resultante no cilindro, em função de x (pode ignorar a força de resistência da água, que é muito menor que o peso e a impulsão).

(*b*) Encontre a equação de movimento do cilindro (expressão para $\ddot{x}$ em função de x).

(*c*) Encontre o valor de x na posição de equilíbrio do cilindro.

(*d*) Mostre que o sistema dinâmico associado ao movimento do cilindro é linear e encontre a matriz do sistema.

(*e*) Mostre que o ponto de equilíbrio é um centro, implicando que o movimento é oscilatório e determine o valor do período de oscilação do cilindro.



(a) A força resultante é vertical e com valor (positivo para cima ou negativo para baixo) igual a:

$$F = I - m\,g = A\,(h - x)\,\rho_{ag}\,g - A\,h\,\rho\,g = A\,g\,\big(h\,(\rho_{ag} - \rho) - \rho_{ag}\,x\big)$$
$$= 10 \times 980\,(16 \times 0.1 - x) = 15680 - 9800\,x$$

em gramas vezes cm/s^2 e x em centímetros.

(b) A massa do cilindro, em gramas, é

$$m = A\,h\,\rho = 10 \times 16 \times 0.9 = 144$$

e a equação de movimento é

$$\ddot{x} = \frac{F}{m} = \frac{980}{9} - \frac{1225}{18}x$$

(em cm/s^2 e x em cm).

(c) O valor de x que faz com que a expressão da aceleração, $980/9 - 1225\,x/18$ seja nula é

$$x = \frac{980 \times 18}{9 \times 1225} = 1.6\ \text{cm}$$

(d) As equações de evolução são:

$$\dot{x} = v \qquad \dot{v} = \frac{980}{9} - \frac{1225}{18}x$$

Define-se $y = x - 1.6$; como tal, $\dot{y} = \dot{x}$ e as equações de movimento são equivalentes a

$$\dot{y} = v \qquad \dot{v} = -\frac{1225}{18}x$$

que correspondem a um sistema dinâmico linear com matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{1225}{18} & 0 \end{bmatrix}$$

(e) A equação caraterística da matriz é $\lambda^2 + 1225/18 = 0$. Os dois valores próprios são então números imaginários

$$\lambda = \pm\mathrm{i}\sqrt{\frac{1225}{18}} = \pm\mathrm{i}\,8.250$$

Ou seja, o ponto de equilíbrio em $x = 1.6$ cm é um centro e o movimento do cilindro é oscilatório com frequência angular Ω igual a 8.250 e período (em segundos):

$$T = \frac{2\,\pi}{\omega} = 0.762$$

Problema 7

Num transformador há duas bobinas, a primária, com resistência R_1 e indutância L_1 e a secundária, com resistência R_2 e indutância L_2. Quando se liga uma fonte na primeira bobina, produzindo corrente I_1 nela, na segunda bobina é induzida outra corrente I_2. Quando se desliga a fonte na primeira bobina, as duas correntes começam a diminuir gradualmente, de acordo com as seguintes equações:

$$L_1\,\dot{I}_1 + M\,\dot{I}_2 + R_1\,I_1 = 0 \qquad L_2\,\dot{I}_2 + M\,\dot{I}_1 + R_2\,I_2 = 0$$

onde M é a indutância mútua entre as duas bobinas e todas as constante M, L_1, L_2, R_1 e R_2 são positivas.

(a) Escreva as equações do transformador como equações de evolução de um sistema dinâmico linear e encontre a matriz do sistema.

(b) Num transformador real, M^2 é menor que $L_1\,L2$. Considere o caso $L_1 = 2$, $L_2 = 8$, $M = 3$, $R_1 = 1$, $R_2 = 2$ (num sistema de unidades escolhido para obter números entre 0 e 10) e determine que tipo de ponto é o ponto de equilíbrio.

(c) Com os mesmos valores da alínea anterior, trace o retrato de fase do sistema.

(d) Os valores $L_1 = 2$, $L_2 = 8$, $M = 5$, $R_1 = 1$ e $R_2 = 2$, correspondem a um caso hipotético que não pode descrever um transformador real porque $M^2 > L_1\,L_2$. Diga que tipo de ponto seria o ponto de equilíbrio nesse caso e explique porque esse sistema não pode descrever um transformador real.

(a) Resolvem-se as duas equações do transformador para encontrar expressões para $\dot{I}_1$ e $\dot{I}_2$. O comando coefmatrix pode ser usado para extrair a matriz num sistema de combinações lineares; é necessário indicar as expressões lineares e as variáveis:

```
(%i11) eq1: L1*dI1+M*dI2+R1*I1=0$

(%i12) eq2: L2*dI2+M*dI1+R2*I2=0$

(%i13) sys: solve ([eq1, eq2], [dI1, dI2]);
```

(%o13) $\left[\left[dI_1 = \frac{I_1\,L_2\,R_1 - I_2\,M\,R_2}{M^2 - L_1\,L_2},\; dI\_2 = -\frac{I\_1\,M\,R\_1 - I\_2\,L\_1\,R\_2}{M\text{^}2 - L\_1\,L\_2}\right]\right]$

```
(%i14) vars: [I1, I2]$

(%i15) A: coefmatrix (map (rhs, sys[1]), vars);
```

(%o15) $$\begin{bmatrix} \frac{L_2\,R_1}{M^2-L_1\,L_2} & -\frac{M\,R_2}{M^2-L_1\,L_2} \\ -\frac{M\,R_1}{M^2-L_1\,L_2} & \frac{L_1\,R_2}{M^2-L_1\,L_2} \end{bmatrix}$$

(*b*) Substituem-se os valores dos parâmetros na matriz do sistema e determinam se os valores próprios:

```
(%i16) A1: subst ([L1=2, L2=8, M=3, R1=1, R2=2], A);
```

(%o16) $$\begin{bmatrix} -\frac{8}{7} & \frac{6}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{4}{7} \end{bmatrix}$$

```
(%i17) eigenvectors (A1)$
(%i18) float (%);
(%o18)[[[-1.527,-0.1871],[1.0,1.0]],[[[1.0,-0.4484]],[[1.0,1.115]]]]
```

Como os valores próprios são reais e ambos negativos, o ponto de equilíbrio é um nó atrativo.

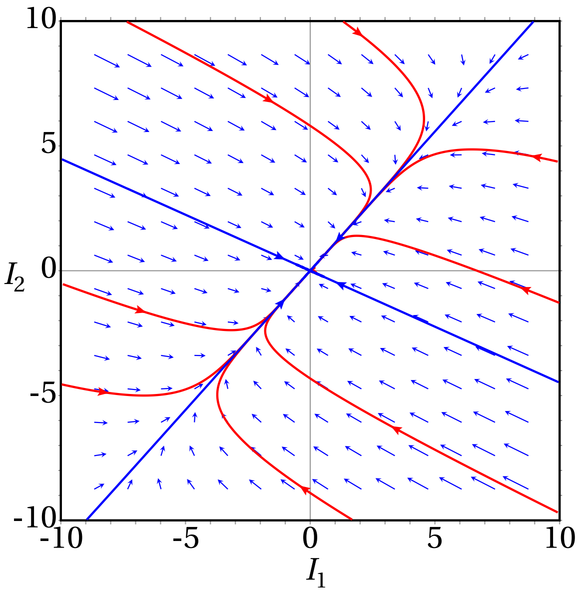
(*c*) As componentes da velocidade de fase são os lados direitos das equações na lista sys

```
(%i19) u1: subst ([L1=2, L2=8, M=3, R1=1, R2=2], map (rhs, sys[1]));
```

(%o19) $$\left[-\frac{8\,I_1-6\,I_2}{7},\ \frac{3\,I_1-4\,I_2}{7}\right]$$

```
(%i20) plotdf (u1, vars)$
```

E traçando algumas curvas de evolução, incluindo as que passam pelos vetores próprios, obtém-se o seguinte retrato de fase:



(*d*) Com os valores dos parâmetros dados, a matriz do sistema e os seus valores próprios são:

```
(%i21) A2: subst ([L1=2, L2=8, M=5, R1=1, R2=2], A);
```

(%o21) $\begin{bmatrix} \frac{8}{9} & -\frac{10}{9} \\ -\frac{5}{9} & \frac{4}{9} \end{bmatrix}$

```
(%i22) eigenvectors (A2)$
(%i23) float (%);
(%o23)[[[-0.1498,1.483],[1.0,1.0]],[[[1.0,0.9348]],[[1.0,-0.5348]]]]
```

O ponto de equilíbrio seria, nesse caso, um ponto de sela. Não pode descrever um transformador real, porque é um ponto instável, em que as correntes aumentariam até valores infinitos.

Problema 8

Um isótopo radioativo A, decai produzindo outro isótopo radioativo B e este decai produzindo um isótopo estável C.

$$\mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{B} \longrightarrow \mathrm{C}$$

Sendo N_1 e N_2 o número de isótopos das espécies A e B existentes em qualquer instante t, as suas derivadas em ordem ao tempo verificam as seguintes equações:

$$\dot{N}_1 = -k_1\, N_1 \qquad \dot{N}_2 = k_1\, N_1 - k_2\, N_2$$

onde k_1 é a constante de decaimento dos isótopos A (probabilidade de que um isótopo da espécie A se desintegre durante uma unidade de tempo) e k_2 é a constante de decaimento dos isótopos B.

(*a*) Determine a matriz do sistema e os seus valores próprios.

(*b*) Tendo em conta que as constantes de decaimento k_1 e k_2 são positivas, explique que tipo de ponto pode ser o ponto de equilíbrio para os possíveis valores dessas constantes.

() Se num instante inicial o número de isótopos A, B e C for, respetivamente, $N_1 = 3\,N_\mathrm{A}$, $N_2 = 1.5\,N_\mathrm{A}$ e $N_3 = 4.5\,N_\mathrm{A}$, onde $N_\mathrm{A} = 6.022 \times 10^{23}$ é o número de Avogadro, quais serão os valores de N_1, N_2 e N_3 após um tempo muito elevado?

(a) A matriz do sistema e os seus valores próprios são:

```
(%i24) A: matrix ([-k1, 0], [k1, -k2]);
```

$$(\%o24) \quad \begin{bmatrix} -k_1 & 0 \\ k_1 & -k_2 \end{bmatrix}$$

```
(%i25) eigenvectors (A);
```

$$(\%o25) \quad [[[-k_2, -k_1], [1, 1]], [[[0, 1]], [[1, \frac{k_1}{k_2 - k_1}]]]]$$

(b) Existem dois casos diferentes. Primeiro, se k_1 e k_2, são diferentes, há dois valores próprios, reais e negativos, ou seja, o ponto de equilíbrio é um nó atrativo. Mas se as duas constantes k_1 e k_2 são iguais, existe um único valor próprio, real e negativo, e o ponto de equilíbrio é um nó impróprio atrativo.

(c) Como o ponto de equilíbrio na origem é atrativo, após um tempo elevado o sistema aproxima-se desse ponto de equilíbrio, ou seja, $N_1 = 0$ e $N_2 = 0$. Se já não existem mais isótopos das espécies A nem B, isso quer dizer que todos os isótopos iniciais transformaram-se na espécie C e, como tal, N_3 será igual ao número total de isótopos das 3 espécies no início, $9\,N_\text{A}$.

Problema 9
No sistema dinâmico com equações de evolução:

$$\dot{x} = -y \qquad \dot{y} = 10\,x + k(x + y)$$

onde k é um parâmetro real que pode ter qualquer valor entre $-\infty$ e $+\infty$, determine para quais possíveis valores de k o ponto $(x,\ y) =$ (0,0) é nó atrativo ou repulsivo, foco atrativo ou repulsivo, centro ou ponto de sela.

Existem várias formas possíveis de resolver este problema; um método simples é o seguinte. Trata-se de um sistema linear com matriz:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 10 + k & k \end{bmatrix}$$

com traço t e determinante d iguais a:

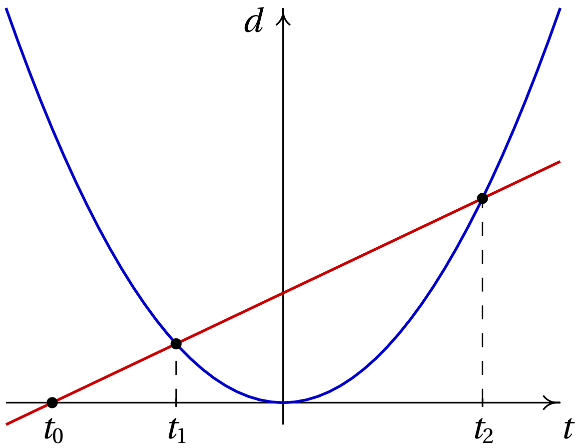
$$t = k \qquad d = k + 10$$

A relação entre o traço e o determinante é $d = t + 10$. Num plano em que o eixo das abcissas representa o traço t e o eixo das ordenadas representa o determinante d, esta relação é uma reta com declive igual a 1, que corta o eixo das abcissas em $t_0 = -10$.

A curva que delimita a região dos focos da região dos nós é a parábola $d = t^2/4$, que corta a reta $d = t + 10$ nos dois pontos onde:

$$\frac{t^2}{2} - 2\,t - 20 = 0 \quad\Longrightarrow\quad t_1 = 2 - 2\sqrt{11} \approx -4.633 \quad t_2 = 2 + 2\sqrt{11} \approx 8.633$$

O gráfico seguinte mostra a reta e a parábola:



O ponto de equilíbrio é ponto de sela, se o traço for menor que t_0, nó atrativo, se o traço estiver entre t_0 e t_1, foco atrativo, se o traço estiver entre t_1 e 0, centro se o traço for nulo, foco repulsivo, se o traço estiver entre 0 e t_2 ou nó repulsivo, se o traço for maior que t_2. Tendo em conta que k é igual ao traço, o resultado é então:

- Ponto de sela, se $k < -10$
- Nó atrativo, se $-10 < k \le 2 - 2\sqrt{11}$
- Foco atrativo, se $2 - 2\sqrt{11} < k < 0$
- Centro, se $k = 0$
- Foco repulsivo, se $0 < k < 2 + 2\sqrt{11}$
- Nó repulsivo, se $k \ge 2 + 2\sqrt{11}$

Note-se que quando $k = 2 \pm 2\sqrt{11}$, o ponto é nó impróprio, que já foi incluído nas categorias acima. Se $k = -10$, o determinante é zero, que indica que o sistema se reduz a uma única equação, $\dot{y} = -10\,y$, que representa um sistema com espaço de fase de dimensão 1, em que $y = 0$ é ponto de equilíbrio atrativo; nesse caso a outra equação de evolução mostra que x é igual a $y/10$ mais uma constante.