10 Sistemas não lineares

Problema 1
Uma partícula com massa m, desloca-se ao longo do eixo dos x sob a ação de uma força resultante F_x que depende da posição x e da componente da velocidade v_x. Para cada um dos casos seguintes encontre os pontos de equilíbrio, diga que tipo de ponto equilíbrio é cada um (estável ou instável; centro, foco, nó ou ponto de sela) e desenhe o retrato de fase mostrando as órbitas mais importantes:

(a) $F_x = -m\,x\,(1 + v_x)$

(b) $F_x = -m\,x\,(x^2 + v_x - 1)$

As equações de evolução são:

$$\dot{x} = v_x \qquad \dot{v}_x = \frac{F_x}{m}$$

(a) Nos pontos de equilíbrio, $v_x = 0$ e $-x\,(1 + v_x) = 0$, ou seja, existe um único ponto de equilíbrio em $(x, v_x) = (0, 0)$. A matriz jacobiana é:

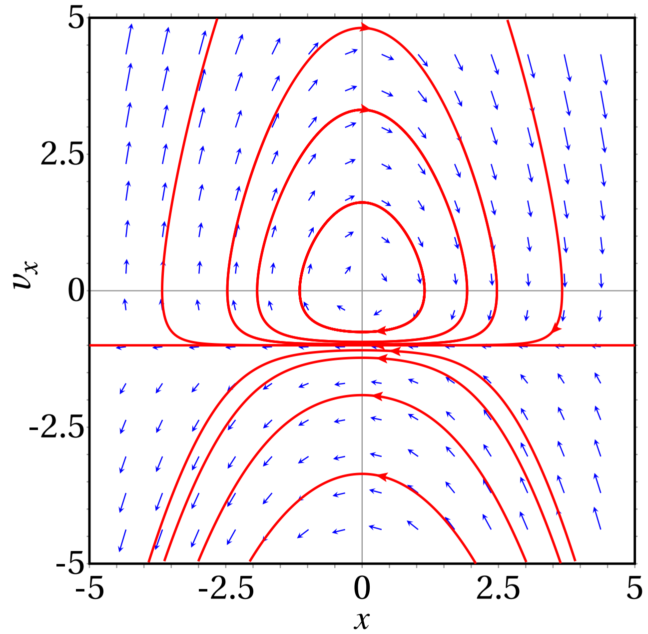
$$\mathbf{J}(x, v_x) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial v_x}{\partial x} & \dfrac{\partial v_x}{\partial v_x} \\ \dfrac{\partial(-x\,(1+v_x))}{\partial x} & \dfrac{\partial(-x\,(1+v_x))}{\partial v_x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 - v_x & -x \end{bmatrix}$$

E a matriz da aproximação linear na vizinhança do ponto de equilíbrio é:

$$\mathbf{A} = \mathbf{J}(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Que tem traço negativo e determinante (positivo) igual a 1. Como tal, o ponto de equilíbrio é um centro. O retrato de fase traça-se com o comando:

```
(%i1) plotdf ([vx,-x*(1+vx)], [x,vx], [x,-5,5], [vx,-5,5]);
```



(b) Nos pontos de equilíbrio, $v_x = 0$ e $-x\,(x^2-1)=0$, ou seja, existem três pontos de equilíbrio em $(x, v_x) = (0,0)$, $(-1, 0)$ e $(1, 0)$. A matriz jacobiana é:

$$\mathbf{J}(x, v_x) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial v_x}{\partial x} & \dfrac{\partial v_x}{\partial v_x} \\ \dfrac{\partial\left(-x\,(x^2+v_x-1)\right)}{\partial x} & \dfrac{\partial\left(-x\,(x^2+v_x-1)\right)}{\partial v_x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3\,x^2 - v_x + 1 & -x \end{bmatrix}$$

A matriz da aproximação linear na vizinhança do ponto de equilíbrio (0, 0) é:

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{J}(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Com determinante negativo e, como tal, o ponto de equilíbrio é um ponto de sela.

No ponto de equilíbrio (1, 0) a matriz da aproximação linear é:

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{J}(1,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Com traço $t = -1$ e determinante $d = 2$. Como d é maior que $t^2/4$, o ponto (1, 0) é um foco atrativo.

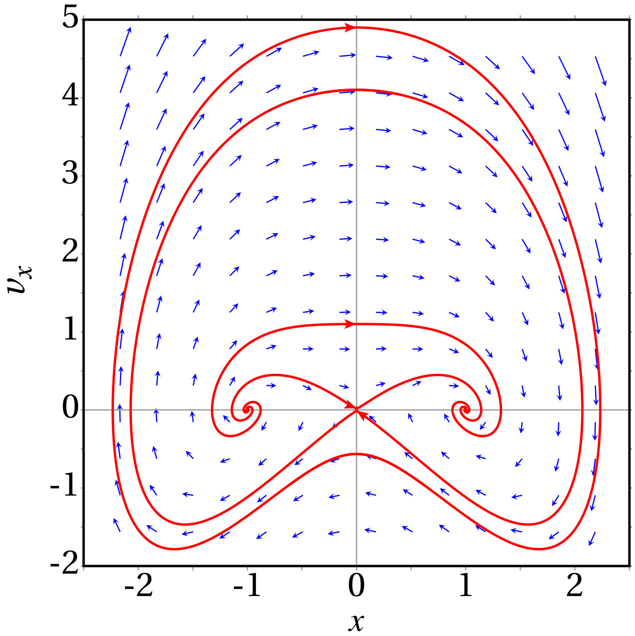
No ponto de equilíbrio $(-1, 0)$ a matriz da aproximação linear é:

$$\mathbf{A}_3 = \mathbf{J}(-1,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Com traço $t = 1$ e determinante $d = 2$. Como d é maior que $t^2/4$, o ponto $(-1, 0)$ é um foco repulsivo.

O retrato de fase traça-se com o comando:

```
(%i2) plotdf ([vx,-x*(x^21+vx)], [x,vx], [x,-2.5,2.5], [vx,-2,5]);
```



Problema 4
A amplitude de oscilação de um pêndulo decresce, devido à força de resistência do ar e ao atrito no eixo. Admita um pêndulo de comprimento $l = 50$ cm e massa $m = 0.150$ kg, em que o atrito no eixo é desprezável mas a resistência do ar não. A equação de movimento é a equação 8.8.

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin\theta - \frac{C\,l}{m}|\dot{\theta}|\dot{\theta}$$

Se a massa m estiver concentrada numa esfera de raio $R = 2$ cm, a expressão para a constante C é dada pela equação 4.14: $C = \pi\,\rho\,R^2/4$, onde $\rho = 1.2\ \text{kg/m}^3$ é a massa volúmica do ar. Trace os gráficos de $\theta(t)$, $\omega(t)$ e da curva de evolução no espaço de fase e explique o significado físico da solução, para os dois casos seguintes:

(a) O pêndulo parte do repouso com um ângulo inicial $\theta = 120°$.

(b) O pêndulo é lançado desde $\theta = 60°$, com velocidade angular inicial $\omega = -7.8\ \text{s}^{-1}$.

(*a*) Usando o programa rk, com intervalos de tempo de 0.1, desde $t = 0$ até $t = 50$,

```
(%i3) [g, l, m]: [9.8, 0.5, 0.15]$
(%i4) C: %pi*1.2*0.02^2/4$
(%i5) s: rk ([w,-g*sin(q)/l-C*l*abs(w)*w/m], [q,w], [2*%pi/3,0],
             [t,0,50,0.1])$
(%i6) last (s);
(%o6)  [ 50.0, 0.408596821360162, 6.193790347574476 ]
```

Executando novamente o programa rk com intervalos de tempo dez vezes menores,

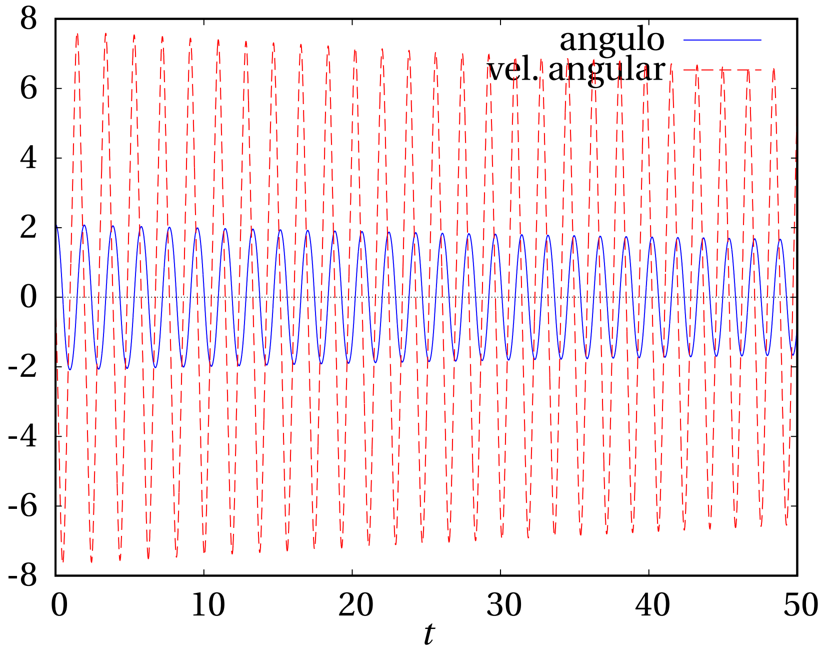
```
(%i7) s: rk ([w,-g*sin(q)/l-C*l*abs(w)*w/m], [q,w], [2*%pi/3,0],
             [t,0,50,0.01])$
(%i8) last (s);
(%o8)  [ 50.0, - 0.8184365726225941, 5.503739362621793 ]
```

Mostrando que é necessário reduzir ainda mais o valor dos intervalos de tempo, para obter uma solução convergente:

```
(%i9) s: rk ([w,-g*sin(q)/l-C*l*abs(w)*w/m], [q,w], [2*%pi/3,0],
             [t,0,50,0.005])$
(%i10) last (s);
(%o10)  [ 50.0, - 0.8184437883132009, 5.503721542035767 ]
```

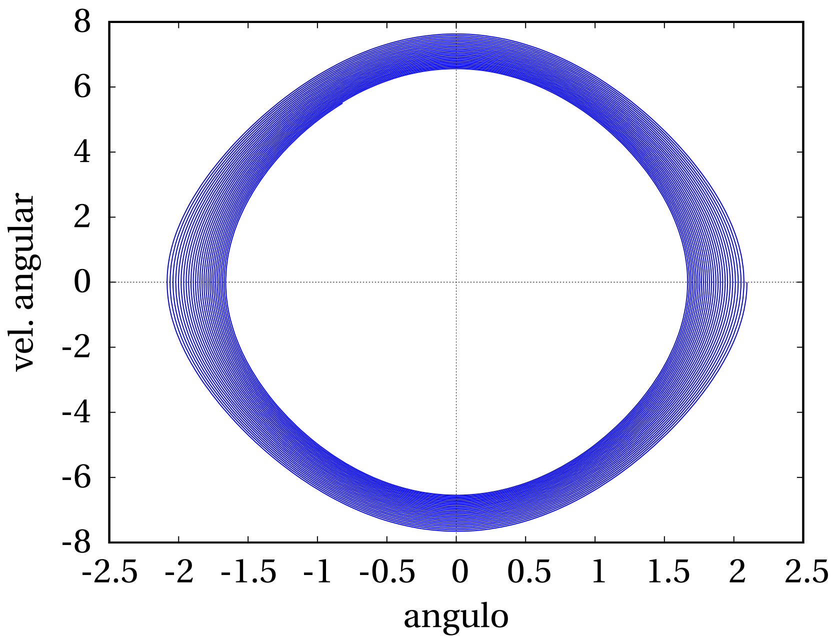
Que é um resultado convergente com 4 algarismos significativos. O gráfico do ângulo e da velocidade angular, em função do tempo, obtém-se com o comando:

```
(%i11) plot2d([[discrete,makelist([p[1],p[2]],p,s)],
        [discrete,makelist([p[1],p[3]],p,s)]],
        [legend,"angulo","vel. angular"],[xlabel,"t"]);
```



E a curva de evolução no espaço de fase é o gráfico da velocidade angular em função do ângulo, obtido com o seguinte comando:

```
(%i12) plot2d ([discrete, makelist([p[2],p[3]],p,s)],
        [xlabel, "angulo"], [ylabel, "vel. angular"]);
```

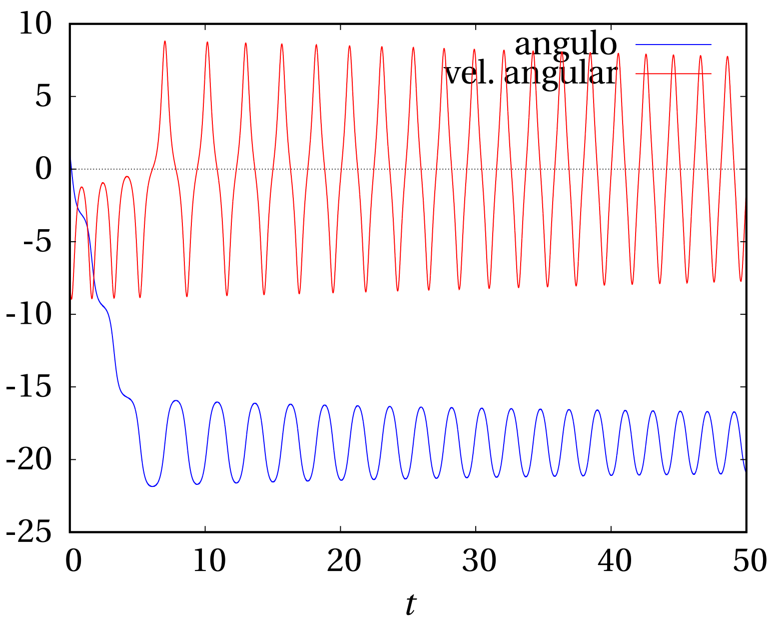


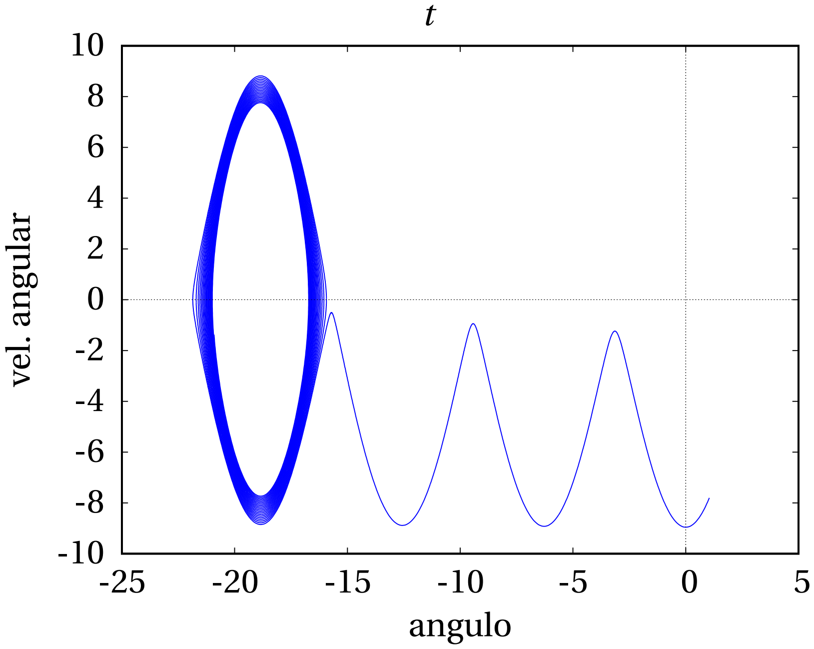
Os dois gráficos mostram que pêndulo oscila com amplitude que decresce lentamente.

(*b*) Usando o programa rk, com os mesmos intervalos de tempo usados para obter os gráficos na alínea anterior,

```
(%i13) s: rk ([w,-g*sin(q)/l-C*l*abs(w)*w/m], [q,w], [%pi/3,-7.8],
    [t,0,50,0.005])$
```

Os gráficos do ângulo e da velocidade angular, em função do tempo, e da curva de evolução no espaço de fase, obtêm-se repetindo os mesmos comandos da alínea anterior:





O pêndulo faz três voltas completas, rodando no sentido horário, e quando passa a quarta vez pela posição de equilíbrio estável, começa a oscilar com amplitude que decresce lentamente.

Problema 7
Para analisar a equação diferencial não linear $\ddot{x} + \dot{x}^2 + 4\,x^2 = 4$,

(a) Escreva as equações de evolução do sistema dinâmico associado à equação.

(b) Encontre os pontos de equilíbrio do sistema.

(c) Determine a matriz jacobiana.

(d) Caracterize cada um dos pontos de equilíbrio.

(e) Se em $t = 0$ os valores da variável x e da sua derivada são $x_0 = 1$ e $\dot{x}_0 = 1$, determine (numericamente) os valores da variável e da sua derivada em $t = 2$.

(a) Define-se uma segunda variável de estado:

$$v = \dot{x}$$

e substitui-se na equação do sistema:

$$\dot{v} + v^2 + 4\,x^2 = 4$$

Como tal, as duas equações de evolução —expressões das derivadas das duas variáveis de estado— são:

$$\dot{x} = v \qquad\qquad \dot{v} = 4 - v^2 - 4\,x^2$$

(b) Para resolver esta alínea não é necessário ter resolvido a alínea anterior. Basta observar que nos pontos de equilíbrio x permanece constante e, assim sendo, $\dot{x} = \ddot{x} = 0$. Substituindo na equação do sistema,

$$4\,x^2 = 4 \qquad \Rightarrow \qquad x = \pm 1$$

(c) Usando as equações obtidas na alínea (a),

$$\mathbf{J}(x, v) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial v} \\ \dfrac{\partial(4 - v^2 - 4\,x^2)}{\partial x} & \dfrac{\partial(4 - v^2 - 4\,x^2)}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -8\,x & -2\,v \end{bmatrix}$$

(Também pode usar-se a função jacobian do Maxima, para determinar a matriz).

(*d*) Substituindo $x = 1$ e $v = 0$ na matriz jacobiana obtém-se:

$$\mathbf{J}(1,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -8 & 0 \end{bmatrix}$$

Como o traço dessa matriz é nulo e o determinante é 8, os valores próprios são números imaginários e o ponto $x = 1$, $v = 0$ é um centro.

Substituindo $x = -1$ e $v = 0$ na matriz jacobiana obtém-se:

$$\mathbf{J}(-1,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}$$

Como o traço dessa matriz é nulo e o determinante é -8, os valores próprios são reais, com sinais opostos. O ponto $x = -1$, $v = 0$ é então ponto de sela.

(*e*) Usa-se a função rk do Maxima várias vezes, com valores decrescentes dos intervalos de tempo, até se obterem valores convergentes do resultado:

```
(%i14) last(rk( [v,4-v^2-4*x^2], [x,v], [1,1], [t,0,2,0.1]));
(%o14)    [ 2.0, 0.58688, 0.82753 ]
(%i15) last(rk( [v,4-v^2-4*x^2], [x,v], [1,1], [t,0,2,0.05]));
(%o15)    [ 2.0, 0.58687, 0.82768 ]
```

Ou seja, os valores aproximados de x e $\dot{x}$, em $t = 2$, são: 0.5869 e 0.8277

Problema 8
O sistema dinâmico com equações de evolução:

$$\dot{x} = 2\,x\,y^3 - x^4 \qquad\qquad \dot{y} = y^4 - 2\,x^3\,y$$

tem um único ponto de equilíbrio na origem. A matriz jacobiana nesse ponto é igual a zero e, portanto, os valores próprios (nulos) não podem ser usados para caraterizar o ponto de equilíbrio. Use o seguinte método para analisar o retrato de fase do sistema:

(*a*) Determine o versor na direção da velocidade de fase em qualquer ponto do eixo dos x e em qualquer ponto do eixo dos y.

(*b*) Determine o versor na direção da velocidade de fase em qualquer ponto das duas retas $y = x$ e $y = -x$.

(c) Faça a mão um gráfico mostrando os versores que encontrou nas alíneas a e b, em vários pontos nos 4 quadrantes do espaço de fase, e trace algumas curvas de evolução seguindo as direções da velocidade de fase. Com base nesse gráfico, que tipo de ponto de equilíbrio julga que é a origem?

(d) Diga se existem ciclos, órbitas homoclínicas ou heteroclínicas e no caso afirmativo quantas.

(a) No eixo dos x, y é igual a zero e a velocidade de fase é,

$$\vec{u} = -x^4\,\hat{\imath} \quad\Longrightarrow\quad \hat{u} = -\hat{\imath}$$

No eixo dos y, x é igual a zero e a velocidade de fase é,

$$\vec{u} = y^4\,\hat{\jmath} \quad\Longrightarrow\quad \hat{u}_u = \hat{\jmath}$$

(b) Na reta $y = x$, a velocidade de fase é,

$$\vec{u} = x^4\,\hat{\imath} - x^4\,\hat{\jmath}$$

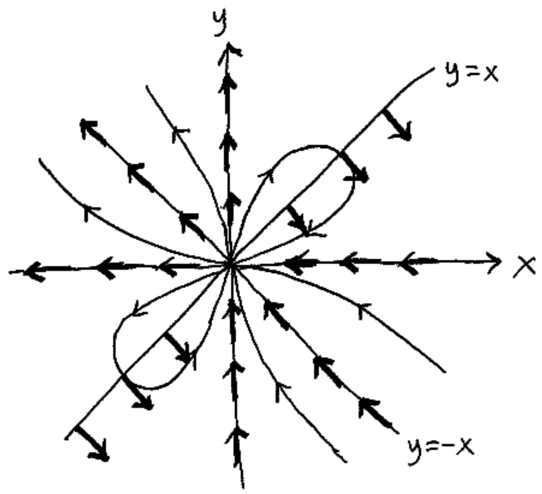
com módulo igual a $\sqrt{2}\,x^4$ e versor:

$$\vec{e}_u = \frac{x^4\,\hat{\imath} - x^4\,\hat{\jmath}}{\sqrt{2}\,x^4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\imath} - \hat{\jmath})$$

Na reta $y = -x$,

$$\vec{u} = -3\,x^4\,\hat{\imath} + 3\,x^4\,\hat{\jmath} \quad\Longrightarrow\quad \vec{e}_u = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\hat{\imath} + \hat{\jmath})$$

(c) A figura seguinte mostra os versores encontrados nas duas alíneas anteriores e algumas curvas de evolução. Como há curvas que se aproximam da origem e curvas que se afastam dele, a origem é um ponto de sela.



(d) Não existem ciclos nem órbitas heteroclínicas. Existem um número infinito de órbitas homoclínicas: todas as curvas de evolução no primeiro e terceiro quadrantes são órbitas homoclínicas.

Problema 10

Qualquer corpo celeste (planeta, cometa, asteróide, sonda espacial, etc) de massa m no sistema solar tem uma energia potencial gravítica produzida pelo Sol, que é responsável pelas órbitas elípticas desses corpos. A expressão para a energia potencial é,

$$U = -\frac{G M m}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

onde G é a constante de gravitação universal, M é a massa do Sol, e as coordenadas x e y são medidas no plano da órbita do corpo celeste, com origem no Sol. Se as distâncias forem medidas em unidades astronómicas, UA, e os tempos em anos, o produto $G M$ será igual a $4\pi^2$.

(a) Encontre as equações de movimento do corpo celeste, em unidades de anos para o tempo e UA para as distâncias.

(b) O cometa Halley chega até uma distância mínima do Sol igual a 0.587 UA. Nesse ponto, a sua velocidade é máxima, igual a 11.50 UA/ano, e perpendicular à sua distância até o Sol. Determine numericamente a órbita do cometa Halley, a partir da posição inicial $0.587\,\hat{\imath}$, com velocidade inicial $11.50\,\hat{\jmath}$, com intervalos de tempo $\Delta t = 0.05$ anos. Trace a órbita desde $t = 0$ até $t = 100$ anos. Que pode concluir acerca do erro numérico?

(c) Repita o procedimento da alínea anterior com $\Delta t = 0.02$ anos e trace a órbita desde $t = 0$ até $t = 150$ anos. Que pode concluir acerca do erro numérico?

(d) Diga qual é, aproximadamente, a distância máxima que o cometa Halley se afasta do Sol, e compare a órbita do cometa com as órbitas do planeta mais distante, Neptuno (órbita entre 29.77 UA e 30.44 UA) e do planeta mais próximo do Sol, Mercúrio (órbita entre 0.31 UA e 0.39 UA) (Plutão já não é considerado um planeta).

(a) Há quatro variáveis de estado: x, y, $\dot{x}$ e $\dot{y}$. As expressões das energias cinética e potencial são:

```
(%i16) Ec: m*(xp^2 + yp^2)/2$
(%i17) U: -4*%pi^2*m/sqrt(x^2 + y^2)$
```

Onde xp e yp representam as velocidades generalizadas $\dot{x}$ e $\dot{y}$. Para aplicar as equações de Lagrange é necessário definir xp e yp como derivadas x e y em ordem ao tempo, e definir também xpp e ypp como derivadas de xp e yp:

```
(%i18) gradef (x,t,xp)$
(%i19) gradef (y,t,yp)$
(%i20) gradef (xp,t,xpp)$
(%i21) gradef (yp,t,ypp)$
```

As duas equações de Lagrange conduzem às duas equações de movimento:

```
(%i22) diff(diff(Ec,xp),t) - diff(Ec,x) + diff(U,x) = 0;
```

(%o22) $$\frac{4\pi^2 m x}{\left(y^2+x^2\right)^{3/2}} + m\, xpp = 0$$

```
(%i23) eq1: solve(%,xpp)[1];
```

(%o23) $$xpp = -\frac{4\pi^2 x}{\left(y^2+x^2\right)^{3/2}}$$

```
(%i24) diff(diff(Ec,yp),t) - diff(Ec,y) + diff(U,y) = 0;
```

(%o24) $$m\, ypp + \frac{4\pi^2 m y}{\left(y^2+x^2\right)^{3/2}} = 0$$

```
(%i25) eq1: solve(%,ypp)[1];
```

(%o25) $$ypp = -\frac{4\pi^2 y}{\left(y^2+x^2\right)^{3/2}}$$

As equações de movimento são:

$$\ddot{x} = -\frac{4\pi^2 x}{(x^2+y^2)^{3/2}} \qquad \ddot{y} = -\frac{4\pi^2 y}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

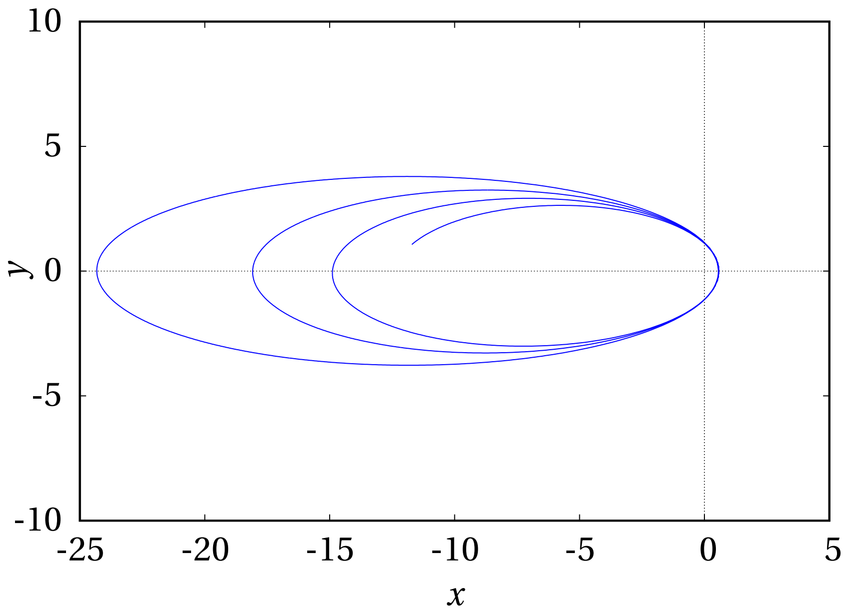
(*b*) Usando as condições iniciais dadas e o intervalo de tempo desde 0 até 100, com incrementos de 0.05, a solução numérica do problema obtém-se com o programa rk:

```
(%i26) o: rk([xp,yp,rhs(eq1),rhs(eq2)],[x,y,xp,yp],[0.587,0,0,11.5],
            [t,0,100,0.05])$
```

onde o é uma lista com várias listas de cinco elementos, com os valores de $(t, x, y, \dot{x}, \dot{y})$ em diferentes instantes entre 0 e 100. Como tal, o gráfico de trajetória do cometa (y vs x) pode ser obtido com o seguinte comando:

```
(%i27) plot2d ([discrete, makelist([p[2],p[3]], p, o)],
          [xlabel,"x"], [ylabel,"y"], [y,-10,10], same_xy);
```

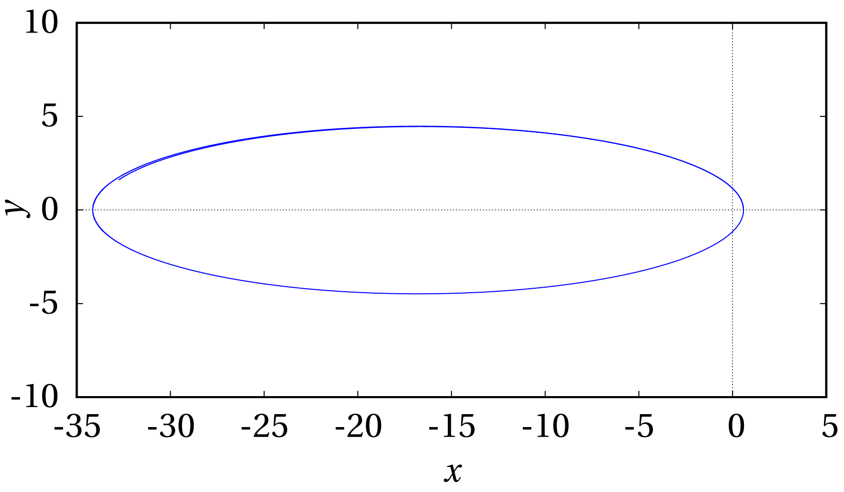
Usou-se a opção same_xy para que a escala nos dois eixos seja igual, mostrando a forma real da trajetória. O resultado é o gráfico seguinte:



O facto de que o satélite não repete a mesma trajetória, mas aproxima-se cada vez mais do Sol, indica que a sua energia mecânica diminui, em vez de permanecer constante, como era suposto acontecer. Conclui-se então que o intervalo $\Delta t = 0.05$ não é suficientemente pequeno e os dados obtidos têm um erro numérico muito elevado.

(c) Reduzindo o valor dos incrementos de tempo:

```
(%i28) o: rk([xp,yp,rhs(eq1),rhs(eq2)],[x,y,xp,yp],[0.587,0,0,11.5],
          [t,0,100,0.02])$
(%i29) plot2d([discrete,makelist([p[2],p[3]],p,o)],[xlabel,"x"],
          [ylabel,"y"],[y,-10,10],same_xy);
```



O erro numérico é muito menor, mas o cometa continua a perder energia; seria necessário reduzir ainda mais o valor de Δt para diminuir o erro.

(d) O comando

```
(%i30) plot2d ([discrete,makelist([p[1],p[2]],p,o)]);
```

Mostra que o cometa está mais afastado do Sol em t aproximadamente 36 anos. Como foram usados incrementos de t iguais a $0.02 = 1/50$, 36 anos aparecerá na posição 1801 da lista. Observando a lista de valores de x nessa parte da lista:

```
(%i31) makelist (o[i][2], i, 1780, 1820);
```

Conclui-se que o valor mínimo de x (distância máxima ao Sol) é aproximadamente 34.14 UA. Essa distância máxima é maior do que a órbita de Neptuno e a distância mínima, 0.587 UA, está entre as órbitas de Mercúrio e Vénus.