B. Cálculo do campo elétrico

B.1. Campo de uma esfera condutora

Numa esfera condutora isolada, a carga distribui-se uniformemente na superfície. Se o raio da esfera é R e a carga total Q, então a densidade superficial de carga é constante e igual à carga total dividida pela área da superfície da esfera

$$\sigma = \frac{Q}{4\,\pi\,R^2} \tag{B.1}$$

Para calcular o campo elétrico num ponto P qualquer, que está a uma distância r do centro da esfera, é conveniente definir o eixo dos z com origem O no centro da esfera e passando pelo ponto P, como se mostra na figura B.1

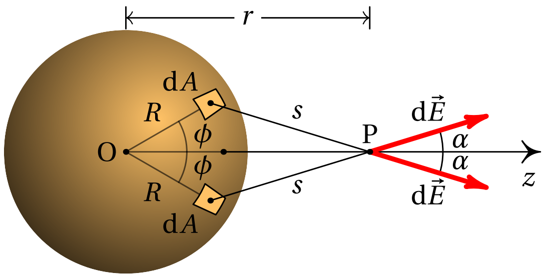

Figura B.1.: Esfera condutora com carga.

Divide-se a superfície da esfera em muitos pedaços infinitesimalmente pequenos, calcula-se o campo produzido por cada pedaço no ponto P e o campo total é a sobreposição de todos esses campos. A figura B.1 mostra duas partes infinitesimais da superfície da esfera, ambas com área dA, em dois pontos que estão à mesma distância s de P, de forma que os segmentos desde esses pontos até P estão no mesmo plano com o eixo dos z. Um desses pontos tem coordenadas polares $(R,\, \theta,\, \phi)$, e o outro $(R, \theta + \pi,\, \phi)$, onde ϕ é o ângulo indicado na figura. O ângulo θ mede-se no plano xy, perpendicular ao eixo dos z

O elemento infinitesimal de área, dA, determina-se multiplicando os comprimentos dos dois arcos obtidos quando os dois ângulos, ϕ e θ, aumentam infinitesimalmente em dϕ e dθ. O aumento do ângulo ϕ produz um arco de comprimento $R\,\mathrm{d}\phi$, e o aumento do ângulo θ produz um arco que, projetado no plano xy, tem raio $R\sin(\phi)$ e ângulo dθ. Como tal, o elemento infinitesimal de área na superfície da esfera é

$$\mathrm{d}A = R^2 \sin(\phi)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi \tag{B.2}$$

A carga infinitesimal nessa região obtém-se multiplicando essa área pela carga superficial (equação B.1)

$$\mathrm{d}q = \frac{Q}{4\pi}\sin(\phi)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi \tag{B.3}$$

Essa carga infinitesimal pode ser considerada uma carga pontual e, assim sendo, o módulo do campo que ela produz no ponto P é dado pela expressão do campo para uma carga pontual (equação 1.5)

$$\mathrm{d}E = \frac{k\,|Q|}{4\pi K s^2}\sin(\phi)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi \tag{B.4}$$

onde s é a distância desde a região infinitesimal na superfície da esfera, até o ponto P. Os campos produzidos pelas duas regiões infinitesimais mostradas na figura B.1 têm o mesmo módulo dE (equação B.4) e fazem o mesmo ângulo α em relação ao eixo z, mas nos dois lados opostos do eixo dos z. Como tal, as componentes desses dois campos perpendiculares ao eixo dos z anulam-se, ficando apenas a soma das componentes paralelas ao eixo dos z. Conclui-se então que o campo total deverá ser na direção do eixo dos z e para o calcular basta integrar a componente $\cos(\alpha)\,\mathrm{d}E$, do campo produzido pela região infinitesimal no (R, θ, ϕ), em ordem a θ e a ϕ, com os limites necessários para incluir todos os pontos da superfície:

$$E = \int\limits_{\text{sup. esfera}} \cos(\alpha)\,\mathrm{d}E = \frac{k\,|Q|}{4\pi K}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos(\alpha)\,\sin(\phi)}{s^2}\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi \tag{B.5}$$

Como s e α dependem de ϕ mas não dependem de θ, o integral em ordem a θ é simplesmente igual a 2π

$$E = \frac{k\,|Q|}{2K}\int_0^{\pi}\frac{\cos(\alpha)\,\sin(\phi)}{s^2}\,\mathrm{d}\phi \tag{B.6}$$

Este integral é mais simples de calcular expressando os dois ângulos ϕ e α em função da distância s, usando o teorema do cosseno aplicado ao triângulo de lados r, R e s na figura B.1

$$R^2 = s^2 + r^2 - 2\,s\,r\,\cos(\alpha) \tag{B.7}$$

$$s^2 = R^2 + r^2 - 2\,R\,r\,\cos(\phi) \tag{B.8}$$

A expressão para α obtém-se a partir da equação B.7

$$\cos(\alpha) = \frac{s^2 + r^2 - R^2}{2\,s\,r} \tag{B.9}$$

Lembre-se que R e r são constantes para todos os segmentos da superfície esférica. A expressão para $\sin(\phi)\,\mathrm{d}\phi$ obtém-se derivando a equação B.8

$$\sin(\phi)\,\mathrm{d}\phi = \frac{s}{R\,r}\,\mathrm{d}s \tag{B.10}$$

Substituindo as expressões B.9 e B.10 na equação B.6 obtém-se

$$E = \frac{k\,|Q|}{4\,K\,R\,r^2} \int\limits_{s_{\text{mín}}}^{s_{\text{máx}}} \left(1 + \frac{r^2 - R^2}{s^2}\right) \mathrm{d}s \tag{B.11}$$

Onde $s_{\text{mín}}$ e $s_{\text{máx}}$ são os valores mínimo e máximo da distância s, em $\phi = 0$ e $\phi = \pi$. O resultado do integral é

$$E = \frac{k\,|Q|}{4\,K\,R\,r^2}\,(s_{\text{máx}} - s_{\text{mín}}) \left(1 + \frac{r^2 - R^2}{s_{\text{máx}}\,s_{\text{mín}}}\right) \tag{B.12}$$

É necessário considerar dois casos diferentes, quando o ponto P está dentro ou fora da esfera. Quando o ponto P está dentro da esfera, $s_{\text{mín}} = R - r$, $s_{\text{máx}} = R + r$ e, como tal, $s_{\text{máx}}\,s_{\text{mín}} = R^2 - r^2$ e

$$1 + \frac{r^2 - R^2}{s_{\text{máx}}\,s_{\text{mín}}} = 1 + \frac{d^2 - R^2}{R^2 - r^2} = 0$$

Ou seja, o campo elétrico em qualquer ponto dentro da esfera é nulo. Fora da esfera, $s_{\text{mín}} = r - R$, $s_{\text{máx}} = r + R$ e

$$E = \frac{k\,|Q|}{4\,K\,R\,r^2}(2\,R)\left(1 + \frac{r^2 - R^2}{r^2 - R^2}\right) = \frac{k\,|Q|}{K\,r^2}$$

Que é o mesmo campo produzido por uma carga pontual Q colocada no centro da esfera. Resumindo, o campo da esfera condutora é na direção radial, atrativo se $Q < 0$ ou repulsivo se $Q > 0$ e com módulo igual a

$$E = \begin{cases} \dfrac{k\,|Q|}{K\,r^2} & , r > R \\ 0 & , r < R \end{cases} \tag{B.13}$$

B.2. Campo de duas esferas condutoras concêntricas

A figura B.2 mostra duas esferas condutoras concêntricas isoladas, de raios R_1 e R_2. A esfera de raio R_1 tem carga total Q_1, a esfera de raio R_2 tem carga total Q_2 e $R_1 < R_2$. O campo de cada uma das esferas é dado pela expressão obtida na secção anterior e o campo total é a soma desses dois campos.

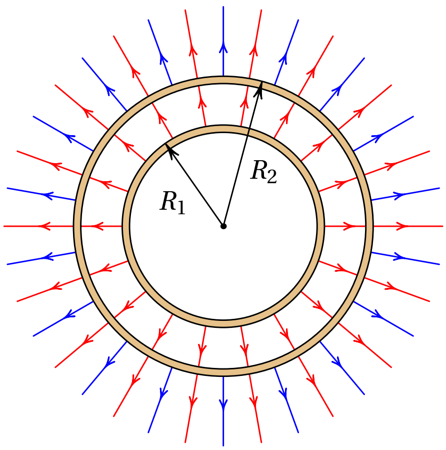

Figura B.2.: Esferas condutoras concêntricas com carga.

No interior da esfera menor, o campo é nulo porque todos os pontos nessa região encontram-se no interior das duas esferas e as esferas condutoras não produzem campo no seu interior. Nos pontos que estão entre as duas esferas, o campo é igual ao campo da esfera menor, porque esses pontos estão no interior da esfera maior, onde esta não produz nenhum campo. Nos pontos fora das duas esferas, o campo total é igual à soma dos campos das duas esferas, ou à sua diferença, segundo Q_1 e Q_2 tenham o mesmo sinal ou sinais opostos.

A expressão para o módulo do campo total a uma distância r do centro das esferas é então

$$E = \begin{cases} \dfrac{k\,|Q_1 + Q_2|}{K\,r^2} & ,\, r > R_2 \\ \dfrac{k\,|Q_1|}{K\,r^2} & ,\, R_1 < r < R_2 \\ 0 & ,\, r < R_1 \end{cases} \tag{B.14}$$

O campo é sempre na direção radial. Entre as duas esferas, o campo aponta no sentido radial se Q_1 é positiva, ou no sentido oposto se Q_1 é negativa. Fora das duas esferas, o campo é repulsivo se $Q_1 + Q_2$ é positiva, ou atrativo se $Q_1 + Q_2$ é negativa.

As expressões obtidas neste apêndice para o campo da esfera condutora e das duas esferas concêntricas podem ser obtidas mais facilmente usando a lei de Gauss, como se explica no capítulo 6. No entanto, o método usado neste apêndice é mais geral e permite obter campos de distribuições de carga mais complicadas. O problema é que os integrais obtidos podem não ter solução analítica, tendo de ser calculados de forma numérica.