6. Trabalho e energia

Num salto com vara, a energia cinética da corrida inicial é convertida em energia potencial elástica da vara dobrada. Enquanto a vara recupera a forma reta, essa energia potencial elástica é transformada em energia potencial gravítica. No instante em que a vara recupera a forma reta o saltador exerce sobre a barra uma força vertical, para baixo, aumentando ainda mais a sua energia potencial gravítica para atingir uma altura maior; finalmente, o saltador larga a vara e cai livremente transformando-se a energia potencial gravítica em energia cinética.

6.1. Trabalho e energia cinética

A segunda lei de Newton (equação 4.4)

$$\vec{F} = m\,\vec{a} \tag{6.1}$$

onde $\vec{F}$ é a resultante de todas as forças externas, conduz a uma relação útil chamada teorema do trabalho e da energia cinética. Para demonstrar esse teorema, considere-se um deslocamento vetorial infinitesimal $\mathrm{d}\,\vec{r}$ durante um intervalo infinitesimal de tempo $\mathrm{d}\,t$ (figura 6.1).

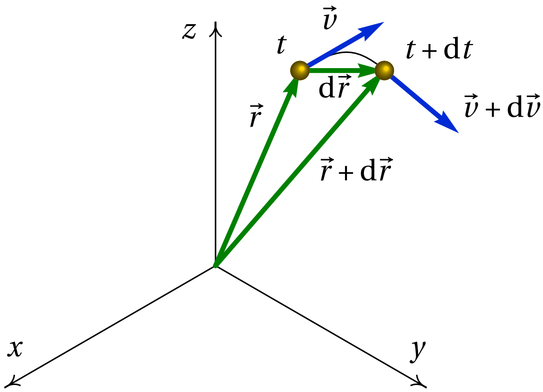


Figura 6.1.: Vetores posição e velocidade num instante t e num instante posterior $t + \mathrm{d}\,t$.

No limite infinitesimal em que $\mathrm{d}\,t$ tende para zero, o deslocamento vetorial é na direção tangencial e com módulo igual ao deslocamento ao longo da trajetória:

$$\mathrm{d}\,\vec{r} = \vec{v}\,\mathrm{d}\,t = (v\,\mathrm{d}\,t)\,\vec{e}_\mathrm{t} = \mathrm{d}s\,\vec{e}_\mathrm{t} \tag{6.2}$$

Usando esta expressão e multiplicando com produto escalar os dois lados da equação 6.1 pelo deslocamento infinitesimal, obtém-se

$$\vec{F}\cdot(\mathrm{d}\,s\,\vec{e}_\mathrm{t}) = m\,\vec{a}\cdot(\mathrm{d}\,s\,\vec{e}_\mathrm{t}) \quad\Longrightarrow\quad F_\mathrm{t}\,\mathrm{d}\,s = m\,a_\mathrm{t}\,\mathrm{d}\,s \tag{6.3}$$

A equação cinemática $a_\mathrm{t} = v\,\mathrm{d}\,v/\mathrm{d}\,s$ implica que $a_\mathrm{t}\,\mathrm{d}\,s$ é igual a $v\,\mathrm{d}\,v$ e, como tal,

$$F_\mathrm{t}\,\mathrm{d}\,s = m\,v\,\mathrm{d}\,v \tag{6.4}$$

Integrando os dois lados da equação desde uma posição s_1, onde a velocidade é v_1, até outra posição s_2 onde a velocidade é v_2, obtém-se o **teorema do trabalho e a energia cinética**:

$$\boxed{\int\limits_{s_1}^{s_2} F_\mathrm{t}\,\mathrm{d}\,s = \frac{1}{2} m\,v_2^2 - \frac{1}{2} m\,v_1^2} \tag{6.5}$$

A função da velocidade:

$$E_\mathrm{c} = \frac{1}{2} m\,v^2 \tag{6.6}$$

chama-se **energia cinética** e o integral da componente tangencial da força ao longo da trajetória chama-se **trabalho** da força:

$$W_{12} = \int\limits_{s_1}^{s_2} F_\mathrm{t}\,\mathrm{d}\,s \tag{6.7}$$

Ou seja, o teorema estabelece que

> *O trabalho realizado pela força resultante, ao longo da trajetória, é igual ao aumento da energia cinética da partícula.*

Observe-se que em geral o trabalho de uma força pode ser calculado integrando $\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$ ao longo de qualquer curva, mas se essa curva não é a trajetória da partícula, o resultado pode não ser igual ao aumento de energia cinética. Em geral, um integral de linha entre dois pontos produz diferentes valores para diferentes curvas que unem esses pontos.

Unicamente a componente tangencial da força realiza trabalho ao longo da trajetória e pode alterar a energia cinética da partícula. Uma força perpendicular à trajetória não realiza trabalho e não altera a energia cinética da partícula.

O trabalho e a energia cinética têm unidades de energia, ou seja, joules no Sistema Internacional de unidades (1 J = 1 N·m).

Em coordenadas cartesianas, o deslocamento infinitesimal $\mathrm{d}\,\vec{r}$ é,

$$\mathrm{d}\,\vec{r} = \mathrm{d}\,x\,\hat{\imath} + \mathrm{d}\,y\,\hat{\jmath} + \mathrm{d}\,z\,\hat{k} \tag{6.8}$$

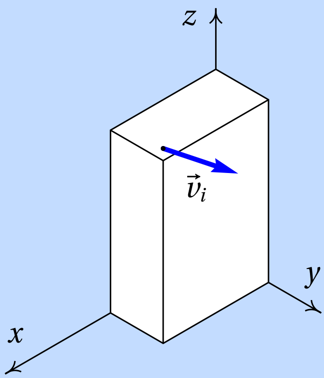
Exemplo 6.1
Um canhão dispara uma bala com 5 cm de raio, desde o terraço de um edifício, na posição inicial (em metros):

$$\vec{r}_i = 9\,\hat{\imath} + 4\,\hat{\jmath} + 15\,\hat{k}$$

com velocidade inicial (metros sobre segundo):

$$\vec{v}_i = 13\,\hat{\imath} + 22.5\,\hat{\jmath} + 15\,\hat{k}$$

determine a altura máxima atingida pela bala (valor máximo da coordenada z) e a posição em que a bala bate no chão ($z = 0$).



Resolução. Este é o mesmo exemplo 2.3 que já foi resolvido no capítulo 2, mas será agora resolvido através do trabalho e do impulso. Uma bala metálica tem massa volúmica aproximadamente 8 vezes maior que a da água. Nessas condições, a velocidade terminal da bala é da ordem de 132 m/s. O problema será resolvido ignorando a resistência do ar e a solução obtida será usada para comparar a velocidade máxima com a velocidade terminal. Um valor da velocidade máxima próximo ou por cima da velocidade limite indicará que a solução obtida tem um erro elevado.

No sistema de eixos da figura, o peso escreve-se $-m\,g\,\hat{k}$ e o impulso que produz desde o instante do lançamento da bala, $t = 0$, até um instante t posterior é,

$$\vec{I} = -\int_0^t m\,g\,\hat{k}\,\mathrm{d}\,t = -m\,g\,t\,\hat{k}$$

igualando o impulso à variação da quantidade de movimento, e dividindo pela massa, obtém-se,

$$\vec{v} = \vec{v}_i - g\,t\,\hat{k} \quad\Longrightarrow\quad \vec{v} = 13\,\hat{\imath} + 22.5\,\hat{\jmath} + (15 - 9.8\,t)\,\hat{k} \tag{6.9}$$

Assim sendo, as componentes x e y da velocidade permanecem constantes. O valor mínimo do módulo da velocidade ocorrerá no instante em que $(15-9.8\,t)$ for igual a zero; o valor mínimo da velocidade, $v_{\text{min}} = \sqrt{13^2 + 22.5^2} = 25.99$, corresponde ao ponto de altura máxima.

O trabalho realizado pelo peso é:

$$\begin{aligned}\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\,\vec{r} &= -m\,g \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \hat{k}\cdot(\mathrm{d}\,x\,\hat{\imath} + \mathrm{d}\,y\,\hat{\jmath} + \mathrm{d}\,z\,\hat{k})\\ &= -m\,g \int_{z_i}^{z} \mathrm{d}\,z = m\,g\,(z_i - z)\end{aligned}$$

igualando à variação da energia cinética e dividindo pela massa,

$$2\,g\,(z_i - z) = v^2 - v_i^2 \tag{6.10}$$

Substituindo v pelo valor mínimo da velocidade, calcula-se a altura máxima z_{m}

$$\begin{aligned}2\times 9.8\times(15 - z_{\text{m}}) &= 25.99^2 - 30^2\\ z_{\text{m}} &= 26.47\ \text{m}\end{aligned}$$

Para calcular a posição em que a bala bate no chão, calcula-se o valor da velocidade, quando a bala bate no chão, substituindo $z = 0$ na equação 6.10:

$$2\times 9.8\times 15 = v^2 - 30^2 \quad\Longrightarrow\quad v = 34.55\ \text{m/s}$$

e, de acordo com a equação 6.9, o quadrado do módulo da velocidade é:

$$34.55^2 = 13^2 + 22.5^2 + (15 - 9.8\,t)^2 \quad\Longrightarrow\quad t = 3.855\ \text{s}$$

(tendo em conta que o tempo t é positivo). Durante esse tempo, o deslocamento horizontal é igual a: $\vec{d} = 3.855\,(13\,\hat{\imath} + 22.5\,\hat{\jmath}) = (50.11\,\hat{\imath} + 86.73\,\hat{\jmath})$ m, já que a componente horizontal da velocidade é constante. Somando os valores das componentes x e y na posição inicial, obtém-se a posição em que a bala bate no chão:

$$\vec{r} = (59.11\,\hat{\imath} + 90.73\,\hat{\jmath})\ \text{m}$$

Observe-se que os resultados são ligeiramente diferentes dos que foram obtidos no exemplo 2.3. Em ambos casos os resultados intermédios foram apresentados arredondando para 4 algarismos significativos, mas todos os cálculos foram feitos usando formato de vírgula flutuante com precisão dupla (16 algarismos significativos). A diferença está em que, apesar de o tempo que a bala demora em bater no chão aparecer igual nos dois casos (3.855 s) os valores internos em precisão dupla são diferentes, por terem sido usados métodos diferentes e o erro numérico é diferente nos dois casos.

O valor máximo da velocidade, atingido quando a bala bate no chão, é 34.55 m/s. Como esse valor é muito menor que a velocidade terminal (132 m/s), a solução obtida ignorando a resistência do ar não estará muito longe da solução verdadeira.

O teorema do trabalho e da energia cinética só contém uma parte da informação contida na segunda lei de Newton, já que a equação vetorial 6.1 são realmente 3 equações (uma para cada componente) agrupadas convenientemente em vetores. Contudo, é possível extrair as mesmas três equações a partir da energia cinética. Tendo em conta que:

$$E_c = \frac{1}{2}\,m\,v^2 = \frac{1}{2}\,m\,(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) \tag{6.11}$$

então as três componentes cartesianas da equação 6.1 obtêm-se assim:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(\frac{\partial E_c}{\partial v_x}\right) = F_x \quad\Longrightarrow\quad m\,a_x = F_x \tag{6.12}$$

e de forma análoga para as componentes y e z. Esta equação é generalizada no capítulo 8 para qualquer outro sistema de coordenadas diferentes das cartesianas.

6.2. Forças conservativas

Uma força $\vec{F}(\vec{r})$ que depende unicamente da posição $\vec{r}$ chama-se **conservativa**, se o integral de linha entre dois pontos nas posições $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$,

$$\int\limits_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\,\vec{r} \tag{6.13}$$

dá o mesmo resultado, para qualquer percurso possível desde $\vec{r}_1$ ate $\vec{r}_2$.

Assim sendo, é possível escolher um ponto arbitrário na posição $\vec{r}_0$ e definir uma função que U em qualquer ponto:

$$\boxed{U = -\int\limits_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\,\vec{r}} \tag{6.14}$$

observe-se que com essa definição, $U = 0$ na posição $\vec{r}_0$.

A função U não pode ser definida quando o resultado do integral de linha em 6.14 não está bem definido, ou seja, quando o resultado é diferente usando diferentes percursos. A escolha do sinal negativo na definição é explicada mais à frente. A função U tem unidades de energia e denomina-se **energia potencial** associada à força conservativa $\vec{F}$. A vantagem de definir energias potenciais é que $U(\vec{r})$ é uma função escalar, mais simples do que a função vetorial $\vec{F}(\vec{r})$, que permite caraterizar completamente a força; ou seja, dada uma energia potencial qualquer é possível encontrar a expressão da força associada.

Usando o teorema fundamental do cálculo vetorial, o integral de linha da força conservativa $\vec{F}$ é igual a:

$$\boxed{\int\limits_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\,\vec{r} = U(\vec{r}_1) - U(\vec{r}_2)} \tag{6.15}$$

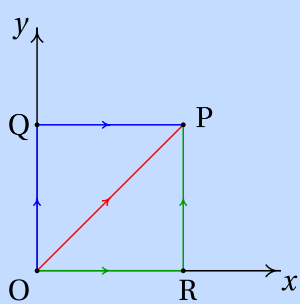
isto é:

> *O trabalho realizado entre dois pontos por uma força conservativa é igual à diminuição da energia potencial associada a essa força.*

Observe-se que o trabalho é igual à diminuição da energia potencial, e não o seu aumento, devido à escolha do sinal negativo na definição da energia potencial. observe-se também que a definição 6.14 implica que a energia potencial tem valor nulo na posição de referencia $\vec{r}_0$; o efeito de usar diferentes escolhas do ponto de referencia $\vec{r}_0$ é acrescentar ou subtrair uma constante a U em todos os pontos, mas as diferenças de energia potencial, $U_1 - U_2$, são independentes do ponto usado como referencia. O valor numérico da energia potencial num ponto não tem nenhum significado físico; o que tem significado é a diferença dos valores da energia potencial em dois pontos.

Exemplo 6.2

Calcule o integral de linha da força $\vec{F} = (3\,x + y)\,\hat{\imath}$, desde a origem O até o ponto P no plano $x\text{O}y$, com coordenadas $x = y = 1$, usando os 3 percursos indicados na figura: C_1 é o segmento de reta $\overline{\text{OR}}$ (R com coordenadas $x = 1$, $y = 0$), seguido pelo segmento de reta $\overline{\text{RP}}$, C_2 é o segmento de reta $\overline{\text{OQ}}$ (Q com coordenadas $x = 0$, $y = 1$), seguido pelo segmento de reta $\overline{\text{QP}}$ e C_3 é o segmento de reta $\overline{\text{OP}}$.



Resolução. A equação vetorial do segmento de reta $\overline{\text{OR}}$ é: $\vec{r} = x\,\hat{\imath}$, com $0 \le x \le 1$. Como tal, o deslocamento infinitesimal ao longo desse segmento é

$$\mathrm{d}\,\vec{r} = \mathrm{d}\,x\,\hat{\imath}$$

e o integral de linha nesse segmento é:

$$\int_{\text{O}}^{\text{R}} \vec{F}\cdot\mathrm{d}\,\vec{r} = \int_0^1 3\,x\,\hat{\imath}\cdot(\mathrm{d}\,x\,\hat{\imath}) = \int_0^1 3\,x\,\mathrm{d}\,x = 1.5$$

A equação do segmento $\overline{\text{RP}}$ é $\vec{r} = \hat{\imath} + y\,\hat{\jmath}$, $0 \le y \le 1$, o deslocamento infinitesimal é $\mathrm{d}\,\vec{r} = \mathrm{d}\,y\,\hat{\jmath}$, e o integral de linha nesse segmento é igual a:

$$\int_{\text{R}}^{\text{P}} \vec{F}\cdot\mathrm{d}\,\vec{r} = \int_0^1 (3+y)\,\hat{\imath}\cdot(\mathrm{d}\,y\,\hat{\jmath}) = 0$$

O integral de linha no percurso C_1 é então igual a 1.5.

A equação do segmento $\overline{\text{OQ}}$ é $\vec{r} = y\,\hat{\jmath}$, $0 \le y \le 1$, e o integral de linha nesse segmento é,

$$\int_{\text{O}}^{\text{Q}} \vec{F}\cdot\mathrm{d}\,\vec{r} = \int_0^1 y\,\hat{\imath}\cdot(\mathrm{d}\,y\,\hat{\jmath}) = 0$$

A equação do segmento $\overline{\text{QP}}$ é $x\,\hat{\imath} + \hat{\jmath}$, $0 \le x \le 1$, e o integral de linha nesse segmento é,

$$\int_{\text{Q}}^{\text{P}} \vec{F}\cdot\mathrm{d}\,\vec{r} = \int_0^1 (3\,x+1)\,\hat{\imath}\cdot(\mathrm{d}\,x\,\hat{\imath}) = 2.5$$

O integral de linha no percurso C_2 é então igual a 2.5.

No segmento $\overline{\text{OP}}$, y é igual a x e, como tal, a equação do segmento é $\vec{r} = x\,(\hat{\imath}+\hat{\jmath})$, $0 \le x \le 1$. O integral de linha no percurso C_3 é então

$$\int_0^1 (3\,x + x)\,\hat{\imath}\cdot(\hat{\imath}+\hat{\jmath})\,\mathrm{d}\,x = \int_0^1 4\,x\,\mathrm{d}\,x = 2$$

Como o integral é diferente nos 3 percursos considerados, a força $\vec{F}$ não é conservativa.

No exemplo 6.1 foi possível calcular o integral de linha do peso, sem conhecer a equação da trajetória parabólica da bala de canhão, nem ter de calcular a componente tangencial da força, porque como o peso $\vec{P}$ é sempre na direção de $\hat{k}$, o produto escalar $\vec{P}\cdot\mathrm{d}\,\vec{r}$ é sempre igual a $P\,\mathrm{d}\,z$, para qualquer deslocamento em qualquer direção, e o integral de linha reduz-se a um integral ordinário numa única variável.

Em geral, sempre que o produto escalar $\vec{F}\cdot\mathrm{d}\,\vec{r}$ dependa de uma única variável, a força $\vec{F}$ é conservativa porque o integral de linha reduz-se a um integral ordinário e o resultado depende apenas dos valores dessa variável, nas posições inicial e final. As secções seguintes mostram alguns exemplos.

6.2.1. Energia potencial gravítica

Usando um sistema de coordenadas em que o eixo dos z é vertical e aponta para cima, o peso é

$$\vec{P} = -m\,g\,\hat{k} \tag{6.16}$$

o produto escalar $\vec{P}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$ é igual a $-m\,g\,\mathrm{d}z$. Ou seja, o peso é uma força conservativa e a energia potencial gravítica pode ser definida por:

$$U_\mathrm{g}(\vec{r}) = -\int\limits_0^z (-m\,g)\,\mathrm{d}z \Longrightarrow \boxed{U_\mathrm{g} = m\,g\,z} \tag{6.17}$$

Isto é, a energia potencial gravítica de um corpo num ponto é igual ao produto do seu peso e a altura do ponto. As alturas podem medir-se a partir de qualquer ponto escolhido como referencia.

6.2.2. Energia potencial elástica

Quando uma mola elástica é alongada ou comprimida, exerce uma força elástica F_e nos dois extremos, no sentido que faz regressar a mola à sua forma original. Se s é a elongação da mola, igual ao seu comprimento atual menos o comprimento que teria quando não estiver nem alongada nem comprimida, o valor absoluto de F_e é diretamente proporcional a s

$$|F_\mathrm{e}| = k\,s \tag{6.18}$$

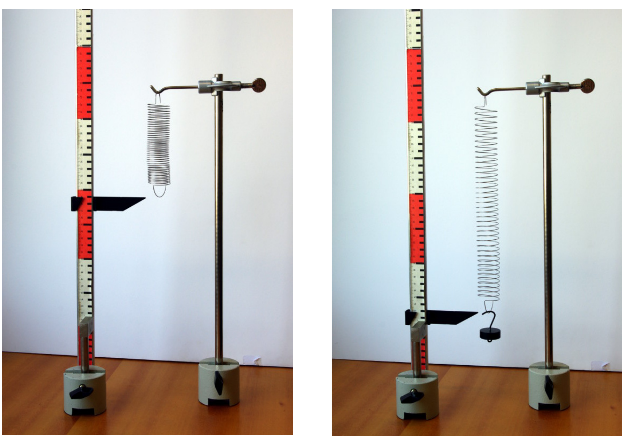


Figura 6.2.: Mola elástica pendurada dum suporte horizontal.

onde k é a constante elástica da mola. A equação 6.18 chama-se **lei de Hooke**.

A figura 6.2 mostra um procedimento usado para medir a constante elástica de uma mola. Pendura-se um objeto com peso P, que estica a mola até ficar numa posição em que a força elástica equilibra o peso e mede-se a elongação; o valor da constante elástica é o peso usado, P, dividido pela elongação.

No sistema da figura 6.3, o cilindro pode deslocar-se ao longo de uma barra fixa e está ligado a uma mola com o outro extremo fixo num ponto fixo O. Em cada posição P do cilindro a elongação s da mola considera-se positiva se a mola estiver esticada, ou negativa se a mola estiver comprimida; como tal, se o vetor $\hat{e}_s$ aponta no sentido em que s aumenta, o valor da força elástica é $F_e = -k\,s$ (faz diminuir s quando é positiva ou aumentar quando é negativa). O produto escalar

$$\vec{F}_e \cdot d\vec{r} = -k\,s\,\hat{e}_s \cdot d\vec{r} = -k\,s\,d\,s \qquad (6.19)$$

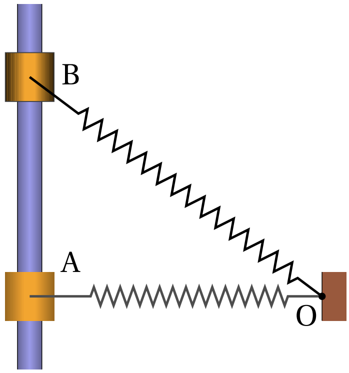


Figura 6.3.: Sistema com mola.

depende unicamente da variável s e, por isso, a força elástica é conservativa.

Usando como referência o valor $s = 0$ (posição em que a mola não exerce nenhuma força) a energia potencial elástica é:

$$U_e = -\int_0^s (-k\,s)\,d\,s \quad \Longrightarrow \quad \boxed{U_e = \frac{1}{2}k\,s^2} \qquad (6.20)$$

6.2.3. Energia potencial de forças centrais

Uma força central é uma força que depende da posição e em cada ponto do espaço aponta na direção radial (reta que passa pela origem e pelo ponto) e com valor que depende unicamente da distância r até a origem:

$$\vec{F}_c = f(r)\,\hat{r} \qquad (6.21)$$

Como o produto vetorial $\vec{F}_c \cdot d\vec{r} = f(r)\,d\,r$ depende unicamente da variável r, as forças centrais são sempre conservativas e a energia potencial associada é igual a:

$$U_c = -\int_{\infty}^{r} f(r)\,\mathrm{d}\,r \tag{6.22}$$

O ponto de referência costuma ser colocado no infinito, porque estas forças costumam ser zero quando a distância r é infinita. Dois exemplos de forças centrais são a força gravítica entre partículas e a força elétrica entre cargas pontuais.

6.3. Energia mecânica

As forças que não são função unicamente da posição não são conservativas. Por exemplo a reação normal e a força de atrito estático sobre um corpo são reações, que dependem das condições em que se encontra o sistema; colocando o mesmo corpo na mesma posição de uma mesa, mas com diferentes objetos colocados por cima, a reação normal tem valores diferentes. A força de atrito cinético também não é conservativa. Depende da reação normal e também depende da direção do movimento (direção da velocidade).

No teorema do trabalho e a energia cinética (equação 6.5), a resultante das forças externas pode ser escrita como a resultante de todas as forças conservativas mais a resultante de todas as forças não conservativas.

$$\int_{s_1}^{s_2} F_t^{c}\,\mathrm{d}\,s + \int_{s_1}^{s_2} F_t^{nc}\,\mathrm{d}\,s = \frac{1}{2}m\,v_2^2 - \frac{1}{2}m\,v_1^2 \tag{6.23}$$

o lado direito é a energia cinética na posição final menos a energia cinética na posição inicial: $E_c(s_2) - E_c(s_1)$. O primeiro integral no lado esquerdo é igual à soma dos integrais de todas as forças externas conservativas que atuam no sistema e é igual à diminuição da energia potencial total:

$$\int_{s_1}^{s_2} F_t^{c}\,\mathrm{d}\,s = U(s_1) - U(s_2) \tag{6.24}$$

onde U é a soma de todas as energias potenciais que existam (gravítica, elástica, elétrica, etc.). Passando esses termos para o lado direito da equação obtém-se:

$$\int_{s_1}^{s_2} F_t^{nc}\,\mathrm{d}\,s = E_c(s_2) + U(s_2) - E_c(s_1) - U(s_1) \tag{6.25}$$

Define-se a **energia mecânica** igual à soma da energia cinética mais potencial, em qualquer posição da trajetória:

$$E_\text{m} = E_\text{c} + U \tag{6.26}$$

e a equação anterior é o **teorema do trabalho e a energia mecânica**

$$\boxed{\int\limits_{s_1}^{s_2} F_\text{t}^\text{nc}\, \mathrm{d}\, s = E_\text{m}(s_2) - E_\text{m}(s_1)} \tag{6.27}$$

O integral no lado esquerdo é o trabalho realizado por todas as forças externas não conservativas, ao longo da trajetória; ou seja,

> *O trabalho realizado pelas forças não conservativas, a longo da trajetória, é igual ao aumento da energia mecânica E_m.*

Uma consequência desse resultado é a **lei de conservação da energia mecânica**: quando todas as forças que realizam trabalho são conservativas, a energia mecânica do sistema permanece constante.

Observe-se que no integral do lado esquerdo da equação 6.27 o percurso de integração é a trajetória do corpo. Pode acontecer que a trajetória não seja conhecida previamente, mas de qualquer forma é uma curva única e bem definida. Se o integral de linha fosse calculado num percurso diferente à trajetória, o seu valor já não seria igual ao aumento da energia mecânica. O sinal negativo na definição da energia potencial prende-se ao fato de a energia mecânica ser definida como energia cinética mais potencial.

Observe-se ainda que, como a energia cinética nunca pode ser negativa, a energia mecânica E_m (potencial mais cinética) em qualquer posição da trajetória é sempre maior ou igual que à energia potencial nessa posição.

6.3.1. Gráficos de energia

O gráfico da energia potencial total $U(s)$ de todas as forças conservativas é muito útil na análise do movimento. A figura 6.4 mostra um exemplo; a curva a tracejado representa a energia potencial total do sistema, em função da posição na trajetória, s. A reta contínua é a energia mecânica; como é uma reta com ordenada constante, conclui-se que há conservação da energia mecânica e as únicas forças que realizam trabalho são todas conservativas.

As regiões do gráfico onde a reta da energia mecânica está por debaixo da curva de energia potencial são posições onde o sistema nunca pode

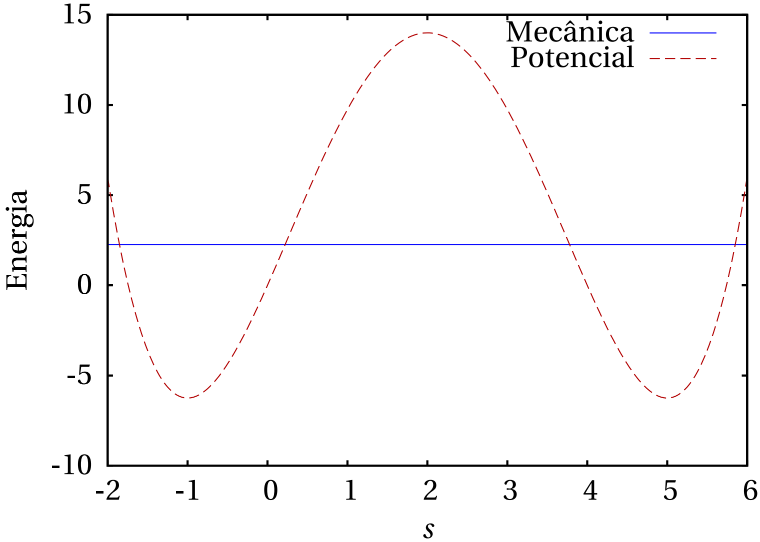


Figura 6.4.: Exemplo de energia potencial e energia mecânica.

estar, porque a energia mecânica é sempre maior ou igual que a energia potencial. Por exemplo, no caso da figura 6.4, o corpo não pode nunca estar nas posições $s = 1$, $s = 2$ ou $s = 3$. Para poder alcançar essas posições, seria necessário aparecer outra força não conservativa que faça aumentar a energia mecânica.

A equação 6.24 significa que $U(s)$ é uma primitiva de F_t^c, com sinal trocado. Assim sendo, conclui-se que

$$\boxed{F_\text{t}^\text{c} = -\frac{\mathrm{d}\,U}{\mathrm{d}\,s}} \tag{6.28}$$

ou seja, nos intervalos do gráfico de $U(s)$ onde a função é crescente, a resultante das forças conservativas aponta no sentido negativo de s e nos intervalos onde $U(s)$ é decrescente, a força conservativa resultante aponta no sentido positivo de s.

No caso do exemplo da figura 6.4, nos intervalos $-2 < s < -1$ e $2 < s < 5$, onde a energia potencial é decrescente, a componente tangencial da força conservativa total é positiva, isto é, aponta no sentido em que a posição s aumenta. Nos intervalos $-1 < s < 2$ e $5 < s < 6$ a componente da força é negativa (aponta no sentido em que s diminui). Nos pontos $s = -1$, $s = 2$ e $s = 5$ a componente tangencial da força conservativa resultante é nula.

Esses pontos onde o valor da força é nulo, chamam-se **pontos de equilíbrio**
.

A energia mecânica não pode ser menor que -6.75. A reta da energia mecânica corresponde a um valor de 2.25 unidades. Com essa energia mecânica, o corpo só pode estar a deslocar-se numa vizinhança do ponto $s = -1$, ou numa vizinhança do ponto 5.

Nos pontos em que a reta da energia mecânica do corpo corta a curva da energia potencial, a energia cinética é nula e, como tal, a corpo fica em repouso; no entanto, a partícula não permanece sempre em repouso nesses pontos, porque a força nesses pontos não é nula.

Por exemplo, se num instante o corpo está na posição $s = 5$, deslocando-se no sentido em que s aumenta, continua a deslocar-se no mesmo sentido, até parar perto de $s = 6$; nesse ponto a força aponta no sentido negativo de s, o que faz com que o corpo regresse para o ponto $s = 5$, mas agora com velocidade no sentido negativo de s. O corpo aproximar-se-á do ponto $s = 3.8$, onde o valor da sua velocidade será nula; nesse ponto, como a componente tangencial da força é no sentido positivo de s, o corpo regressa à posição $s = 5$ começando novamente o mesmo ciclo.

6.4. Movimento harmónico simples

Considere-se um carrinho de massa m sobre uma superfície horizontal, ligado a uma mola com constante elástica k, tal como mostra a figura 6.5. Se o atrito nos eixos das rodas, a massa das rodas e a resistência do ar são desprezadas, a única força que realiza trabalho é a força elástica da mola e há conservação da energia mecânica.

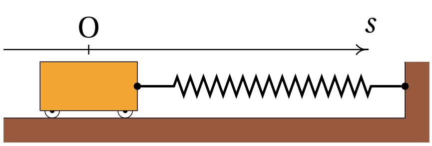


Figura 6.5.: Carrinho a oscilar sobre uma superfície horizontal.

A trajetória é uma reta horizontal; escolhendo a origem O para medir a posição na trajetória, s, na posição em que a mola não está nem esticada nem comprimida, a energia mecânica do sistema é,

$$E_{\rm m} = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k s^2 \tag{6.29}$$

A figura 6.6 mostra os gráficos da energia potencial e da energia mecânica constante. O carrinho oscila entre as duas posições $s = -A$ e $s = A$, onde a velocidade é nula, e cada vez que passa pela posição $s = 0$ a energia cinética é máxima. O valor da **amplitude** do movimento oscilatório é A, que depende do valor da energia mecânica; quanto maior for a energia, maior a amplitude.

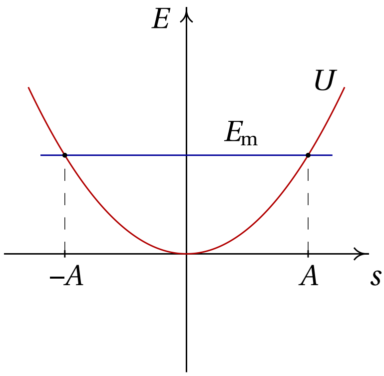


Figura 6.6.: Energia potencial e energia mecânica de um oscilador harmónico.

A relação entre a amplitude e a energia mecânica obtém-se substituindo $v = 0$ na equação 6.29:

$$E_\text{m} = \frac{1}{2} k\, A^2 \tag{6.30}$$

A amplitude e a energia inicial não são valores caraterísticos do oscilador, mas são condições iniciais que dependem de como é colocado em movimento o sistema. A equação de movimento do sistema pode ser obtida aplicando a segunda lei de Newton, ou também derivando a expressão da energia mecânica (equação 6.29) em ordem ao tempo e integrando. O resultado é:

$$a_\text{t} = -\frac{k}{m}\, s \tag{6.31}$$

Resolvendo a equação cinemática $a_\text{t} = v\, \mathrm{d}\, v / \mathrm{d}\, s$, com condição inicial $v(s = A) = 0$, obtém-se v em função de s

$$v = \pm\sqrt{\frac{k}{m}(A^2 - s^2)} \tag{6.32}$$

igualando essa expressão (no caso em que v é positiva) à derivada $\dot{s}$ e separando variáveis, obtém-se

$$\sqrt{\frac{k}{m}}\int_{t_0}^{t} \mathrm{d}\,t = \int_{0}^{s} \frac{\mathrm{d}\,s}{\sqrt{A^2 - s^2}} \tag{6.33}$$

onde o tempo t_0 é o instante em que o carrinho passa pela posição de equilíbrio $s = 0$. Calculando os integrais obtém-se a expressão para a posição s em função do tempo

$$\boxed{s = A\sin(\Omega\,t + \phi_0)} \tag{6.34}$$

onde a constante Ω, chamada **frequência angular**, é

$$\Omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{6.35}$$

e ϕ_0 é uma constante que depende da escolha do instante em que t é igual a zero. A frequência, que é o número de oscilações por unidade de tempo, é igual a,

$$f = \frac{\Omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{6.36}$$

e o período de oscilação T é o inverso da frequência: $T = 1/f$.

A expressão 6.34 é a solução da equação diferencial $\ddot{s} = -(k/m)\,s$. Qualquer outro sistema em que a segunda derivada da variável seja igual à variável vezes uma constante negativa, é chamado também um oscilador harmónico simples e a solução será semelhante a 6.34.

6.5. Energia cinética de rotação

No movimento de translação de um corpo rígido, em cada instante todas as partes do corpo deslocam-se com a mesma velocidade $\vec{v}$ e, com tal, a energia cinética total é igual a um meio da massa total vezes o valor da velocidade ao quadrado. No caso mais geral do movimento de rotação sobreposto à translação, para calcular a energia cinética total será necessário ter em conta que as velocidades de diferentes partes do objeto são diferentes. Conforme foi demonstrado no capítulo 3, a velocidade de cada ponto no corpo, em função da velocidade angular $\vec{\omega}$ e da velocidade $\vec{v}_\mathrm{O}$ de um ponto fixo no corpo rígido, é:

$$\vec{v} = \vec{v}_\mathrm{O} + \vec{\omega}\times\vec{r} \tag{6.37}$$

em que $\vec{r}$ é a posição do ponto relativa ao ponto de referência O.

A energia cinética total obtém-se somando a energia de todas as partes infinitesimais do corpo rígido, com massa $\mathrm{d}\,m$,

$$E_\mathrm{c} = \frac{1}{2}\int v^2\,\mathrm{d}\,m \tag{6.38}$$

O valor da velocidade ao quadrado é,

$$v^2 = \vec{v}\cdot\vec{v} = v_\mathrm{o}^2 + |\vec{\omega}\times\vec{r}|^2 + 2\,\vec{v}_\mathrm{o}\cdot(\vec{\omega}\times\vec{r}) \tag{6.39}$$

O módulo de $(\vec{\omega}\times\vec{r})$ é $\omega\,R$, em que R é a distância desde o ponto até um eixo que passa pelo ponto O, paralelo a $\vec{\omega}$. Substituindo na expressão da energia cinética,

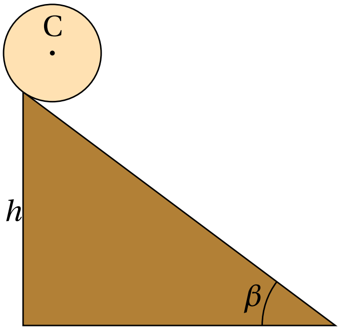
$$E_\mathrm{c} = \frac{v_\mathrm{o}^2}{2}\int \mathrm{d}\,m + \frac{\omega^2}{2}\int R^2\,\mathrm{d}\,m + \vec{v}_\mathrm{o}\cdot\left(\vec{\omega}\times\int \vec{r}\,\mathrm{d}\,m\right) \tag{6.40}$$

O integral no primeiro termo é igual à massa total m. Como foi referido na secção sobre o centro de massa, o único referencial em que o valor médio do vetor posição é nulo (equação 5.15) é o referencial em que a origem está exatamente no centro de massa. Assim sendo, se o ponto de referência O for o centro de massa, o terceiro integral será nulo e obtém-se

$$\boxed{E_\mathrm{c} = \frac{1}{2}m\,v_\mathrm{cm}^2 + \frac{1}{2}I_\mathrm{cm}\,\omega^2} \tag{6.41}$$

em que I_cm é o momento de inércia em relação a um eixo que passa pelo centro de massa, paralelo a $\vec{\omega}$.

Exemplo 6.3
Uma esfera de massa m e raio R parte do repouso a uma altura h numa rampa inclinada um ângulo β com a horizontal. A esfera roda na rampa, sem deslizar. Determine o valor da aceleração angular da esfera e a velocidade do centro de massa quando a esfera chega ao fim da rampa.



Resolução. Como a esfera roda sem deslizar, o ângulo de rotação θ está relacionado com a posição do centro de massa C, de acordo com a expressão que foi obtida no capítulo 3 para rodas que rolam sem derrapar:

$$s = R\theta$$

conclui-se então que o sistema tem um único grau de liberdade, que pode ser o ângulo θ que a esfera roda desde o instante inicial no topo do plano inclinado. O valor da velocidade angular é $\omega = \dot{\theta}$ e o valor da velocidade do centro de massa é $v_{\text{cm}} = R\,\omega$.

Escolhendo a posição $s = 0$ no topo da rampa, com s positivo no sentido em que a esfera desce e energia potencial gravítica nula em $s = 0$, em qualquer posição $s = R\theta$ a esfera tem descido uma altura $R\theta\sin\beta$, em que β é o ângulo de inclinação do plano inclinado. A energia mecânica total é,

$$E_{\text{m}} = \frac{1}{2}m\,R^2\,\omega^2 + \frac{1}{2}I_{\text{cm}}\,\omega^2 - m\,g\,R\theta\,\sin\beta$$

Enquanto a esfera rode sem derrapar, a força de atrito com a superfície do plano é atrito estático, que não realiza trabalho. Ignorando a resistência do ar, a energia mecânica conserva-se e a sua derivada em ordem ao tempo é nula. Substituindo a expressão do momento de inércia da esfera em relação ao seu centro de massa, $2\,m\,R^2/5$, na equação anterior, derivando em ordem ao tempo e igualando a zero, obtém-se

$$m\,R\,\omega\left(\frac{7}{5}R\,\alpha - g\,\sin\beta\right) = 0$$

e a expressão para a aceleração angular α é,

$$\alpha = \frac{5\,g\,\sin\beta}{7\,R}$$

Como a esfera parte do repouso, no ponto inicial a sua energia cinética é nula e na parte mais baixa da rampa a energia cinética será igual à energia potencial gravítica inicial, 0, menos a energia gravítica final, $-m\,g\,h$

$$\frac{1}{2} m R^2 \omega^2 + \frac{1}{5} m R^2 \omega^2 = m\,g\,h \tag{6.42}$$

e a velocidade do centro de massa C no fim da rampa é

$$v_\mathrm{C} = R\,\omega = \sqrt{\frac{10\,g\,h}{7}} \tag{6.43}$$

Perguntas

1. A posição de uma partícula em função do tempo é dada pela expressão $\vec{r} = 2\,t^2\,\hat{\imath} + \frac{5}{3}\,t^3\,\hat{\jmath}$ (SI). Qual dos vetores na lista é perpendicular à trajetória da partícula no instante $t = 2$ s?

A. $4\,\hat{\imath} - 5\,\hat{\jmath}$
B. $2\,\hat{\imath} - 5\,\hat{\jmath}$
C. $-5\,\hat{\imath} + 2\,\hat{\jmath}$
D. $5\,\hat{\imath} - 4\,\hat{\jmath}$
E. $-2\,\hat{\imath} + 3\,\hat{\jmath}$

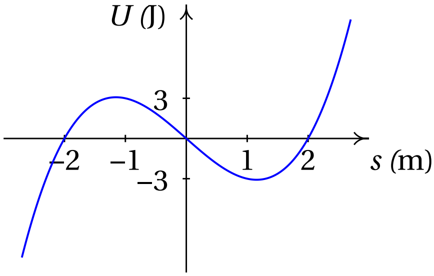
2. Sobre uma partícula atua uma força com direção, sentido e módulo constantes. O módulo da força é 1.6 N. Qual é o trabalho realizado por essa força quando a partícula se desloca uma distância de 20 cm numa direção que faz 60° com a força?

A. 0.28 J
B. 160 mJ
C. 0.68 J
D. 28 J
E. 16 J

3. Num oscilador harmónico simples formado por um corpo de massa m pendurado duma mola vertical com constante elástica k, se a massa for quadruplicada, qual das afirmações será correta?

A. A frequência duplica.
B. O período duplica.
C. A amplitude duplica.
D. A energia mecânica duplica.
E. A energia potencial duplica.

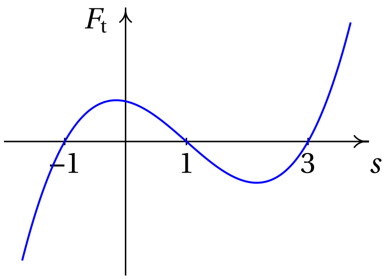
4. A figura mostra o gráfico da energia potencial $U(s)$, de uma partícula em função da posição na trajetória, s. Se a partícula está a oscilar à volta da posição $s = 1$, com energia mecânica igual a 2 J, qual é o valor máximo da sua energia cinética?



A. −3 J　　C. 0　　E. 5 J

B. 3 J　　D. 2 J

5. A figura mostra o gráfico da força tangencial resultante F_t, conservativa, sobre uma partícula. Quantos pontos de equilíbrio existem na região apresentada no gráfico?



A. 0　　C. 2　　E. 4

B. 1　　D. 3

Problemas

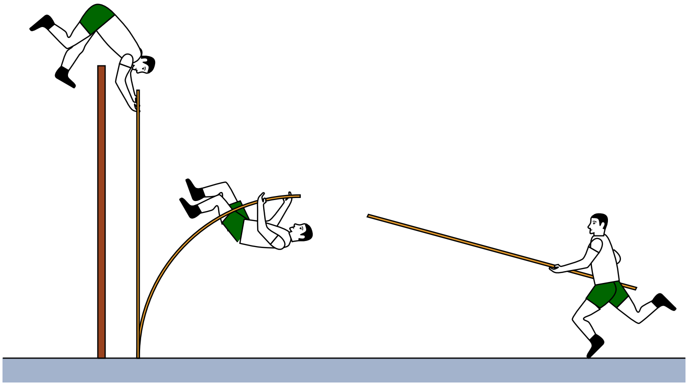
1. Calcule o integral de linha da força do exemplo 6.2: $\vec{F} = (3\,x + y)\,\hat{\imath}$, desde a origem O até o ponto P no plano xOy, com coordenadas $x = y = 1$, em que o percurso de integração é o arco mais curto da circunferência $(x-1)^2 + y^2 = 1$ (centro em $x = 1$, $y = 0$ e raio 1), que passa pela origem e pelo ponto P.

2. A lei da gravitação universal estabelece que qualquer corpo celeste de massa M produz uma força atrativa sobre qualquer outro corpo de massa m, dada pela expressão:

$$\vec{F}_{\text{g}} = -\frac{G\,M\,m}{r^2}\,\hat{r}$$

onde G é a constante de gravitação universal, r é a distância entre os dois corpos e $\hat{r}$ é o versor radial, que aponta desde o corpo de massa M até o corpo de massa m. (a) Determine a expressão para a energia potencial gravítica U_{g} devida ao corpo de massa M. (b) Tendo em conta o resultado da alínea anterior, como se justifica a equação 6.17, $U_{\text{g}} = m\,g\,z$, para a energia potencial gravítica de um objeto na Terra?

3. Num salto com vara, um atleta de 70 kg usa uma vara uniforme de 4.5 kg com 4.9 m de comprimento. O salto do atleta tem três fases: primeiro o atleta corre, com o seu centro de gravidade a 1 m de altura e com o centro de gravidade da vara a 1.5 m de altura, com velocidade de 9 m/s no instante em que possa a vara no chão. Na segunda fase, a energia da corrida é transferida para a vara, que se deforma e volta a esticar ficando vertical e elevando o atleta até uma altura próxima da altura da fasquia (desprezando forças dissipativas, até aqui a energia mecânica é constante). Finalmente o atleta estende os braços, aumentando a sua energia mecânica até o seu centro de gravidade subir a 5.8 m de altura, conseguindo ultrapassar a fasquia a 5.6 m. (a) Determine o trabalho realizado pelo saltador quando estende os braços. (b) Determine a força média que o saltador exerce sobre a vara na terceira fase.



4. Resolva o problema 7 do capítulo 4 aplicando o teorema do trabalho e a energia mecânica. A força exercida pelo bloco sobre o cone, quando o cone penetra no bloco, é uma força conservativa ou não?

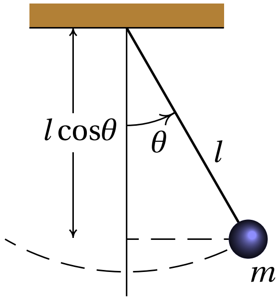
5. Num sistema como o da figura 6.5, o carrinho tem massa de 450 g. O carrinho é deslocado 5 cm da posição de equilíbrio e libertado a partir do repouso, começando a oscilar com um período de 1.2 s. Determine:

(a) A amplitude das oscilações.

(b) A constante elástica da mola.

(c) A velocidade máxima do carrinho.

6. Um pêndulo simples é composto por uma esfera de massa m, pendurada de uma corda muito fina, de comprimento l e massa desprezável. Quando a esfera parte do repouso, há um único grau de liberdade, que pode ser o ângulo θ que o fio faz com a vertical. (a) Determine a expressão para a energia mecânica, em função do ângulo θ e da sua derivada $\dot{\theta}$, arbitrando que a energia potencial é nula em $\theta = 90°$. (b) Desprezando a resistência do ar, a energia mecânica permanece constante e a sua derivada em ordem ao tempo é nula; derive a expressão da energia mecânica em ordem ao tempo e iguale a zero para encontrar a expressão para $\ddot{\theta}$ em função do ângulo.



7. Uma esfera de raio r roda, sem deslizar, dentro de uma calha semicircular de raio R, que está num plano vertical (ver figura).

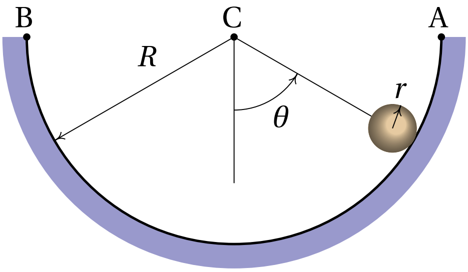
(a) Demonstre que, em função da derivada do ângulo θ, a energia cinética da esfera é

$$E_c = \frac{7}{10}\, m\,(R-r)^2\dot{\theta}^2$$

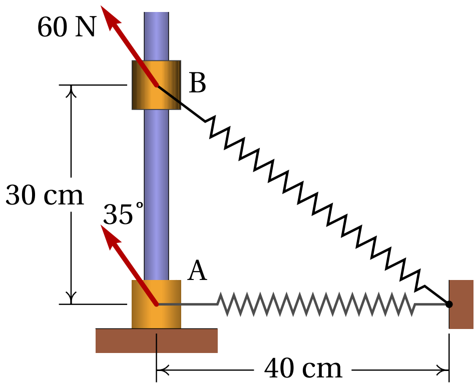
(b) Desprezando a resistência do ar, a energia mecânica é constante e a sua derivada em ordem ao tempo é nula; derive a expressão da energia mecânica em ordem ao tempo e iguale a zero para encontrar a expressão da aceleração angular $\ddot{\theta}$ em função do ângulo.

(c) Entre que valores deve estar a energia mecânica para que a esfera permaneça oscilando dentro da calha?

(d) A partir do resultado da alínea b, determine a expressão para $\ddot{\theta}$, no limite quando o raio da esfera é muito menor que o raio da calha ($R - r \approx R$) e explique porque o resultado é diferente do resultado obtido para o pêndulo simples no problema 6.



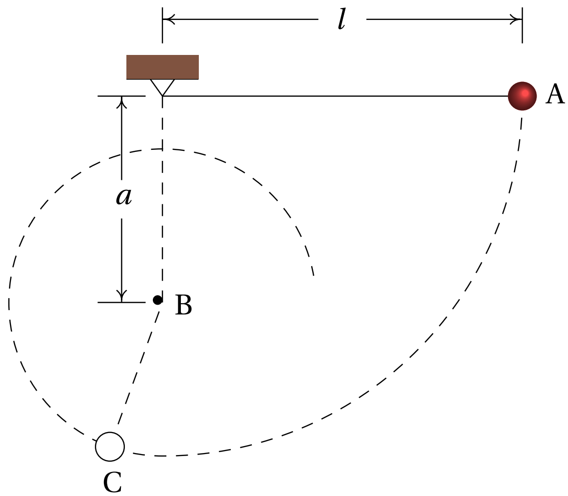
8. Um cilindro com massa de 80 g desliza a partir do repouso, no ponto A, até ao ponto B, devido a uma força externa constante de 60 N; o comprimento normal da mola é 30 cm e a sua constante elástica é 6 N/cm. Admitindo que não existe atrito com a barra fixa, calcule a velocidade com que o cilindro chega ao ponto B.



9. Resolva o problema 13 do capítulo 5 aplicando o princípio de conservação da energia mecânica.

10. Um cilindro desce uma rampa de altura h, a partir do repouso, rodando à volta do seu eixo sem deslizar. Calcule a velocidade do centro de massa do cilindro quando chega ao fim da rampa. Compare com o resultado do exemplo 6.3 para uma esfera; qual dos dois corpos desce mais rápido, a esfera ou o cilindro?

11. Uma esfera pendurada com uma corda de comprimento l parte do repouso na posição A, como mostra a figura. Quando a corda chega à posição vertical, entra em contacto com um prego fixo no ponto B, que faz com que a esfera descreva um arco de raio menor que l. Calcule o valor mínimo que deve ter a para que a trajetória da esfera seja uma circunferência com centro em B (se a não for suficientemente grande, a corda deixa de estar esticada quando a esfera sobe e a esfera não chega até a parte mais alta do círculo).



12. Considere um projétil que é lançado desde o chão, num quarto onde existe vácuo, com uma velocidade inicial v_0 que faz um ângulo θ com a horizontal.

(a) Calcule o tempo que o projétil demora até chegar ao ponto máximo da sua trajetória, onde a velocidade vertical é nula, e a posição nesse ponto.

(b) Com base no resultado da alínea anterior, demonstre que o alcance horizontal do projétil (distância horizontal desde onde é lançado até onde cai) é igual a:

$$R = \frac{v_0^2 \sin(2\theta)}{g} \tag{6.44}$$

Respostas

Perguntas: 1. C. **2.** B. **3.** B. **4.** E. **5.** D.

Problemas

1. $\frac{\pi}{4} + \frac{3}{2} \approx 2.29$

2. (a) $U_g = -\frac{G M m}{r}$

(b) Para um valor qualquer r_0, a série de Taylor de U_g é:
$$-\frac{G\,M\,m}{r_0} + \frac{G\,M\,m}{r_0^2}\,(r - r_0) - \ldots$$
O primeiro termo é uma constante, que pode ser ignorada; no segundo termo, se r_0 for o raio da Terra, $r - r_o$ será a altura z desde a superfície da Terra e $G\,M/r_0^2$ será igual à constante g. Ignorando o resto da série, que para valores de z muito menores que r_0 não altera significativamente a soma dos dois primeiros termos, obtém-se $U_\text{g} \approx m\,g\,z$.

3. (a) 317.4 J (b) 686 N.

4. 24 696 N/m^2. A força do bloco não é conservativa, porque só atua quando o cone está a penetrar; se o cone voltasse a subir, após ter penetrado no bloco, o bloco já não produzia força sobre o cone.

5. (a) 5 cm. (b) 12.34 N/m. (c) 26.2 cm/s.

6. (a) $E_\text{m} = \dfrac{1}{2}\,m\,l^2\dot\theta^2 - m\,g\,l\cos\theta$ (b) $\ddot\theta = -\dfrac{g}{l}\sin\theta$

7. (a) Observe que a velocidade do centro de massa da esfera é $(R - r)\,\dot\theta$ e a condição de rodamento sem deslizamento implica que a velocidade angular da esfera é igual a essa velocidade dividida por r. (b)
$$\ddot\theta = -\frac{5\,g}{7\,(R - r)}\sin\theta$$
(c) Maior que $-m\,g\,(R - r)$ e menor que zero; se a energia mecânica é exatamente igual a $-m\,g\,(R - r)$, a esfera não oscila, mas permanece em repouso no ponto mais baixo da calha. (d) O valor absoluto de $\ddot\theta$ é menor num fator 5/7, devido a que parte da energia potencial gravítica é transformada em energia cinética de rotação da esfera. A energia cinética de rotação é sempre 2/5 da energia cinética de translação, independentemente do valor de r; assim sendo, no limite $r \to 0$ também 2/7 da energia gravítica são convertidos em energia de rotação e apenas os restantes 5/7 fazem aumentar θ.

8. 11.74 m/s.

9. 5.274 s^{-1}

10. $\sqrt{\dfrac{4\,g\,h}{3}}$. A esfera desce mais rápido que o cilindro, por ter menor momento de inércia.

11. $\dfrac{3\,l}{5}$

12. (a) $t = v_0\sin\theta/g$, $\vec r = \dfrac{v_0^2}{2g}\left(\sin(2\theta)\,\hat\imath + \sin^2\theta\,\hat\jmath\right)$