6 Trabalho e energia

Problema 2
A lei da gravitação universal estabelece que qualquer corpo celeste de massa M produz uma força atrativa sobre qualquer outro corpo de massa m, dada pela expressão:

$$\vec{F}_{\mathrm{g}} = -\frac{G\,M\,m}{r^2}\,\hat{r}$$

onde G é a constante de gravitação universal, r é a distância entre os dois corpos e $\hat{r}$ é o versor radial, que aponta desde o corpo de massa M até o corpo de massa m. (a) Determine a expressão para a energia potencial gravítica U_{g} devida ao corpo de massa M. (b) Tendo em conta o resultado da alínea anterior, como se justifica a equação 6.17, $U_{\mathrm{g}} = m\,g\,z$, para a energia potencial gravítica de um objeto na Terra?

(a) Em coordenadas esféricas, o deslocamento infinitesimal é

$$\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}r\,\hat{r} + r\,\mathrm{d}\phi\,\hat{e}_\phi + r\,\sin\phi\,\mathrm{d}\theta\,\hat{e}_\theta$$

Onde ϕ e θ são dois ângulos (medidos desde o semieixo positivo dos z e no plano $x\,y$ desde o semieixo positivo dos x) e os três versores $\hat{r}$, $\hat{e}_\phi$ e $\hat{e}_\theta$ são perpendiculares entre si. Assim sendo, o produto escalar da força gravítica com o deslocamento infinitesimal é igual a:

$$\vec{F}_{\mathrm{g}}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = -\frac{G\,M\,m}{r^2}\,\mathrm{d}r$$

Como depende de apenas uma variável, conclui-se que o integral de linha de $\vec{F}_{\mathrm{g}}$ não depende do percurso de integração e a força gravítica é uma força conservativa. A energia potencial associada a essa força conservativa é igual a menos uma primitiva qualquer da força

$$U_{\mathrm{g}} = -\int \vec{F}_{\mathrm{g}}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \int \frac{G\,M\,m}{r^2}\,\mathrm{d}r = -\frac{G\,M\,m}{r}$$

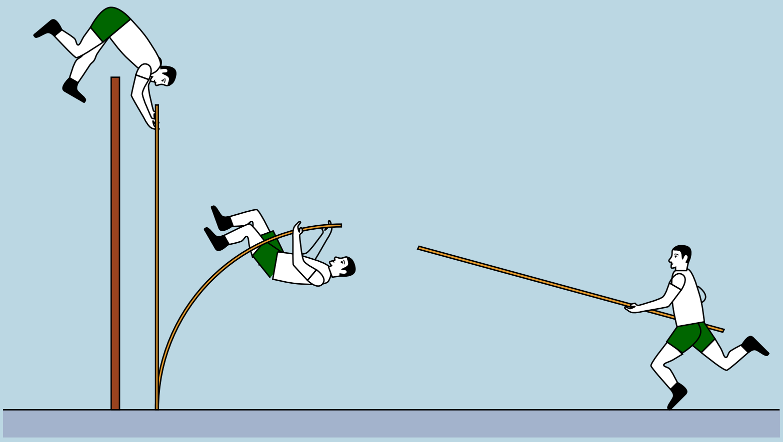
(b) Para um valor qualquer r_0, a série de Taylor de U_g é:

$$-\frac{G\,M\,m}{r} = -\frac{G\,M\,m}{r_0} + \frac{G\,M\,m}{r_0^2}\,(r - r_0) - \ldots$$

O primeiro termo é uma constante, que pode ser ignorada, porque a energia potencial pode incluir sempre uma constante arbitrária com qualquer valor. No segundo termo, substituindo r_0 pelo raio da Terra, $r - r_0$ é então a altura z desde a superfície da Terra e $G\,M/r_0^2$ é igual à constante g. Ignorando o resto da série, que para valores de z muito menores que r_0 não altera significativamente a soma dos dois primeiros termos, obtém-se $U_\text{g} \approx m\,g\,z$.

Problema 3

Num salto com vara, um atleta de 70 kg usa uma vara uniforme de 4.5 kg com 4.9 m de comprimento. O salto do atleta tem três fases: primeiro o atleta corre, com o seu centro de gravidade a 1 m de altura e com o centro de gravidade da vara a 1.5 m de altura, com velocidade de 9 m/s no instante em que possa a vara no chão. Na segunda fase, a energia da corrida é transferida para a vara, que se deforma e volta a esticar ficando vertical e elevando o atleta até uma altura próxima da altura da fasquia (desprezando forças dissipativas, até aqui a energia mecânica é constante). Finalmente o atleta estende os braços, aumentando a sua energia mecânica até o seu centro de gravidade subir a 5.8 m de altura, conseguindo ultrapassar a fasquia a 5.6 m. (a) Determine o trabalho realizado pelo saltador quando estende os braços. (b) Determine a força média que o saltador exerce sobre a vara na terceira fase.



Na primeira fase, a energia mecânica do sistema é igual à energia cinética do conjunto atleta-vara, mais as energias potenciais gravíticas do atleta e da vara. Medindo as alturas desde o chão, essa energia mecânica é:

$$E_1 = \frac{1}{2} 74.5 \times 9^2 + 70 \times 9.8 + 4.5 \times 9.8 \times 1.5 = 3769.4\ \text{J}$$

(a) Na terceira fase, após o atleta ter estendido os braços alcançando o ponto mais alto, ele e a vara estão em repouso nesse instante: a altura do centro de massa do atleta é 5.8 m e a altura do centro de massa da vara, na posição vertical, é metade do seu comprimento. A energia mecânica nessa terceira fase é igual à soma das energia potenciais gravítica do atleta e da vara:

$$E_3 = 70 \times 9.8 \times 5.8 + 4.5 \times 9.8 \times 2.45 = 4086.8\ \text{J}$$

O trabalho realizado pelo atleta é igual ao aumento da energia mecânica desde a fase 1 até a fase 3:

$$W = E_3 - E_1 = 4086.8 - 3769.4 = 317.4\ \text{J}$$

(b) A energia mecânica na segunda fase, E_2, é igual a E_1, porque nas fases 1 e 2 há conservação da energia mecânica. Como na fase dois o atleta e a vara estão em repouso, a energia mecânica é igual à energia potencial gravítica:

$$E_2 = 70 \times 9.8 \times h + 4.5 \times 9.8 \times 2.45$$

Igualando essa expressão ao valor obtido para E_1, encontra-se a altura que o atleta atinge, antes de estender os braços:

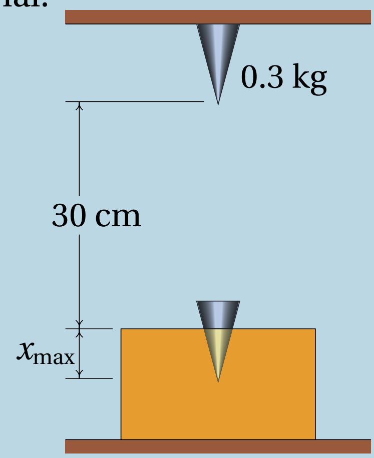
$$h = 5.337\ \text{m}$$

A força média é igual ao trabalho dividido pelo aumento da altura entre a segunda e a terceira fase:

$$F = \frac{317.4}{5.8 - 5.337} = 686\ \text{N}$$

Problema 4

Resolva o problema 7 do capítulo 4 aplicando o teorema do trabalho e a energia mecânica: Para determinar a rigidez de um material, coloca-se um bloco do material 30 cm por baixo de um cone metálico de 0.3 kg; o cone deixa-se cair livremente, a partir do repouso, penetrando o bloco até parar após ter penetrado uma distância x_{max}. Sabe-se que enquanto o cone está a penetrar o bloco, este exerce sobre o cone uma força oposta ao movimento, proporcional ao quadrado da distância penetrada, ou seja, com módulo $k\,x^2$, onde x é a distância penetrada pela ponta do cone e k é uma constante que mede a rigidez do material. Sabendo que a distância máxima que o cone penetrou até parar foi $x_{max} = 5$ cm, determine o valor da constante k de esse material.



A força exercida pelo bloco sobre o cone, quando o cone penetra no bloco, é uma força conservativa ou não?

Como o cone está em repouso nas posições inicial e final, quando estava 30 cm acima do bloco e após penetrar 5 cm no bloco, não há variação da energia cinética nesse percurso e a diminuição da energia mecânica é igual à diminuição da energia potencial gravítica nesse percurso:

$$\Delta E_m = -m\,g\,\Delta h = -0.3 \times 9.8 \times 0.35 = -1.029\ \text{J}$$

Valor esse igual ao trabalho da força do bloco no cone, enquanto este penetra o bloco (a resistência do ar está a ser desprezada):

$$-1.029 = \int_0^{0.05} -k\,x^2\,\mathrm{d}x = -\frac{0.05^3}{3}\,k$$

Essa expressão conduz ao valor $k = 24696$. Como as unidades de $k\,x^2$ são newton, então as unidades da constante k são $\mathrm{N/m^2}$. A força do bloco não é conservativa, porque só atua quando o cone está a penetrar; se o cone voltasse a subir, após ter penetrado no bloco, o bloco já não produzia nenhuma força sobre o cone. Ou seja, a força do bloco depende implicitamente da velocidade, porque é diferente quando o cone está a descer (velocidade negativa) ou quando está a subir (velocidade positiva) e quando o cone pára, essa força não é proporcional a x^2.

Problema 7

Uma esfera de raio r roda, sem deslizar, dentro de uma calha semicircular de raio R, que está num plano vertical (ver figura).

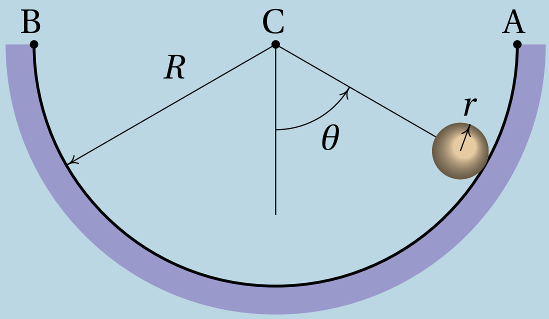
(a) Demonstre que, em função da derivada do ângulo θ, a energia cinética da esfera é

$$E_\mathrm{c} = \frac{7}{10}\,m\,(R-r)^2\dot{\theta}^2$$

(b) Desprezando a resistência do ar, a energia mecânica é constante e a sua derivada em ordem ao tempo é nula; derive a expressão da energia mecânica em ordem ao tempo e iguale a zero para encontrar a expressão da aceleração angular $\ddot{\theta}$ em função do ângulo.

(c) Entre que valores deve estar a energia mecânica para que a esfera permaneça oscilando dentro da calha?

(d) A partir do resultado da alínea b, determine a expressão para $\ddot{\theta}$, no limite quando o raio da esfera é muito menor que o raio da calha ($R - r \approx R$) e explique porque o resultado é diferente do resultado obtido para o pêndulo simples no problema 6.



(*a*) A trajetória do centro de massa da esfera é um arco de círculo com ângulo θ e raio $R - r$; como tal, a velocidade do centro de massa é

$$v_e = (R - r)\,\dot{\theta}$$

Como a esfera não desliza, a velocidade do ponto de contacto com a calha é 0. A velocidade angular é a velocidade do centro de massa, menos a velocidade do ponto de contacto, dividida pela distância entre eles

$$\omega = \frac{(R - r)\,\dot{\theta}}{r}$$

A energia cinética da esfera é

$$E_\text{c} = \frac{1}{2} m\, v_\text{cm}^2 + \frac{1}{2} I_\text{cm}\, \omega^2$$

Usando as expressões do momento de inércia da esfera (tabela 5.1), da velocidade do centro de massa e da velocidade angular, obtém-se

$$E_\text{c} = \frac{1}{2} m\,(R - r)^2\,\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2\,m\,r^2}{5}\right)\frac{(R - r)^2\,\dot{\theta}^2}{r^2} = \frac{7}{10} m\,(R - r)^2\,\dot{\theta}^2$$

(*b*) A energia mecânica é

$$E_\text{m} = \frac{7}{10} m\,(R - r)^2\,\dot{\theta}^2 - m\,g\,(R - r)\,\cos\theta$$

e a sua derivada em ordem ao tempo é

$$\frac{\mathrm{d}E_\text{m}}{\mathrm{d}t} = \frac{7}{5} m\,(R - r)^2\,\dot{\theta}\,\ddot{\theta} + m\,g\,(R - r)\,\dot{\theta}\,\sin\theta$$

Igualando a zero obtém-se

$$\ddot{\theta} = -\frac{5\,g}{7\,(R - r)}\,\sin\theta$$

(*c*) A energia mínima é quando a esfera fica no ponto mais baixo da calha ($\theta = 0$) com velocidade nula ($\dot{\theta} = 0$):

$$E_\text{min} = -m\,g\,(R - r)$$

e a energia máxima é quando a esfera chega até o ponto A ($\theta = 90°$) com velocidade nula ($\dot{\theta} = 0$):

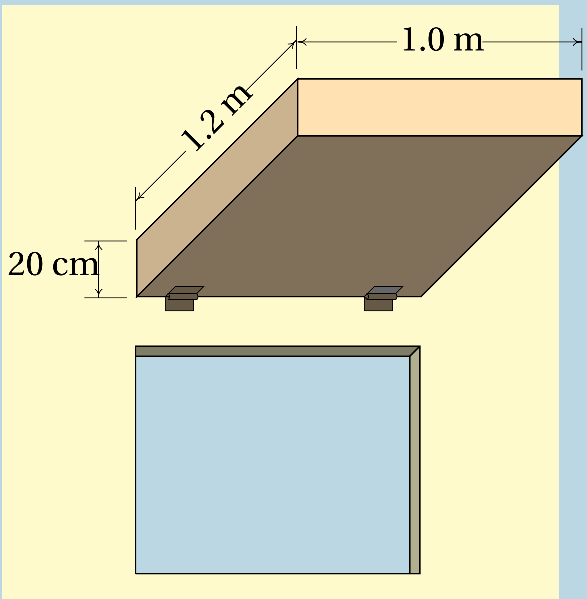
$$E_\text{max} = 0$$

(d) O valor absoluto de $\ddot{\theta}$ é menor num fator 5/7, devido a que parte da energia potencial gravítica é transformada em energia cinética de rotação da esfera. A energia cinética de rotação é sempre 2/5 da energia cinética de translação, independentemente do valor de r; no limite $r \to 0$ também 2/7 da energia gravítica são convertidos em energia de rotação e apenas os restantes 5/7 fazem aumentar θ.

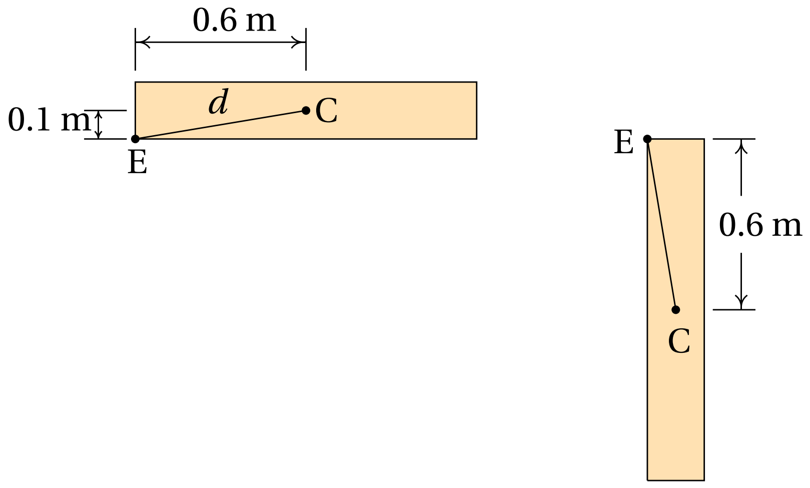
Do ponto de vista das forças, no caso do pêndulo não há nenhuma força oposta ao movimento do centro de massa, enquanto que neste caso a força de atrito estático é oposta ao movimento do centro de massa. No entanto, essa força não realiza nenhum trabalho porque o ponto da esfera onde é aplicada não se desloca e a força de atrito não reduz a energia mecânica da esfera; simplesmente faz com que a energia fornecida pela gravidade sela distribuída entre energias cinéticas de translação e de rotação.

Problema 9

Resolva o problema 8 do capítulo 5 aplicando o princípio de conservação da energia mecânica: A caixa retangular homogénea na figura está ligada a duas dobradiças que lhe permitem rodar para fechar a janela, ou abrir até a posição horizontal apresentada na figura, para dar sombra durante o dia. A corrente que segura a caixa na posição horizontal quebra-se repentinamente e a caixa cai batendo na parede. Desprezando o atrito nos eixos das dobradiças e a resistência do ar, calcule a velocidade angular com que a caixa bate na parede.



A figura seguinte mostra as posições inicial e final da tampa da janela. C é o centro de massa e E o eixo das dobradiças.



Como a velocidade do ponto E é nula, a velocidade do centro de massa é $v_C = d\,\omega$, onde ω é a velocidade angular da tampa. O momento de inércia, em torno do eixo perpendicular à figura, passando pelo centro de massa C, é dado pela expressão para um paralelepípedo na tabela 5.1:

$$I_C = \frac{1}{12}\,m\,(2\,d)^2 = \frac{1}{3}\,m\,d^2$$

A expressão da energia cinética da tampa, em função da velocidade angular é:

$$E_c = \frac{m}{2}\,v_C^2 + \frac{I_C}{2}\,\omega^2 = \frac{m}{2}\,d^2\,\omega^2 + \frac{m}{6}\,d^2\,\omega^2 = \frac{2}{3}\,m\,d^2\,\omega^2$$

Em função da altura h_C do centro de massa, a energia potencial gravítica é:

$$U_g = m\,g\,h_C$$

Por conservação da energia mecânica, $E_c + U_g$ deve ser igual nas posições inicial e final. Medindo h_C desde o ponto E, obtém-se:

$$0 + 0.1\,m\,g = \frac{2}{3}\,m\,d^2\,\omega^2 - 0.6\,m\,g$$

Que conduz ao valor da velocidade angular na posição final:

$$\omega = \sqrt{\frac{3\times 0.7\,g}{2\,d^2}} = \sqrt{\frac{3\times 0.7\times 9.8}{2\,(0.6^2 + 0.1^2)}} = 5.274\ \text{s}^{-1}$$