9. Sistemas lineares

Um metrónomo produz pulsos de duração regular que podem ser ajustados deslocando um peso na haste que oscila. Os osciladores jogam um papel muito importante na teoria dos sistemas dinâmicos, como casos típicos de sistemas lineares.

9.1. Sistemas lineares no plano

Um sistema dinâmico com duas variáveis de estado é definido por duas equações de evolução com a forma geral 7.2 introduzida no capítulo 7:

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \qquad\qquad \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) \tag{9.1}$$

Diz-se que o sistema é linear quando as duas funções f_1 e f_2 são combinações lineares das variáveis de estado:

$$f_1 = A_{11}\,x_1 + A_{12}\,x_2 \qquad\qquad f_2 = A_{21}\,x_1 + A_{22}\,x_2 \tag{9.2}$$

onde A_{11}, A_{12}, A_{21} e A_{22} são quatro constantes. As duas equações de evolução podem ser escritas de forma mais compacta usando matrizes:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} \tag{9.3}$$

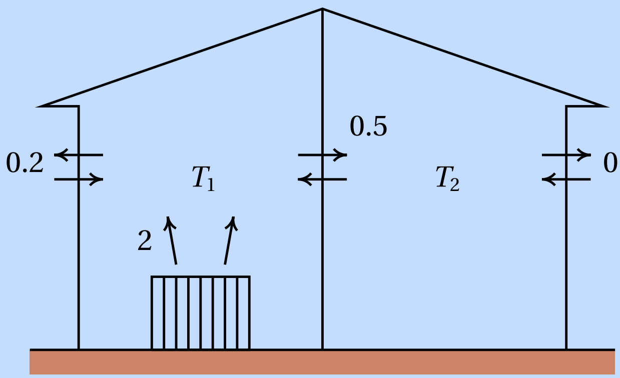
Os pontos de equilíbrio determinam-se substituindo o lado esquerdo da equação 9.3 por uma matriz com zeros nas duas linhas, dando um sistema de equações lineares, homogéneo. Um sistema linear homogéneo tem sempre uma solução, chamada trivial, em que todas as variáveis são nulas; em alguns casos, quando o determinante da matriz do sistema é nulo, existem muitas mais soluções. Como tal, quando o determinante da matriz A_{ij} é diferente de zero, o sistema dinâmico tem um único ponto de equilíbrio: $x_1 = x_2 = 0$, localizado na origem do espaço de fase. Nos casos em que o determinante da matriz A_{ij} é nulo, as derivadas das duas variáveis de estado são a mesma função, multiplicada por uma constante, e o sistema pode reduzir-se a um sistema linear com uma única variável de estado e um único ponto de equilíbrio na origem.

Quando as equações de evolução são combinações lineares das variáveis de estado mais uma constante, o ponto de equilíbrio já não é a origem do espaço de fase, mas é possível obter um sistema linear por meio de uma substituição de variáveis, que corresponde a deslocar a origem para o ponto de equilíbrio, tal como se mostra no exemplo seguinte.

Exemplo 9.1
As equações de transferência de calor, que determinam temperaturas T_1 e T_2 em duas divisões de uma casa, são as seguintes:

$$\frac{\mathrm{d}T_1}{\mathrm{d}t} = 2 - 0.2(T_1 - 8) - 0.5(T_1 - T_2)$$
$$\frac{\mathrm{d}T_2}{\mathrm{d}t} = -0.1(T_2 - 8) - 0.5(T_2 - T_1)$$

em que as temperaturas são medidas em graus Celsius e o tempo em horas. A temperatura exterior é 8 °C. Os termos $-0.2(T_1 - 8)$ e $-0.1(T_2 - 8)$ representam o calor que sai de cada divisão para o exterior, por unidade de tempo, divididos pelas capacidades caloríficas de cada divisão. O termo $-0.5(T_1 - T_2)$ tem a ver com o calor que passa de uma divisão para a outra e o termo constante 2 é devido a que na primeira divisão há um aquecedor ligado que fornece uma quantidade constante de calor a cada hora. Determine as temperaturas das duas divisões no estado de equilíbrio e escreva o sistema de forma linear.



Resolução. Os lados direitos das duas equações diferenciais definem as componentes da velocidade de fase, no espaço de fase (T_1, T_2). Os pontos de equilíbrio, onde o estado do sistema permanece constante, são os pontos onde essas duas componentes são nulas. Usando comando o solve,

```
(%i1) eq1: 2 - 0.2*(T1 - 8) - 0.5*(T1 - T2)$
(%i2) eq2: - 0.1*(T2 - 8) - 0.5*(T2 - T1)$
(%i3) solve([eq1, eq2]);
```

(%o3) $\left[\left[T2 = \frac{236}{17}, T1 = \frac{256}{17}\right]\right]$

```
(%i4) float(%);
```

(%o4) $[[T2 = 13.88,\ T1 = 15.06]]$

ou seja, no estado de equilíbrio as temperaturas das duas divisões são 15.06 °C e 13.88 °C.

Para tornar o sistema linear basta deslocar a origem de coordenadas para o ponto de equilíbrio. Isso consegue-se definindo duas novas variáveis:

$$x_1 = T_1 - \frac{256}{17} \qquad x_2 = T_2 - \frac{236}{17}$$

e nesse sistema de variáveis as equações do sistema são (basta eliminar os termos constantes no sistema original):

$$\dot{x}_1 = -0.7\,x_1 + 0.5\,x_2 \qquad \dot{x}_2 = 0.5\,x_1 - 0.6\,x_2 \tag{9.4}$$

A figura 9.1 mostra as nulclinas, onde cada uma das componentes da velocidade de fase do exemplo 9.1 é nula. Na nulclina de T_2, a derivada $\dot{T}_2$ é nula e, portanto, se o estado inicial fosse um ponto sobre essa reta, a temperatura T_2 permanecia constante e o estado evoluía na direção paralela ao eixo T_1. Se o estado inicial estivesse na nulclina de T_1, evoluía então na direção paralela ao eixo T_2. O ponto de equilíbrio encontra-se na interseção das duas nulclinas. Na região entre as duas nulclinas, os vetores na figura mostram que a velocidade de fase tem de apontar na direção do ponto de equilíbrio e o estado deverá aproximar-se do ponto de equilíbrio; mas será que nas outras regiões o estado inicial também se aproxima do estado de equilíbrio? na próxima secção mostra-se um método geral para responder essa questão.

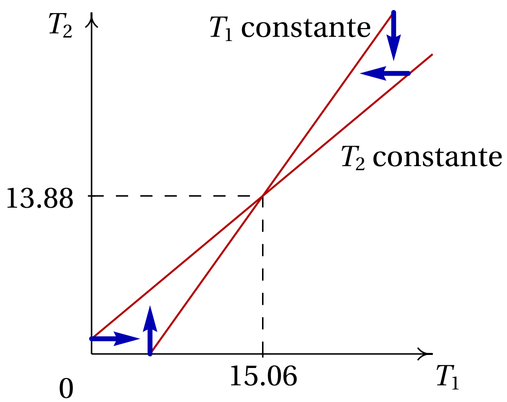


Figura 9.1.: Nulclinas e temperaturas de equilíbrio no exemplo 9.1.

Quando as equações de evolução são obtidas a partir de uma única equação diferencial de segunda ordem, $\ddot{x} = f(x, \dot{x})$, o sistema dinâmico é linear se a função f é uma combinação linear de x e $\dot{x}$. Nesse caso, a forma matricial do sistema é

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} \tag{9.5}$$

onde C_1 e C_2 são duas constantes.

9.2. Estabilidade dos sistemas lineares

No exemplo 9.1, se as temperaturas de cada divisão atingirem os valores de equilíbrio, permanecerão constantes. Mas será que as temperaturas chegam a atingir esses valores? Ou será que enquanto a temperatura de uma das divisões se aproxima do seu valor de equilíbrio a outra temperatura afasta-se do seu valor de equilíbrio? E se as temperaturas inciais estivessem muito próximas dos seus valores de equilíbrio, será que se aproximarão ainda mais, ou se afastarão desses valores de equilíbrio?

Nos sistemas analisados no capítulo 7, quando o estado inicial do sistema está próximo de um ponto de equilíbrio instável, o sistema pode terminar afastando-se até o infinito, ou afastar-se inicialmente regressando para o ponto inicial. Se o estado inicial estiver próximo de um ponto de equilíbrio estável o sistema oscila. No exemplo 9.1, se existissem ciclos no espaço de fase, existia a possibilidade de que as duas temperaturas flutuassem de forma periódica, sem chegar a se estabilizar.

A seguir introduz-se um método geral para analisar a estabilidade dos sistemas lineares, ou seja, o seu comportamento na vizinhança dos pontos de equilíbrio. A equação matricial 9.3 pode interpretar-se como a representação matricial da equação vetorial:

$$\vec{u} = \mathbf{A}\,\vec{r} \tag{9.6}$$

onde a posição $\vec{r}$ e a velocidade $\vec{u}$ do estado são vetores no espaço de fase e **A** é um operador linear que atua sobre os vetores do espaço de fase produzindo outros vetores nesse espaço.

Se num instante a velocidade de fase $\vec{u}$ e o vetor posição no espaço de fase, $\vec{r}$, estão na mesma direção, há duas possibilidades, tal como mostra a figura 9.2: se os dois vetores têm sentidos opostos, o estado aproxima-se da

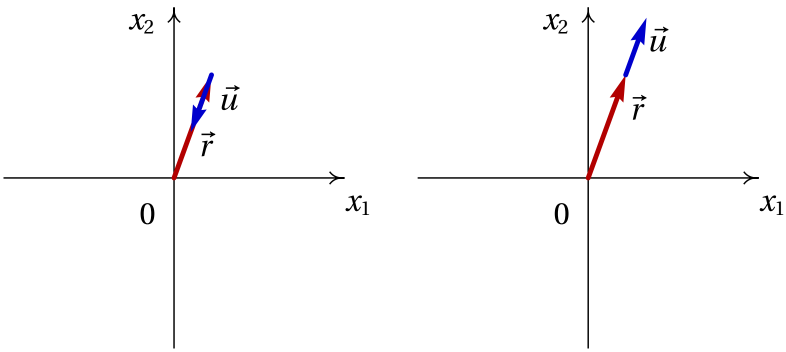


Figura 9.2.: Quando a velocidade é na direção da posição, o sistema aproxima-se ou afasta-se da origem.

origem (ponto de equilíbrio) e se têm o mesmo sentido, o estado afasta-se da origem. A condição para que $\vec{u}$ e $\vec{r}$ tenham a mesma direção é

$$\vec{u} = \lambda\,\vec{r} \tag{9.7}$$

onde λ é um número real. Se λ é positivo, o sistema afasta-se-á do ponto de equilíbrio e se λ é negativo, o sistema aproxima-se do ponto de equilíbrio. Substituindo a expressão anterior na equação 9.6, obtém-se:

$$\boxed{\mathbf{A}\,\vec{r} = \lambda\,\vec{r}} \tag{9.8}$$

Os vetores $\vec{r}$ que verificam a condição 9.8 chamam-se **vetores próprios** do operador **A** e os respetivos valores λ são os **valores próprios** do operador.

Exemplo 9.2
Encontre os valores e vetores próprios do sistema linear do exemplo 9.1.

Resolução. Como as equações de evolução já foram armazenadas nas variáveis `eq1` e `eq2`, pode usar-se o comando coefmatrix para obter a matriz do sistema (equação 9.4):

```
(%i5) A: coefmatrix ([eq1,eq2],[T1,T2]);
```

(%o5)
$$\begin{bmatrix} -\frac{7}{10} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

que são as mesmas 4 constantes nas combinações lineares das equações 9.4. O comando eigenvectors do Maxima determina os valores e vetores próprios de uma matriz:

```
(%i6) eigenvectors (A)$

(%i7) float (%);

(%o7) [[[−1.152, −0.1475], [1.0, 1.0]], [[[1.0, −0.905]], [[1.0, 1.105]]]]
```

A primeira lista mostra os valores próprios, $\lambda_1 = -1.152$ e $\lambda_2 = -0.1475$. A segunda lista são as "multiplicidades" de cada valor próprio, que neste caso são ambas 1. As últimas duas listas definem as direções dos vetores próprios correspondentes aos dois valores próprios; quaisquer vetores na mesma direção de um desses dois vetores, também é vetor próprio.

Como existem dois valores próprios negativos, existem assim duas direções no plano de fase em que o estado do sistema aproxima-se do estado de equilíbrio na origem. Pode obter-se o retrato de fase do sistema usando o comando plotdf:

```
(%i8) vars: [x1, x2]$

(%i9) plotdf ([A[1].vars, A[2].vars], vars);
```

A sintaxe A[i] usa-se para obter a linha i da matriz e o ponto indica produto matricial. A figura 9.3 mostra o retrato de fase.

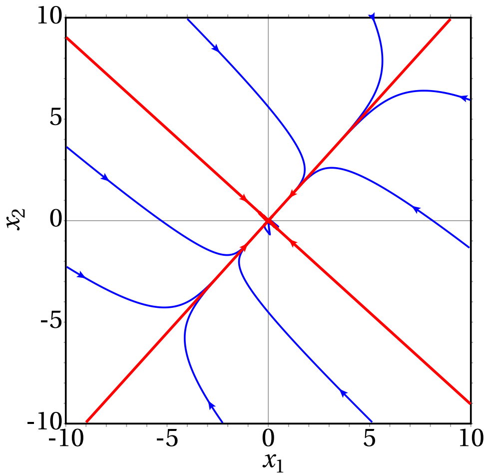


Figura 9.3.: Retrato de fase do exemplo 9.1. As duas retas são as direções dos dois vetores próprios.

As direções dos dois vetores próprios (as duas retas) são traçadas introduzindo as coordenadas dos vetores próprios obtidos no resultado (%o7), no campo “Trajectory at” do menu de configuração e introduzindo as mesmas coordenadas com sinais opostos. Se o estado inicial não estiver sobre uma das direções dos vetores próprios, a curva de evolução aproxima-se rapidamente do vetor próprio com menor valor próprio em valor absoluto.

Observe-se que as duas nulclinas representadas na figura 9.1 encontram-se aos dois lados da reta com declive positivo, no retrato de fase 9.3 e cruzam-se na origem, onde foi deslocado o ponto de equilíbrio.

Se as temperatura nos dois quartos forem iguais à temperatura exterior, $T_1 = T_2 = 8$, então os valores iniciais das variáveis x_1 e x_2 serão $8-15.06$ e $8-13.88$. A curva de evolução no espaço de fase e a evolução das temperaturas em função do tempo podem ser traçadas com o comando seguinte:

```
(%i10) plotdf ([A[1].vars, A[2].vars], vars,[versus_t,1],
     [trajectory_at,8-15.06,8-13.88],[direction,forward]);
```

O resultado mostra-se na figura 9.4. Os gráficos em função do tempo mostram que após 30 horas, as duas temperaturas atingem praticamente os valores de equilíbrio.

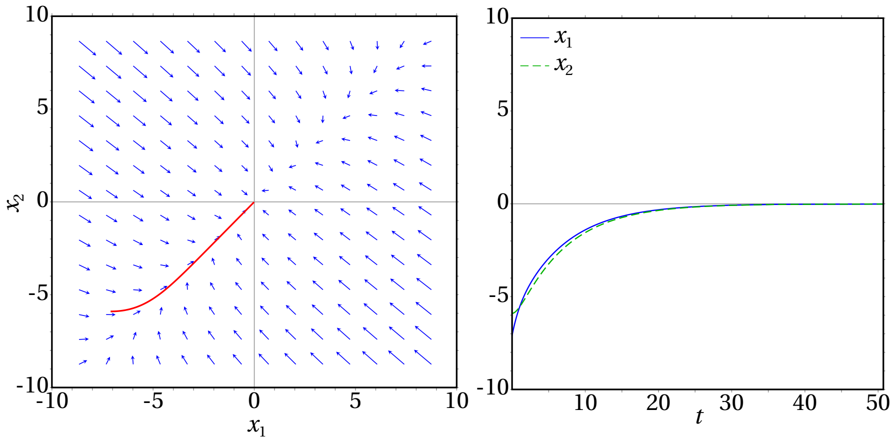


Figura 9.4.: Curva de evolução e temperaturas em função do tempo, quando as duas temperaturas iniciais são de 8°C.

9.3. Classificação dos pontos de equilíbrio

A forma geral de um sistema dinâmico linear, com qualquer número de variáveis, é:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\,\vec{r}}{\mathrm{d}\,t} = \mathbf{A}\,\vec{r}} \tag{9.9}$$

em que $\vec{r}$ é a posição do sistema no espaço de fase e **A** é um operador linear. Num espaço de fase com duas variáveis de estado x_1 e x_2, a representação matricial da equação 9.9 é a equação 9.3.

Se o determinante da matriz $\det(\mathbf{A}) = |A_{ij}|$ é diferente de zero, existe um único ponto de equilíbrio, na origem: $\vec{r} = \vec{0}$. A existência de valores próprios da matriz **A** implica existência de direções em que o estado aproxima-se ou afasta-se em linha reta do ponto de equilíbrio. Os valores próprios da matriz **A** são os valores λ que verificam a equação 9.8. No espaço de fase com duas variáveis, essa equação conduz a:

$$\begin{vmatrix} A_{11}-\lambda & A_{12} \\ A_{21} & A_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{9.10}$$

Calculando o determinante, obtêm-se a seguinte equação quadrática, chamada **equação caraterística**:

$$\boxed{\lambda^2 - \mathrm{tr}(\mathbf{A})\,\lambda + \det(\mathbf{A}) = 0} \tag{9.11}$$

onde $\mathrm{tr}(\mathbf{A}) = A_{11} + A_{22}$ é o **traço** da matriz e $\det(\mathbf{A}) = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}$ é o determinante. As duas raízes da equação caraterística são:

$$\lambda = \frac{\mathrm{tr}(\mathbf{A})}{2} \pm \sqrt{\left[\frac{\mathrm{tr}(\mathbf{A})}{2}\right]^2 - \det(\mathbf{A})} \tag{9.12}$$

Se as raízes forem números complexos, significará que não existem vetores próprios no espaço de fase $(x_1,\, x_2)$. Se existir uma única raiz real, existirá pelo menos um vetor próprio no espaço de fase e se existirem duas raízes reais diferentes, existirão dois vetores próprios linearmente independentes no espaço de fase.

9.3.1. Pontos de sela

Quando o determinante det(**A**) é negativo, a expressão dentro da raíz na equação 9.12 é positiva e

$$\sqrt{\left[\frac{\operatorname{tr}(\mathbf{A})}{2}\right]^2 - \det(\mathbf{A})} > \left|\frac{\operatorname{tr}(\mathbf{A})}{2}\right| \tag{9.13}$$

Isso implica que existem dois valores próprios reais, λ_1 e λ_2, com sinais diferentes, um deles positivo e o outro negativo.

A esses dois valores próprios correspondem dois vetores próprios linearmente independentes, que definem duas direções no espaço de fase onde o sistema evolui ao longo de uma reta (ver figura 9.5). Na direção correspondente ao valor próprio negativo, o sinal negativo implica que o estado se aproxima da origem. Na direção associada ao valor próprio positivo, o sinal positivo implica que o estado se afasta da origem.

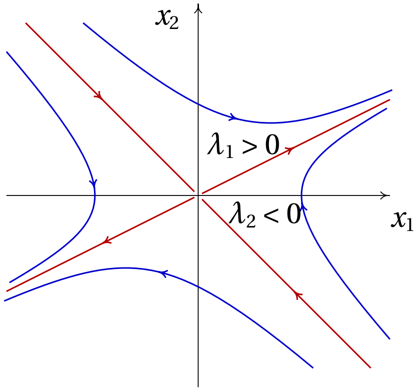


Figura 9.5.: Ponto de sela: existem duas direções em que o estado evolui em linha reta, num dos casos afastando-se da origem e no outro caso aproximando-se.

As outras curvas de evolução do sistema serão todas curvas que se aproximam da origem durante algum tempo, mas acabam sempre por se afastar até o infinito (figura 9.5). A denominação desse tipo de ponto de equilíbrio é **ponto de sela**. Trata-se de pontos de equilíbrio instável.

Observe-se que nos pontos de sela, apesar de existirem curvas de evolução que começam ou terminam nesse ponto, não podem existir órbitas homoclínicas porque essas curvas de evolução são retas que se estendem até infinito. As órbitas homoclínicas só aparecem nos sistemas não lineares. As órbitas heteroclínicas também não aparecem nos sistemas lineares porque precisam, pelo menos, de dois pontos de equilíbrio, mas os sistemas lineares têm um único ponto de equilíbrio.

9.3.2. Nós estáveis e instáveis

Quando o determinante det(**A**) é positivo mas menor que $\text{tr}(\mathbf{A})^2/4$, existem duas soluções reais da equação 9.12, ambas com o mesmo sinal de tr(**A**).

Se os dois valores próprios são negativos, existem duas direções no espaço de fase em que o estado se aproxima do ponto de equilíbrio (lado esquerdo da figura 9.6); devido à continuidade das curvas de evolução do sistema, qualquer outra curva de evolução será uma curva que se aproxima do ponto de equilíbrio. A denominação do ponto de equilíbrio é **nó estável**, ou nó atrativo.

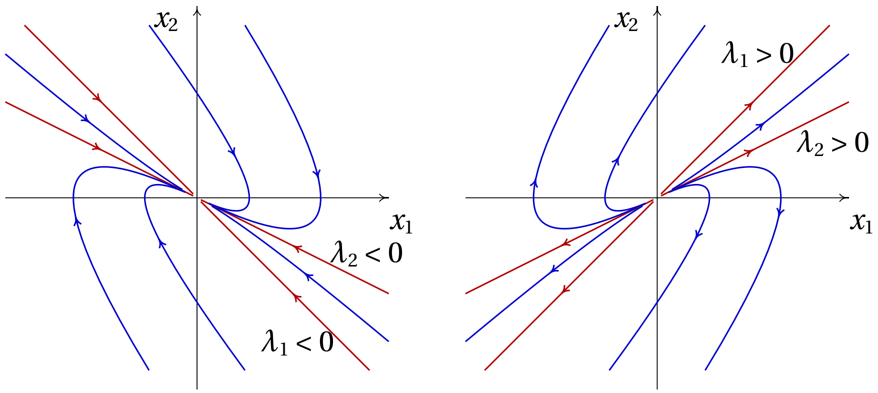


Figura 9.6.: Quando existem dois valores próprios reais, diferentes, com o mesmo sinal, o ponto de equilíbrio é um nó, estável (esquerda) ou instável (direita).

Se os dois valores próprios são positivos, existem duas direções no espaço de fase em que o estado se afasta do ponto de equilíbrio. Qualquer que seja o estado inicial, o sistema sempre se afasta do ponto de equilíbrio (lado direito da figura 9.6) e o ponto chama-se **nó instável**, ou nó repulsivo.

9.3.3. Focos e centros

Quando o determinante det(**A**) é maior que tr(**A**)$^2/4$, as duas soluções da equação 9.12 são números complexos $\lambda = a \pm \mathrm{i}\, b$. Isso quer dizer que não existem curvas de evolução que sejam retas.

O sinal da parte real das soluções complexas da equação 9.12 determina se as curvas de evolução se aproximam ou afastam do ponto de equilíbrio. Se a parte real das raízes é negativa (matriz com traço negativo), as curvas de evolução do sistema são espirais que se aproximam do ponto de equilíbrio (lado esquerdo da figura 9.7) e o ponto de equilíbrio é designado de **foco estável**, ou foco atrativo.

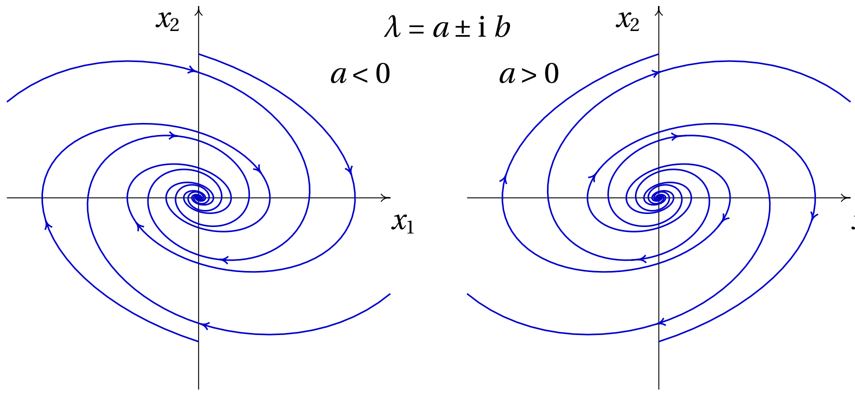


Figura 9.7.: Quando os valores próprios são complexos, o ponto de equilíbrio é um foco, estável (esquerda) ou instável (direita).

Se a parte real das raízes é positiva (matriz com traço positivo), as curvas de evolução do sistema afastam-se do ponto de equilíbrio, formando espirais (lado direito da figura 9.7) e o ponto de equilíbrio é designado de **foco instável**, ou foco repulsivo.

Se o traço da matriz é nulo, as soluções da equação 9.12 são dois números imaginários puros, com a mesma parte imaginária mas com sinais opostos. Nesse caso todas as curvas de evolução do sistema são ciclos e o ponto de equilíbrio, estável, chama-se **centro**.

A figura 9.8 apresenta um sumário dos diferentes tipos de ponto de equilíbrio, em função do traço e o determinante da matriz do sistema.