

12. Sistemas caóticos



Os investigadores da NASA no Centro de Investigação de Langley usam fumo colorido, que ascende desde uma fonte em terra, para visualizar um dos vórtices produzidos na ponta da asa de um avião agrícola. A turbulência associada ao vórtice é um exemplo de movimento caótico. A imprevisibilidade desse movimento torna muito perigosa a aproximação de outros aviões dentro da zona de turbulência. Estudos como este da NASA são usados para determinar a distância mínima recomendável entre aviões em voo, em função das condições; por exemplo, quando há mau tempo esses vórtices são menores porque são dissipados pelo vento.

12.1. Órbitas fechadas atrativas

No capítulo anterior viu-se que quando existe um ciclo limite atrativo, as curvas de evolução aproximam-se assintoticamente desse ciclo. Também é possível existirem órbitas homoclínicas ou heteroclínicas atrativas, como no exemplo seguinte.

Exemplo 12.1

Represente o retrato de fase do sistema com equações de evolução:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x \left(y^2 + 2xy - x - \frac{15}{4}y + 1 \right) \\ \dot{y} &= y \left(-2x^2 - xy + y + \frac{15}{4}x - 1 \right)\end{aligned}$$

e mostre que existe uma órbita heteroclínica atrativa.

Resolução. Começa-se por criar uma lista com as funções f e g , e outra lista com as variáveis de estado:

```
(%i1) fg: [x*(y^2+2*x*y-x-15*y/4+1), y*(-2*x^2-x*y+y+15*x/4-1)]$
(%i2) vars: [x, y]$
```

A seguir, determina-se a posição dos pontos de equilíbrio:

```
(%i3) solve (fg, vars);
(%o3) [[x=0, y=0], [x=1, y=0], [x=0, y=1],
[x=7/4, y=-3/4], [x=4/3, y=4/3], [x=1/4, y=1/4]]
```

existem 6 pontos de equilíbrio. Em vez de calcular a matriz jacobiana para cada ponto, será analisado o retrato de fase, numa região que inclui os 6 pontos de equilíbrio:

```
(%i4) plotdf (fg, vars, [x,-0.5,2], [y,-1.5,2]);
```

Traçando algumas curvas de evolução com o programa `plotdf`, descobre-se que os pontos $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(0, 1)$ são pontos de sela, os pontos $(0.25, 0.25)$ e $(1.333, 1.333)$ são focos repulsivos, e o ponto $(1.75, -0.75)$ é um nó atrativo. Também vê-se que as 3 retas $x = 0$, $y = 0$ e $y = 1 - x$ são separatrizes (ver figura 12.1). O triângulo com vértices nos 3 pontos de sela é uma órbita

heteroclínica.

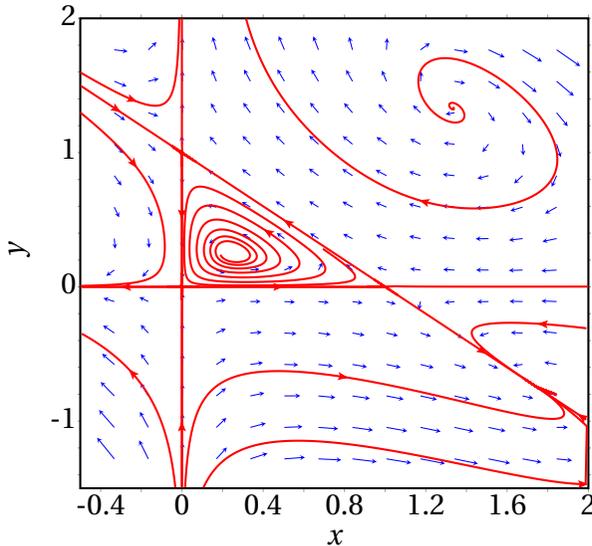


Figura 12.1.: Retrato de fase do exemplo 12.1, com uma órbita heteroclínica atrativa.

Todas as curvas de evolução que saem do foco no ponto $\alpha(\Gamma) = (0.25, 0.25)$ aproximam-se assintoticamente da órbita heteroclínica que, conseqüentemente é atrativa.

A diferença entre uma órbita heteroclínica atrativa, como a que existe no exemplo anterior e um ciclo limite atrativo, está na forma como o sistema se aproxima dessas curvas. Para estudar a forma como é feita essa aproximação no caso da órbita heteroclínica, representa-se o gráfico de evolução das variáveis de estado em função do tempo. Usando o programa `rk`, com valores iniciais $x = 0.26$ e $y = 0.26$, e para t desde 0 até 500,

```
(%i5) sol: rk (fg,vars, [0.26,0.26], [t,0,500,0.1])$
```

convém examinar o resultado da última iteração:

```
(%i6) last (sol);
(%o6) [414.1, 3.657 × 10+20, -2.353 × 10+20]
```

neste caso, o programa `rk` conseguiu integrar unicamente até o tempo final

$t = 414.1$. Em versões do Maxima compiladas com outras variantes de Lisp, o mesmo programa pode parar num tempo t diferente. Isso é devido a que, a acumulação de erros numéricos pode provocar que uma das duas variáveis de estado atinja um valor por fora do triângulo formado pelos 3 pontos de sela; nesse caso, a variável cresce rapidamente para infinito. Quando o valor obtido for muito elevado, provocará um erro no programa `rk` que terminará as iterações nesse ponto.

Para representar os gráficos das duas variáveis de estado, em função do tempo, desde $t = 0$ até $t = 414.1$, com os resultados obtidos, usando apenas um quinto dos pontos obtidos (que é suficiente neste caso), usam-se os comandos:

```
(%i7) solx: makelist([sol[i][1],sol[i][2]],i,1,length(sol),5)$
(%i8) plot2d ([discrete,solx],[y,-0.2,1.2],[xlabel,"t"],
             [ylabel,"x"]);
(%i9) soly: makelist([sol[i][1],sol[i][3]],i,1,length(sol),5)$
(%i10) plot2d ([discrete,soly],[y,-0.2,1.2],[xlabel,"t"],
              [ylabel,"y"]);
```

A figura 12.2 mostra os gráficos obtidos, com a evolução das variáveis de estado em função do tempo.

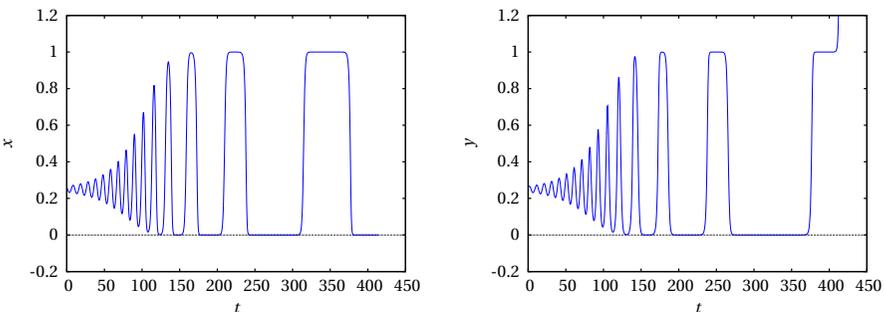


Figura 12.2.: Evolução das variáveis de estado numa curva de evolução que se aproxima da órbita heteroclínica do exemplo 12.1.

Inicialmente, cada variável oscila com período aproximadamente constante e amplitude crescente. A amplitude aproxima-se de um valor máximo e o período começa a aumentar gradualmente. O estado permanece cada vez mais tempo perto de cada ponto de sela, e a seguir desloca-se rapida-

mente para o ponto de sela seguinte. Esse comportamento é semelhante ao que foi analisado na secção 10.3, para a órbita heteroclínica do pêndulo. Nesse caso, com energia ligeiramente menor que a energia no ponto de equilíbrio instável, a curva de evolução do pêndulo encontrava-se muito próxima da órbita heteroclínica. No pêndulo, as curvas na vizinhança interna da órbita heteroclínica são ciclos fechados, que se repetem indefinidamente sem alteração, enquanto que no exemplo anterior as curvas na vizinhança interna da órbita heteroclínica são espirais que se aproximam cada vez mais da órbita heteroclínica.

12.2. Comportamento assintótico

Em capítulos anteriores têm sido apresentados sistemas em que o estado evolui para um ponto de equilíbrio estável. Um exemplo é um pêndulo; o atrito com o ar faz diminuir a amplitude das oscilações e o pêndulo aproxima-se do ponto de equilíbrio estável, na posição mais baixa do pêndulo.

Outros sistemas evoluem aproximando-se de um ciclo no espaço de fase; após algum tempo, cada variável de estado varia de forma cíclica repetitiva. Os pontos do espaço de fase que fazem parte do ciclo limite constituem o **conjunto limite** das curvas de evolução do sistema.

O **conjunto limite positivo**, $\omega(\Gamma)$, de uma curva de evolução Γ no espaço de fase, é o ponto, ou conjunto de pontos, para onde a curva Γ se aproxima no limite $t \rightarrow \infty$. Define-se também o **conjunto limite negativo**, $\alpha(\Gamma)$, constituído pelo ponto ou conjunto de pontos para onde a curva Γ aproxima-se no limite $t \rightarrow -\infty$.

Esses conjuntos limite poderão não existir, se a curva de evolução se afastar continuamente sem limite. Se existirem, os conjuntos limite poderão ser pontos de equilíbrio, ciclos ou órbitas homoclínicas ou heteroclínicas.

A designação α e ω para os conjuntos limite negativo e positivo, é devida a que essas duas letras são a primeira e última letra no alfabeto grego; $\alpha(\Gamma)$ é a origem donde sai a curva de evolução Γ , e $\omega(\Gamma)$ é o fim de Γ .

12.2.1. Teorema de Poincaré-Bendixson

Num sistema dinâmico onde existam unicamente duas variáveis de estado, que possam ter qualquer valor real, o espaço de fase é um plano. Se as

duas variáveis de estado são x_1 e x_2 , o espaço de fase é o plano $x_1 x_2$ e as equações de evolução são:

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \quad \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) \quad (12.1)$$

e a velocidade de fase em qualquer ponto do espaço de fase é o vetor:

$$\vec{u} = f_1(x_1, x_2) \vec{e}_1 + f_2(x_1, x_2) \vec{e}_2 \quad (12.2)$$

Em cada ponto esse vetor determina a tangente à curva de evolução Γ que passa por esse ponto. Duas curvas de evolução diferentes nunca se podem cruzar em nenhum ponto no domínio das funções f_1 e f_2 , porque no ponto onde se cruzavam existiam então duas velocidades de fase diferentes, que não é possível.

O enunciado do teorema de Poincaré-Bendixson é:

Em qualquer sistema com apenas duas variáveis de estado (espaço de fase plano), se existir o conjunto limite positivo, ou negativo, de uma curva de evolução Γ , esse conjunto limite deverá ser um dos três casos seguintes:

- (a) *Um ponto de equilíbrio.*
- (b) *Um ciclo.*
- (c) *Uma órbita homoclínica ou heteroclínica.*

Em particular, quando existir o conjunto limite positivo $\omega(\Gamma)$, chama-se também **atrator**. De acordo com o teorema de Poincaré-Bendixson, num espaço de fase plano os únicos atratores podem ser pontos de equilíbrio, ciclos, órbitas homoclínicas ou órbitas heteroclínicas.

Se o conjunto limite positivo, $\omega(\Gamma)$, de uma curva de evolução for um único ponto, esse ponto deverá ser um ponto de equilíbrio, que pode ser um nó ou foco estável, ou um ponto de sela. Se o conjunto limite negativo, $\alpha(\Gamma)$, for um único ponto, poderá ser um nó ou foco repulsivo, ou um ponto de sela.

Um ponto de sela pode ser simultaneamente conjunto limite positivo e negativo de uma curva de evolução; nomeadamente, a curva de evolução começa na vizinhança desse ponto de sela e fecha-se regressando à região inicial. Esse tipo de curva de evolução constitui uma órbita homoclínica.

12.2.2. Critério de Bendixson.

No espaço de fase $x_1 x_2$, a divergência da velocidade de fase 12.2 é definida por:

$$\nabla \cdot \vec{u} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \quad (12.3)$$

Outro teorema importante, designado de critério de Bendixson é o seguinte:

*Num sistema dinâmico com apenas duas variáveis de estado, se numa região simplesmente conexa R , do plano de fase, a **divergência** da velocidade de fase é sempre positiva ou sempre negativa, então em R não existe nenhum ciclo, nem órbita homoclínica nem órbita heteroclínica.*

Uma região R simplesmente conexa é uma região sem nenhum buraco no seu interior: a reta que une dois pontos quaisquer na região deverá estar contida completamente em R .

O critério de Bendixson é útil para determinar em que regiões do plano de fase podem existir ciclos, órbitas homoclínicas ou heteroclínicas.

Exemplo 12.2

Demonstre que um pêndulo, amortecido pela resistência do ar não pode ter nenhum ciclo, nem órbitas homoclínicas ou heteroclínicas, mas um pêndulo sem amortecimento sim.

Resolução. No capítulo 8 obteve-se a equação de movimento (equação 8.8) que conduz às equações de evolução para o ângulo, θ e a velocidade angular ω :

$$\dot{\theta} = \omega \quad \dot{\omega} = -K_1 \sin \theta - K_2 |\omega| \omega$$

onde K_1 e K_2 são constantes positivas.

A divergência da velocidade de fase é:

$$\nabla \cdot \vec{u} = \frac{\partial \omega}{\partial \theta} + \frac{\partial (-K_1 \sin \theta - K_2 |\omega| \omega)}{\partial \omega} = -2 K_2 |\omega|$$

Como tal, conclui-se que a divergência é sempre negativa (sistema dissipativo) e, assim sendo, não existe nenhum ciclo nem órbitas homoclínicas ou heteroclínicas. No caso conservativo, quando a resistência do ar é nula,

$K_2 = 0$, a divergência é nula e já não se verifica a condição do critério de Bendixson. Como tal, no caso do pêndulo sem amortecimento sim podem existir ciclos e, de facto, todas as curvas de evolução são ciclos.

Se existir uma curva de evolução fechada C , formada por um ciclo, órbita homoclínica ou órbita heteroclínica, as curvas de evolução no interior e na vizinhança de C podem apresentar um dos 3 comportamentos seguintes:

- Aproximam-se assintoticamente de C .
- Afastam-se assintoticamente de C .
- Formam uma família contínua de ciclos.

No primeiro caso, a curva C é o conjunto limite positivo, $\omega(\Gamma)$, de todas as curvas Γ no seu interior. Deve existir necessariamente um ponto de equilíbrio, no interior de C , que seja o conjunto limite negativo $\alpha(\Gamma)$ de todas essas curvas; ou seja, esse ponto de equilíbrio deve ser nó ou foco instável.

No segundo caso, a curva C é conjunto limite negativo, $\alpha(\Gamma)$, de todas as curvas Γ no seu interior. Deve existir necessariamente um ponto de equilíbrio, no interior de C , que seja o conjunto limite positivo $\omega(\Gamma)$ de todas essas curvas; como tal, esse ponto de equilíbrio deve ser nó ou foco estável.

No terceiro caso, um dos ciclos menores pode ser ciclo limite atrativo ou repulsivo, existindo assim um nó ou foco no seu interior, como nos dois casos anteriores. Se nenhum dos ciclos na família de ciclos internos é um ciclo limite, deve existir um centro no interior da família de ciclos.

Independentemente da situação no interior da curva C , no seu exterior podem existir outros ciclos ou C pode ser conjunto limite atrativo ou repulsivo. Isto é, uma órbita fechada pode ser atrativa no interior e no exterior, atrativa no interior mas repulsiva no exterior, etc.

12.3. Bifurcações

Considere-se um pêndulo rígido, como o que foi estudado na secção 10.2, que se encontra sobre uma base horizontal que roda com velocidade angular ω constante (figura 12.3). No problema 5 do capítulo 10 mostrou-se que,

se a velocidade angular for maior que $\sqrt{g/r}$, onde r é a distância desde o eixo até o centro de massa, a posição mais baixa do pêndulo deixa de ser ponto de equilíbrio estável, passando a ser ponto de equilíbrio instável, e aparecem dois novos pontos de equilíbrio estável.

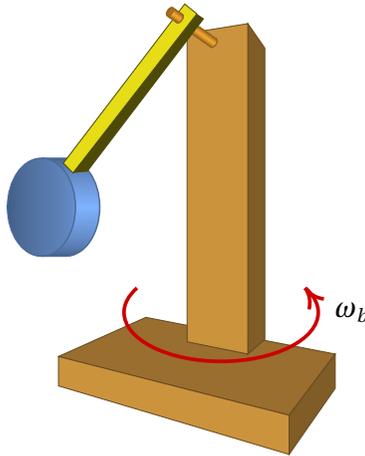


Figura 12.3.: Pêndulo simples com a base em rotação no plano horizontal.

A equação de movimento (ver problema 5 do capítulo 10) conduz às equações de evolução para o ângulo, θ e a velocidade angular, ω

$$\dot{\theta} = \omega \quad \dot{\omega} = \sin \theta \left(\frac{l}{r} \omega_b^2 \cos \theta - \frac{g}{l} \right) \quad (12.4)$$

O lado esquerdo da figura 12.4 mostra o retrato de fase correspondente a essas equações, no caso em que a velocidade angular da base, ω_b , é menor que $\sqrt{g/r}$. Existem dois pontos de equilíbrio, em $\theta = 0$ e $\theta = \pm\pi$; o primeiro ponto é um centro, e o segundo ponto é um ponto de sela.

O lado direito da figura 12.4 mostra o retrato de fase quando a velocidade angular da base, ω_b , é maior que $\sqrt{g/r}$. O ponto de equilíbrio em $\theta = 0$ torna-se instável, passando a ser um ponto de sela com duas órbitas homoclínicas. Dentro de cada órbita homoclínica há um novo centro. O sistema poderá oscilar de forma periódica à volta de algum dos dois centros.

Diz-se que o sistema sofre uma **bifurcação** em $\omega_b = \sqrt{g/r}$. Imagine que a base do pêndulo estivesse inicialmente em repouso, e o pêndulo na posição de equilíbrio estável, com $\theta = 0$ e $\omega = 0$. Se a base começar a rodar com aceleração angular positiva, chegará um instante em que o estado

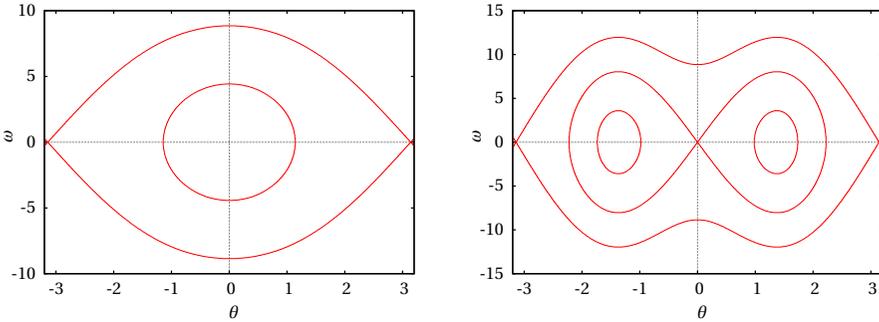


Figura 12.4.: Bifurcação do ponto de equilíbrio de um pêndulo. Esquerda: $\omega < \sqrt{g/r}$. Direita: $\omega > \sqrt{g/r}$.

do pêndulo se torna instável, e qualquer pequena perturbação faz com que o pêndulo suba abruptamente para uma das duas novas posições de equilíbrio estável.

Como normalmente existe alguma incerteza experimental associada às medições de $\theta = 0$ e $\omega = 0$, isso implicará a impossibilidade de prever para qual dos dois novos pontos de equilíbrio irá subir o pêndulo, quando ω_b atingir o valor que produz bifurcação.

Outro exemplo físico simples com bifurcação, já estudado por Euler no século XVIII, é uma barra flexível, por exemplo uma régua plástica apoiada numa mesa, e com uma força externa F que faz com que permaneça na posição vertical. Se F não ultrapassar um valor crítico F_c , a régua permanecerá direta e em equilíbrio. Se a força F ultrapassar o valor crítico F_c , a régua encurva-se, até ficar numa nova posição de equilíbrio em que o centro da régua está afastado uma distância Δx da vertical. Acontece que o desvio da régua pode ser para a direita ou para a esquerda da vertical. Ou seja, existem dois pontos de equilíbrio com Δx positiva ou negativa.

Em função de F , o ponto de equilíbrio $\Delta x = 0$, para $F < F_c$, separa-se em dois pontos de equilíbrio, $\Delta x > 0$ e $\Delta x < 0$, para $F > F_c$. Trata-se de uma bifurcação: em $\Delta x = 0$ ainda existe uma posição de equilíbrio, mas é bastante instável. Aparecem duas novas posições de equilíbrio com Δx positivo e negativo. Numa régua reta e simétrica em relação às deformações para os dois lados, é difícil prever para qual dos dois lados irá inclinar-se, quando F ultrapassa o valor de bifurcação.

12.4. Sistemas caóticos

Num sistema contínuo com duas variáveis de estado, o teorema de Poincaré-Bendixson garante que as curvas de evolução que não têm conjuntos limite positivo nem negativo aproximam-se do infinito nos limites $t \rightarrow \infty$ e $t \rightarrow -\infty$.

Num sistema contínuo com 3 ou mais variáveis de estado, para além dos 3 tipos de conjuntos limites previstos pelo teorema de Poincaré-Bendixson, surge outro tipo de conjunto limite chamado **atrator estranho**. Um atrator estranho é uma curva de evolução infinita, sem princípio nem fim, que ocupa uma região do espaço de fase. Como o atrator estranho não se afasta até o infinito, representa a evolução do sistema de forma semelhante a uma oscilação cíclica; mas como o atrator não tem princípio nem fim, isso significa que a oscilação é sempre diferente sem chegar nunca a repetir-se (período infinito). Esse tipo de comportamento chama-se **caos**.

Os atratores estranhos são **fractais**. As curvas normais têm dimensão igual a 1, ou seja, se todas as distâncias nos eixos aumentam num factor k , o comprimento d da curva aumenta no mesmo factor k ; as superfícies simples têm dimensão igual a 2, porque a sua área aumenta em k^2 . No entanto, as curvas fractais são curvas com dimensão não inteira, entre 1 e 2.

Nas duas secções seguintes estudam-se dois exemplos de sistemas caóticos.

12.4.1. Pêndulo forçado

A figura 12.5 mostra um pêndulo rígido no qual atua uma força externa \vec{F} perpendicular à barra do pêndulo e aplicada a uma distância a desde o eixo do pêndulo. A distância desde o eixo do pêndulo até o seu centro de massa é r e θ é o ângulo entre a barra do pêndulo e a vertical.

Como foi concluído na secção 10.2, a energia cinética de translação do centro de massa, mais a energia cinética de rotação podem ser combinadas num único termo que depende do momento de inércia em relação ao eixo fixo (equação 10.6):

$$E_c = \frac{1}{2} m r l \dot{\theta}^2 \quad (12.5)$$

onde l é o comprimento eficaz do pêndulo, igual ao raio de giração ao

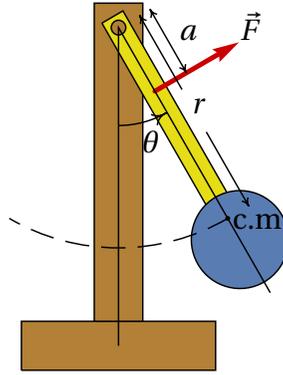


Figura 12.5.: Pêndulo com força externa.

quadrado, dividido por r . Usando como ponto de referência o eixo do pêndulo, a energia potencial gravítica é igual a (equação 10.7),

$$U = -m g r \cos \theta \quad (12.6)$$

Considere-se o caso em que a força externa varia de forma sinusoidal, com valor máximo A e frequência angular k :

$$\vec{F} = A \cos(k t) \hat{e}_\theta \quad (12.7)$$

e o pêndulo move-se dentro de um fluido viscoso que exerce força de resistência ao movimento, proporcional à velocidade:

$$\vec{F}_r = -B \vec{v} \quad (12.8)$$

onde B é uma constante positiva e \vec{v} é a velocidade do centro de massa, $\vec{v} = r \dot{\theta} \hat{e}_\theta$. Como tal, a força de resistência é

$$\vec{F}_r = -B r \dot{\theta} \hat{e}_\theta \quad (12.9)$$

A equação de Lagrange para o ângulo θ (equação 8.4) é

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial \theta} + \frac{\partial U}{\partial \theta} = Q_\theta \quad (12.10)$$

A força generalizada Q_θ depende das duas forças não conservativas, a força externa e a força de resistência do fluido:

$$Q_\theta = \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial \theta} + \vec{F}_r \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \quad (12.11)$$

A força externa atua na posição \vec{r}_a , com componentes

$$\vec{r}_a = a (\sin\theta \hat{i} - \cos\theta \hat{j}) \quad (12.12)$$

E a força de resistência atua no centro de massa do pêndulo

$$\vec{r} = r (\sin\theta \hat{i} - \cos\theta \hat{j}) \quad (12.13)$$

o versor entre parêntesis é o versor radial \hat{r} , e a sua derivada em ordem a θ é igual ao versor transversal $\hat{\theta}$. Substituindo as derivadas e as expressões das forças na equação 12.11, a força generalizada é igual a

$$Q_\theta = a A \cos(kt) - B r^2 \dot{\theta} \quad (12.14)$$

E calculando as derivadas das expressões da energia, a equação de Lagrange conduz à equação de movimento

$$\ddot{\theta} = -C_1 \sin\theta + C_2 \cos\phi - C_3 \dot{\theta} \quad (12.15)$$

onde o ângulo ϕ é igual ao produto kt e C_1 , C_2 e C_3 são 3 constantes positivas:

$$C_1 = \frac{g}{l} \quad C_2 = \frac{aA}{mrl} \quad C_3 = \frac{Br}{ml} \quad (12.16)$$

C_1 é o parâmetro próprio do pêndulo, que determina o seu período próprio de oscilação. C_2 representa o efeito da força externa no pêndulo e C_3 o efeito dissipativo da resistência do fluido no pêndulo.

Para escrever a equação de movimento na forma de um sistema autónomo de primeira ordem, considera-se a velocidade angular $\omega = \dot{\theta}$ uma variável de estado, junto com as outras duas variáveis de estado θ e ϕ . As três equações de evolução são:

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \omega \\ \dot{\omega} &= -C_1 \sin\theta + C_2 \cos\phi - C_3 \omega \\ \dot{\phi} &= k \end{aligned} \quad (12.17)$$

Para estudar o retrato de fase do sistema usam-se alguns valores particulares dos 3 parâmetros e da frequência angular k . Por exemplo, $C_1 = 1$, $C_2 = 0$, $C_3 = 1/2$ e $k = \pi/5$, que corresponde a um caso de um pêndulo amortecido sem força externa. Observe-se que C_1 pode ser sempre definida igual a 1, se forem usadas unidades de tempo diferentes do segundo. Por exemplo, se o

comprimento eficaz do pêndulo fosse $l = 9.8$ cm e o tempo fosse medido em ds (decisegundos), como $g = 9.8$ cm/ds², então $C_1 = 9.8/9.8 = 1$.

Para analisar o comportamento do pêndulo à medida que a força externa aumenta, convém definir a expressão da aceleração angular, $\dot{\omega}$ como função que depende da constante C_2 , com os valores de C_1 , C_3 e k já escolhidos:

```
(%i10) dw(C2) := -sin(q) - C2*cos(u) - w/2$
```

onde q e u são os ângulos θ e ϕ . Para obter uma curva de evolução, escolhem-se valores iniciais para os ângulos e a velocidade angular, por exemplo, $\theta_0 = \pi/6$ e $\phi_0 = \omega_0 = 0$. O domínio de integração de t pode ser desde 0 até 500, com incrementos de 0.05 unidades. Convém criar listas com os nomes das variáveis de estado, os seus valores iniciais e o domínio de integração:

```
(%i11) v: [q, w, u]$
```

```
(%i12) v0: [%pi/6, 0, 0]$
```

```
(%i13) d: [t, 0, 500, 0.05]$
```

O primeiro argumento para o programa `rk` deve ser a lista dos lados direitos das 3 equações de evolução, que neste caso são $\dot{\omega}$, a função que já foi definida como `dw` e k , que tem valor igual a $\pi/5$:

```
(%i14) p: rk ([w, dw(0), %pi/5], v, v0, d)$
```

A lista `p` contém vários pontos, cada um com 4 coordenadas $(t, \theta, \omega, \phi)$. Assim sendo, o gráfico da curva de evolução no plano $\theta\omega$ obtém-se com o seguinte comando:

```
(%i15) plot2d ([discrete, makelist([s[2],s[3]],s,p)],  
[xlabel,"angulo"], [ylabel,"v. angular"]);
```

A figura 12.6 mostra o resultado. Os valores usados para os parâmetros conduzem a um oscilador com amortecimento fraco, que oscila várias vezes antes de parar no ponto de equilíbrio estável.

Com valores de C_2 diferentes de zero, o pêndulo apresenta diferentes tipos de comportamentos. Por exemplo, com valores de C_2 menores que 1, o

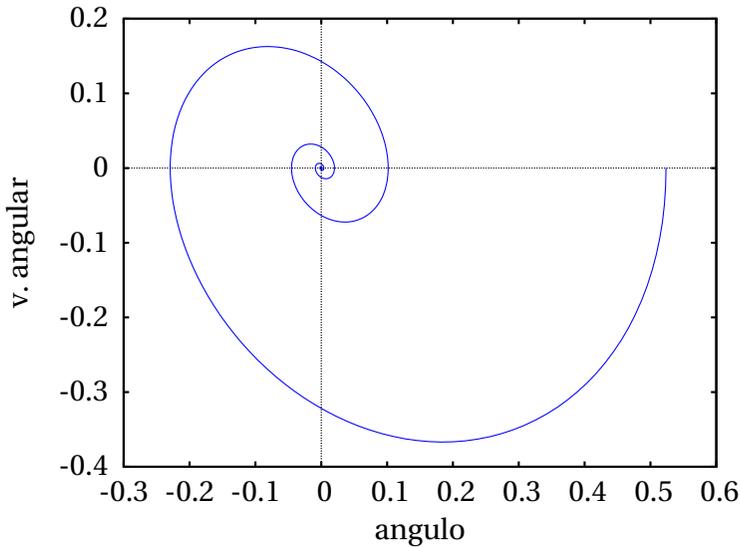


Figura 12.6.: Evolução do pêndulo com $C_2 = 0$.

sistema evolui para um ciclo limite. Para mostrar apenas o ciclo limite, sem a parte inicial quando o sistema ainda não entrou nesse ciclo, convém repetir o comando `rk` usando como valores iniciais os valores finais da iteração anterior. Como o resultado é guardado na lista `p`, o comando `last(p)` extrai esse último resultado mas, como esse último resultado inclui também o valor do tempo, para eliminar o primeiro elemento (tempo) e ficar com uma lista com os valores das 3 variáveis de estado, usa-se o comando `rest`. No caso $C_2 = 0.8$, o procedimento descrito é assim:

```
(%i16) p: rk ([w, dw(0.8), %pi/5], v, v0, d)$
(%i17) p: rk ([w, dw(0.8), %pi/5], v, rest(last(p)), d)$
(%i18) plot2d ([[discrete, makelist([s[2],s[3]],s,p)],
               [discrete, makelist([p[200*i][2],p[200*i][3]],i,1,50)]],
               [style,lines,points],[legend,false],
               [xlabel,"angulo"],[ylabel,"v. angular"]);
```

A figura 12.7 mostra o gráfico obtido.

A segunda lista no comando `plot2d` em (%i18) produz 50 pontos, representados pelo quadrado no gráfico. Esses 50 pontos estão espaçados por

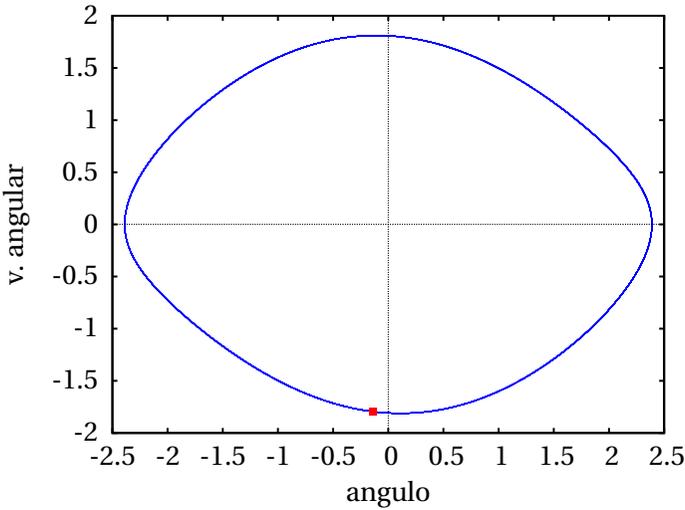


Figura 12.7.: Ciclo limite quando $C_2 = 0.8$.

intervalos de tempo de 10 unidades (200 iterações com incrementos de 0.05) e, como a frequência angular da força externa é $\pi/5$, então esses 50 pontos correspondem aos instantes sucessivos em que a força externa começa um novo ciclo: $\phi = 2\pi, 4\pi, \dots$. O facto de que os 50 pontos (quadrados no gráfico) aparecem todos uns sobre os outros indica que o pêndulo oscila com o mesmo período da força externa.

Aumentando o valor de C_2 para 0.995 e repetindo os mesmos comandos (%i16), (%i17) e (%i18), mas com esse novo valor de C_2 , obtém-se o gráfico da figura 12.8. O ciclo limite agora é duplo, ou seja, dá duas voltas no espaço de fase antes de regressar ao ponto inicial. As 50 oscilações da força externa aparecem agora em dois pontos diferentes, indicando que o período de oscilação do pêndulo é agora o dobro do período da força externa.

Entre $C_2 = 0.8$ e $C_2 = 0.995$ ocorreu uma **duplicação do período**. A curva que define o ciclo limite estável em C_2 menor que o valor onde há duplicação do período, passa a ser instável quando C_2 ultrapassa esse valor e aparece uma curva dupla nos dois lados dessa curva inicial, que constitui o ciclo estável duplo. A bifurcação do ciclo limite é um fenómeno semelhante à bifurcação dos pontos de equilíbrio estudada na secção anterior.

Quando C_2 continua a aumentar por cima de 0.995, ocorrem mais duplicações do período. Por exemplo, com $C_2 = 0.998$ obtém-se o ciclo quadruplo na figura 12.9; o período da oscilação do pêndulo é nesse caso quatro vezes

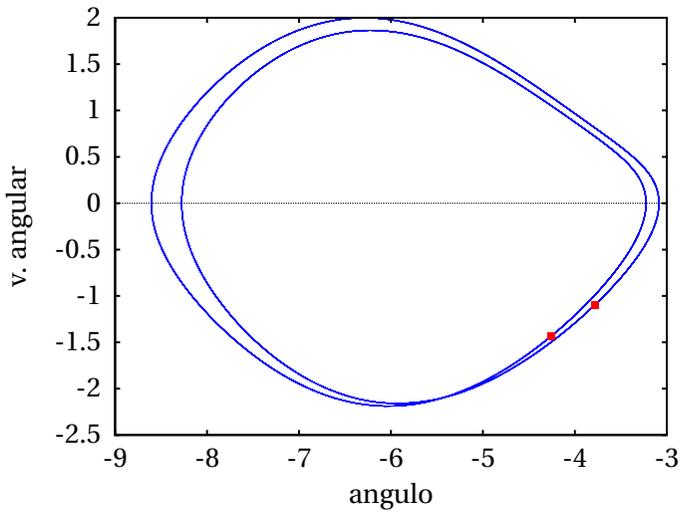


Figura 12.8.: Ciclo duplo, com $C_2 = 0.995$.

o período da força externa. Os valores de C_2 em que ocorrem duplicações do período estão cada vez mais próximos dos anteriores. Assim sendo, há um valor de C_2 em que o período do pêndulo aproxima-se de infinito, ou seja, o pêndulo nunca chega a repetir uma oscilação!

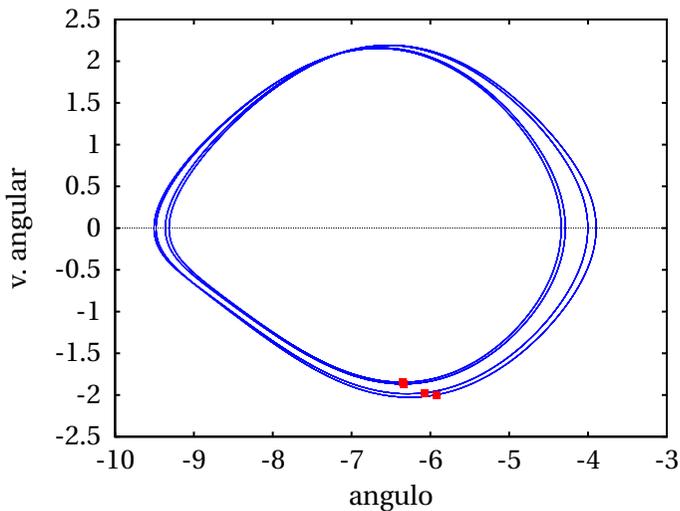


Figura 12.9.: Ciclo quadruplo, com $C_2 = 0.998$.

O valor $C_2 = 1.03$, é superior ao valor onde o período de oscilação é infinito.

O resultado é o atrator estranho apresentado na figura 12.10. Os cinquenta quadrados, correspondentes ao início de cada ciclo da força externa, aparecem em pontos diferentes. Se o comando (%i17) for repetido, esses cinquenta pontos aparecem em novos sítios diferentes e a aparência do atrator é diferente. Trata-se de facto de uma oscilação caótica, que nunca chega a repetir-se. A parte do atrator estranho apresentada na figura 12.10 corresponde a várias oscilações em torno dos pontos de equilíbrio estável $\theta = 0, -2\pi$ e -4π .

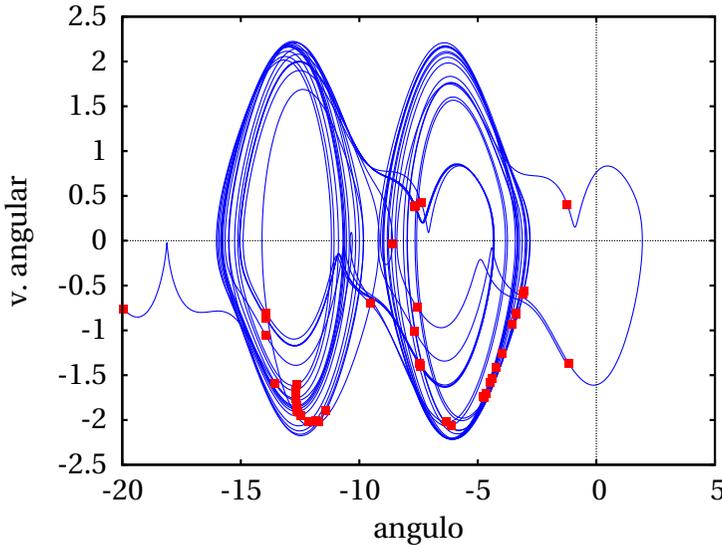


Figura 12.10.: Oscilação caótica, com $C_2 = 1.03$.

O pêndulo oscila algumas vezes em torno da posição de equilíbrio, com diferentes amplitudes, e em alguma dessas oscilações a amplitude aumenta tanto que faz com que o pêndulo descreva uma volta completa. Após quantas oscilações isso acontece, ou em qual dos dois sentidos será a próxima volta completa não segue nenhum padrão simples. Claro está que o movimento no atrator estranho não é aleatório e está perfeitamente determinado pelas equações de evolução. No entanto, uma pequena alteração das condições iniciais faz com que o movimento comece num ponto diferente do atrator estranho, produzindo um padrão de oscilações completamente diferente. O próprio erro numérico inerente aos cálculos feitos pelo programa `rk` implica a impossibilidade de saber se o resultado dado pelo programa estará na parte do atrator estranho onde realmente

estará o pêndulo ou se estará a obter-se outra região diferente desse atrator estranho.

Nos sistemas caóticos, dentro da região caótica costumam aparecer “janelas” de ordem, em que o sistema tem soluções com período finito. Por exemplo, com $C_2 = 1.1$, obtém-se o ciclo limite triplo apresentado na figura 12.11.

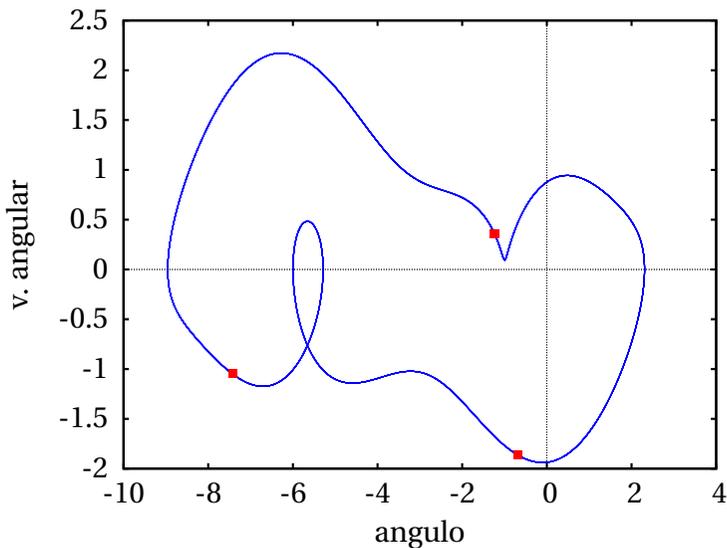


Figura 12.11.: Ciclo triplo, quando $C_2 = 1.1$.

O período do ciclo com $C_2 = 1.1$ é três vezes o período da força externa. Os ciclos triplos são uma das propriedades associadas à existência de atratores estranhos. Quando C_2 é um pouco maior do que 1.1, entra-se novamente numa região de movimento caótico.

Neste exemplo do pêndulo forçado, o movimento caótico surge devido ao fenômeno de duplicação do período. Outro exemplo de sistema que se torna caótico devido à duplicação do período é o sistema de Rössler (problema 10 do capítulo 11 e problema 3 no fim deste capítulo). Existe outro mecanismo diferente que também conduz à aparição de atratores estranhos, ilustrado pelo exemplo da próxima secção.

12.4.2. Equações de Lorenz

No sistema estudado na secção anterior, o atrator estranho permanece numa região finita do plano $\theta\omega$, mas a terceira variável de fase, ϕ , está sempre a aumentar; ou seja, o atrator estranho estende-se em todo o eixo ϕ , desde menos infinito até infinito. Outro exemplo de sistema caótico no qual todas as variáveis permanecem numa região finita do espaço de fase é o sistema de Lorenz.

Em 1963, o meteorologista E. N. Lorenz introduziu um modelo meteorológico para as correntes de convecção do ar em planos verticais, produzidas por aquecimento na aresta inferior dos planos. As três equações diferenciais do sistema são as seguintes

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma (y - x) \\ \dot{y} &= r x - y - x z \\ \dot{z} &= x y - b z\end{aligned}\tag{12.18}$$

onde x representa a amplitude das correntes de convecção, y é a diferença de temperaturas entre as correntes ascendente e descendente e z representa o desvio da temperatura normal no plano. Os três parâmetros σ , r e b são positivos e dependem das propriedades físicas do fluxo de ar.

Algumas propriedades deste sistema são as seguintes:

- Existe simetria em relação à transformação $(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, z)$
- O eixo z é invariante; ou seja, se o estado em algum instante estiver no eixo z , continuará a evoluir nesse eixo.
- Se o parâmetro r (número de Rayleigh) estiver no intervalo $0 < r < 1$, o único ponto de equilíbrio é a origem, que é ponto de equilíbrio estável.
- Existe uma bifurcação do ponto de equilíbrio na origem, quando $r = 1$. Para valores r superiores a 1, a origem torna-se ponto de equilíbrio instável, e aparecem outros dois pontos de equilíbrio, com o mesmo valor de z , mas com valores simétricos de x e y .
- Se r estiver entre 1 e o valor crítico:

$$r_c = \frac{\sigma(\sigma + b + 3)}{\sigma - b - 1}\tag{12.19}$$

os dois novos pontos de equilíbrio são estáveis e a origem é instável.

Para valores de r superiores ao valor crítico, os 3 pontos de equilíbrio são instáveis, e constituem um atrator estranho.

Alguns valores típicos de σ (número de Prandtl) e de b são 10 e $8/3$. Com esses parâmetros, o valor crítico de r é aproximadamente 24.737. O valor $r = 28$, conduz a um sistema caótico. Nesse caso as equações de Lorenz são,

```
(%i19) eqs: [10*(y-x), 28*x-y-x*z, x*y-8*z/3] $
```

Podem guardar-se os nomes das variáveis de estado e uns valores iniciais para elas em duas listas:

```
(%i20) v: [x,y,z] $
```

```
(%i21) v0: [5,5,5] $
```

Para obter a curva de evolução com esses valores iniciais $x = y = z = 5$, desde $t = 0$ até $t = 20$, convém primeiro conferir que a solução numérica tenha um erro numérico aceitável; isso consegue-se diminuindo sucessivamente o valor de Δt , até os resultados convergirem:

```
(%i22) p: rk (eqs,v,v0,[t,0,20,0.005]) $
```

```
(%i23) last (p);
```

```
(%o23) [20.0, -9.828, -15.52, 19.71]
```

```
(%i24) p: rk (eqs,v,v0,[t,0,20,0.001]) $
```

```
(%i25) last (p);
```

```
(%o25) [20.0, -9.983, -16.02, 19.29]
```

```
(%i26) p: rk (eqs,v,v0,[t,0,20,0.0005]) $
```

```
(%i27) last (p);
```

```
(%o27) [20.0, -9.983, -16.03, 19.28]
```

A lista `p` pode ser usada para obter vários gráficos diferentes. Por exemplo, para representar o gráfico da projeção da curva no plano xz , usa-se o seguinte comando:

```
(%i28) plot2d ([discrete,makelist([s[2],s[4]],s,p)], [ylabel,"z"]);
```

A figura 12.12 mostra o resultado. O sistema oscila em torno dos dois pontos de equilíbrio estável, com $x = \pm 8.485$ e $z = 27$. Após algumas oscilações em torno de um desses pontos, com amplitudes diferentes, o sistema passa a oscilar à volta do outro ponto de equilíbrio. A variação da amplitude das oscilações e o número de oscilações antes de passar para o outro ponto de equilíbrio, não segue nenhum padrão repetitivo.

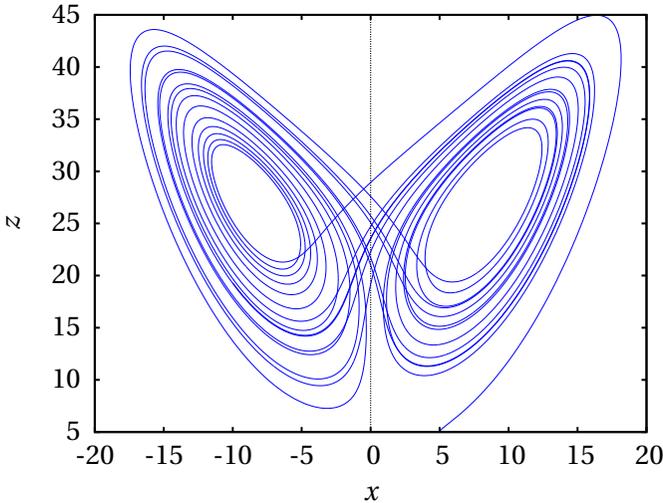


Figura 12.12.: Atrator estranho de Lorenz, projetado no plano xz .

O número de oscilações em cada ponto de equilíbrio é identificado mais facilmente no gráfico de x em função de t (figura 12.13). O sistema começa por aproximar-se do ponto de equilíbrio em x positivo, mas salta logo para o lado negativo de x , realizando sete oscilações completas em torno do ponto de equilíbrio em x negativo, passando logo para x positivo, onde faz duas oscilações completas, etc.

O gráfico 12.13 mostra também a solução obtida começando com um valor inicial ligeiramente diferente, $x = 5.005$, em vez de 5. A figura foi produzida com o seguinte comando:

```
(%i29) p2: rk (eqs,v,[5.005,5,5],[t,0,20,0.0005])$
(%i30) plot2d ([[discrete,makelist([s[1],s[2]]),s,p)],
               [discrete,makelist([s[1],s[2]]),s,p2]]),
               [xlabel,"t"],[ylabel,"x"],[legend,false]);
```

As duas soluções parecem idênticas até $t = 10$, mas a partir desse tempo

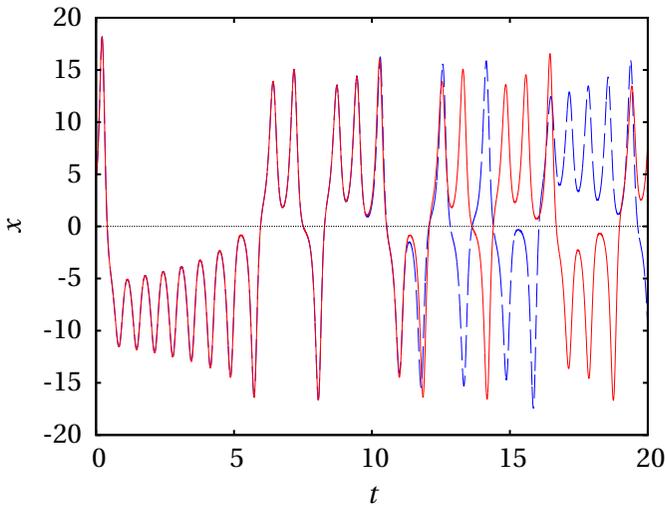


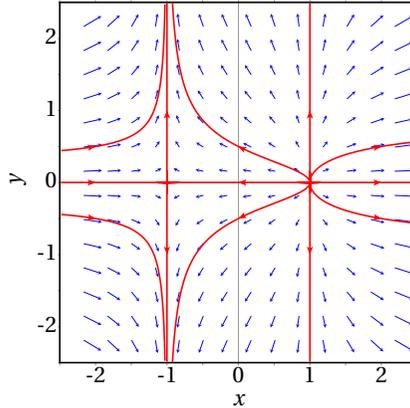
Figura 12.13.: Oscilações do sistema de Lorenz com dois valores iniciais diferentes, $x(0) = 5$ e $x(0) = 5.005$. Parâmetros: $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $r = 28$, $y(0) = 5$, $z(0) = 5$.

começam a diferir; em t aproximadamente 12.5, a primeira solução passa de x positivo para negativo, enquanto a outra solução continua oscilando no lado positivo de x . A partir desse instante as duas soluções são drasticamente diferentes. Essa sensibilidade em relação aos valores iniciais é outra das características dos sistemas caóticos.

O mecanismo que dá origem a que o sistema de Lorenz se torne caótico, quando r aumenta por cima de um valor crítico, chama-se **intermitência**. O ponto de equilíbrio estável em $x = 0$ bifurca-se, passando a ser instável e com a aparição de dois pontos de equilíbrio estável com x positivo e x negativo; as oscilações, que no caso não caótico eram em torno do único ponto de equilíbrio estável passam a alternar de forma intermitente entre os dois pontos de equilíbrio estável no caso caótico.

Perguntas

1. No sistema representado na figura, qual é o conjunto limite negativo da curva de evolução que passa pelo ponto $(0, 0.5)$?



- A. $(0, -0.5)$ C. $(0, 0)$ E. não existe
 B. $(1, 0)$ D. $(-1, 0)$
2. Se a curva de evolução de um sistema dinâmico, no espaço de fase, passa duas vezes pelo mesmo ponto P, o que é que podemos concluir?
- A. P é um ponto de equilíbrio.
 B. o sistema é caótico.
 C. o sistema tem mais do que duas variáveis de estado.
 D. o sistema tem duas variáveis de estado.
 E. a curva é um ciclo.
3. Qual das seguintes não é uma propriedade dos sistemas caóticos?
- A. sistema não linear.
 B. 3 ou mais variáveis de estado.
 C. existência de atratores estranhos.
 D. soluções não periódicas.
 E. inexistência de pontos de sela.
4. Para resolver numericamente um sistema caótico, é necessário usar maior precisão do que para um sistema não caótico. Isso é devido a que um sistema caótico:

- A. não tem curvas de evolução periódicas.
 - B. tem mais do que duas variáveis de estado.
 - C. é muito sensível às condições iniciais.
 - D. produz fractais.
 - E. tem soluções que aumentam muito rapidamente.
5. Em que condições poderá um sistema de duas espécies tornar-se caótico?
- A. só se for sistema predador presa.
 - B. só se existir competição entre as espécies.
 - C. só se existir cooperação entre espécies.
 - D. só se o sistema não for autónomo.
 - E. nunca.

Problemas

1. Em cada caso, encontre os conjuntos limite positivo e negativo das curvas de evolução que passam pelos pontos $(0, 0)$ e $(1, 1)$, usando técnicas analíticas ou gráficas:

$$(a) \dot{x} = x, \quad \dot{y} = x^2 + y^2 - 1.$$

$$(b) \dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x$$

2. Demonstre que o sistema

$$\dot{x} = 2x - y + 36x^3 - 15y^2 \quad \dot{y} = x + 2y + x^2y + y^5$$

não tem ciclos, nem órbitas homoclínicas ou heteroclínicas.

3. O sistema de Rössler é definido pelas seguintes equações de evolução, com 3 parâmetros positivos a , b e c :

$$\dot{x} = -y - z \quad \dot{y} = x + cy \quad \dot{z} = a + (x - b)z$$

Investigue a solução do sistema com $a = 2$ e $b = 4$ fixos e com os seguintes valores de c : (a) $c = 0.3$ (b) $c = 0.35$ (c) $c = 0.375$ (d) $c = 0.398$.

Em cada caso use o programa **rk** para obter a solução, com incrementos de tempo $\Delta t = 0.01$ e de forma a que sejam feitas 6000 iterações. Pode usar como valores iniciais $x = y = z = 2$. Trace os gráficos da curva projetada no plano xy e de x em função de t . Volte a executar 6000 iterações do programa **rk**, mas agora usando como valores iniciais os valores

finais obtidos na primeira execução do programa (o comando `rest` (`last` (`lista`))) extrai o último vetor na lista anterior, excluindo o tempo). Trace novamente os mesmos gráficos e repita o procedimento até conseguir concluir qual é o conjunto limite positivo da curva considerada e se for um ciclo, determine o seu período. Em cada alínea diga qual é o conjunto limite, o seu período (se for um ciclo) e mostre um gráfico que justifique a sua conclusão.

4. Use o mesmo procedimento do problema anterior e responda às mesmas perguntas, mas para o sistema de Chen e Ueta:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= (28 - \sigma)x + 28y - xz \\ \dot{z} &= xy - 3z\end{aligned}$$

com os seguintes valores do parâmetro: (a) $\sigma = 35$ (b) $\sigma = 50$ (c) $\sigma = 60$ Use incrementos de tempo de 0.001, 6000 iterações e valores iniciais $x = 0.1$, $y = z = 0$. Analise os gráficos da curva no plano yz e de y em função de t .

5. Encontre os pontos de equilíbrio do sistema de Lorenz com os seguintes parâmetros:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 10(y - x) \\ \dot{y} &= 28x - y - zx \\ \dot{z} &= xy - \frac{8}{3}z\end{aligned}$$

e demonstre que o valor de $r = 28$ é superior ao valor crítico para que o sistema seja caótico.

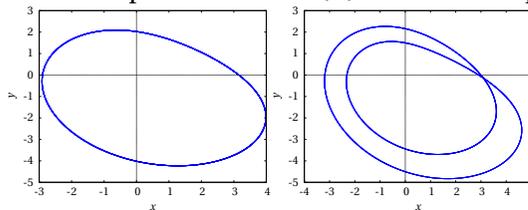
Respostas

Perguntas: 1. B. 2. E. 3. E. 4. C. 5. D.

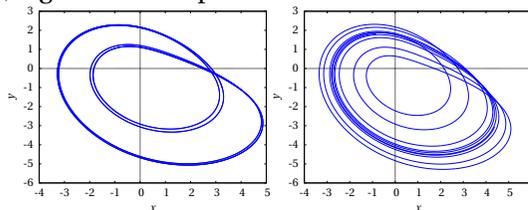
Problemas

- (a) Para o ponto $(0, 0)$, α é o ponto $(0, 1)$ e ω é o ponto $(0, -1)$. Para $(1, 1)$ α é o ponto $(0, 1)$ e ω não existe.

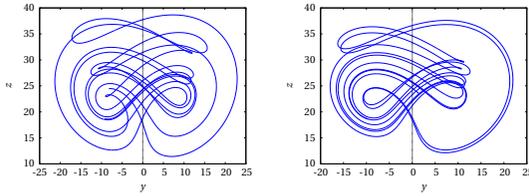
(b) Para o ponto $(0, 0)$, que é ponto de equilíbrio, α e ω são o próprio ponto. Para $(1, 1)$ α e ω são iguais ao círculo que com centro na origem e raio igual a $\sqrt{2}$.
- A divergência é $4 + 109x^2 + 5y^4$, que é sempre positiva. O critério de Bendixson implica que não existe nenhum ciclo nem órbitas homo/heteroclínicas.
- Os dois gráficos seguintes, mostram que o conjunto limite positivo na alínea (a) é um ciclo simples e na alínea (b) é um ciclo duplo:



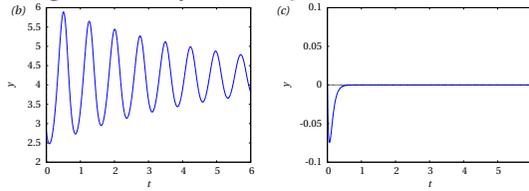
O período calcula-se com precisão no gráfico x vs t , medindo o tempo entre várias oscilações e dividindo pelo número de oscilações. Na alínea (a) o período é 6.2 e na alínea (b) 12.4. O gráfico seguinte mostra que na alínea (c) obtém-se um ciclo quadruplo, com período 24.8 e na alínea (d) o resultado é um atrator estranho, porque cada vez que se calculam mais iterações, o gráfico é sempre diferente.



- Na alínea (a) o conjunto limite é um atrator estranho, porque cada vez que se calculam mais iterações o gráfico é sempre diferente; o gráfico seguinte mostra dois desses resultados, no plano yz .



Na alínea (b) o conjunto limite é um foco atrativo em $(4.24, 4.24, 6)$ e na alínea (c) o conjunto limite é um nó atrativo na origem, como mostram os dois gráficos seguintes de y em função de t :



As coordenadas dos pontos de equilíbrio para onde a curva se aproxima obtêm-se a partir do último elemento na lista produzida por `rk`.

- 5. Os 3 pontos de equilíbrio são: $(0, 0, 0)$, $(8.485, 8.485, 27)$ e $(-8.485, -8.485, 27)$. O valor crítico de r é 24.737, menor que 28.