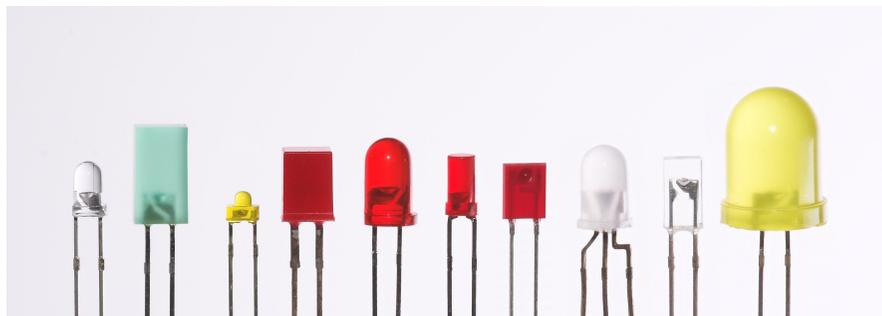


## 12. Ondas eletromagnéticas e luz



Os díodos emissores de luz (LED) são muito usados atualmente em aparelhos eletrônicos. Um LED produz luz de forma muito eficiente, com um consumo elétrico de apenas alguns miliwatt. São construídos em diferentes formas, tamanhos e cores. Cada algarismo num écran numérico é obtido com um conjunto de 8 LED; para obter cada um dos números acendem-se as combinações de LED necessárias.

Um LED é construído com cristais semicondutores e tem um tempo de duração muito elevado. A luz que produz tem uma cor própria que não muda com a corrente ou as condições de operação.

## 12.1. Equações de Maxwell

As equações básicas que permitem calcular o campo eletromagnético são conhecidas como equações de Maxwell. Uma forma suficiente de definir os dois campos, elétrico e magnético, em qualquer ponto do espaço, consiste em descrever o fluxo desses campos em qualquer superfície fechada e o integral de linha em qualquer curva fechada. São necessárias então quatro equações, uma para o fluxo do campo elétrico,  $\Phi$ , outra para o fluxo do campo magnético,  $\Psi$ , e duas mais para os integrais de linha dos dois campos.

Essas quatro equações já foram introduzidas ao longo dos capítulos anteriores e vão ser reescritas aqui. A primeira equação de Maxwell é a lei de Gauss, que relaciona o fluxo do campo elétrico numa superfície fechada com as cargas no seu interior:

$$\Phi(\text{Sup. fechada}) = 4 \pi k q_{\text{int}} \quad (12.1)$$

No caso do campo magnético, como não existem monopolos magnéticos, o fluxo através de qualquer superfície fechada é nulo.

$$\Psi(\text{Sup. fechada}) = 0 \quad (12.2)$$

Esta é a segunda equação de Maxwell.

A terceira equação de Maxwell é a equação que define o integral de linha do campo elétrico em qualquer curva fechada  $C$ . Essa equação é a lei de Faraday, introduzida no capítulo 9.

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \frac{d\Psi}{dt} \quad (12.3)$$

em que o integral no primeiro membro corresponde à f.e.m. induzida na curva  $C$  fechado. O fluxo magnético no segundo membro da equação é o fluxo através da superfície delimitada pela curva  $C$ .

A quarta equação, que define o integral de linha do campo magnético em qualquer curva fechada  $C$ , é a lei de Ampère, já estudada no capítulo sobre o campo magnético:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = 4 \pi k_m I_{\text{int}} \quad (12.4)$$

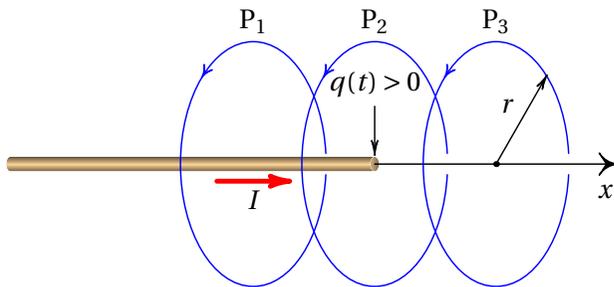
mas Maxwell reparou que esta equação só poderia ser válida no caso em que não existam campos elétricos variáveis.

No capítulo sobre indução eletromagnética viu-se que os campos elétrico e magnético são diferentes em diferentes referenciais inerciais, e utilizou-se a invariância da força eletromagnética para calcular o campo elétrico induzido num referencial em que o campo magnético não é estático. De igual modo, num referencial em que o campo elétrico não é estático, deve aparecer um campo magnético induzido.

Na equação 12.4 falta um termo que dependa da variação do campo elétrico e que corresponda ao integral de linha do campo magnético induzido.

Considere-se o exemplo de um fio retilíneo sobre o semieixo negativo dos  $x$ , que se estende desde  $-\infty$  até a origem (figura 12.1). Se durante alguns instantes existe no fio uma corrente  $I$ , no sentido positivo do eixo dos  $x$ , há acumulação de cargas positivas na origem; se  $q = f(t)$  representa a carga acumulada na origem no instante  $t$ , a derivada dessa função em ordem ao tempo é igual à corrente:

$$I = \frac{dq}{dt} \quad (12.5)$$

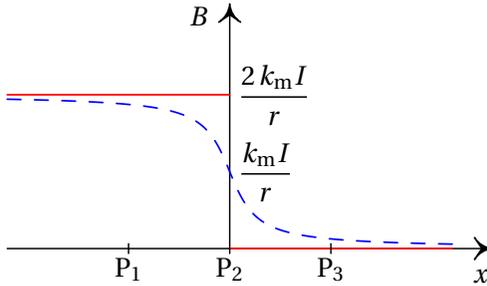


**Figura 12.1.:** Fio retilíneo, no eixo dos  $x$ , desde  $-\infty$  até a origem.

Para calcular o módulo do campo magnético em três pontos  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$ , que se encontram a uma distância  $r$  do eixo dos  $x$ , considerem-se 3 circunferências de raio  $r$ , perpendiculares ao eixo dos  $x$ , com centro no eixo e orientadas no sentido indicado na figura 12.1. Aplicando a lei de Ampère a essas 3 circunferências, conclui-se que o módulo do campo magnético no ponto  $P_1$  é  $2k_m I/r$  e nos pontos  $P_2$  e  $P_3$  é nulo.

A linha contínua no gráfico 12.2 mostra o módulo do campo magnético obtido usando a lei de Ampère para todos os pontos a uma distância  $r$  do

eixo dos  $x$ . Em  $P_2$  ( $x = 0$ ) existe uma descontinuidade; o campo passa de  $2 k_m I/r$  para zero. A curva a tracejado é o resultado mais realista esperado: o campo decresce gradualmente até zero.



**Figura 12.2.:** Campo  $B$  na figura 12.1.

Para obter a curva a tracejado na figura 12.2 é necessário incluir no segundo membro da equação 12.4 um termo adicional que é nulo longe da origem e na vizinhança da origem aproxima-se de  $-2 \pi k_m I$ , se  $x$  for negativo, ou  $2 \pi k_m I$ , se  $x$  for positivo.

A carga  $q$  na origem produz fluxo elétrico  $\Phi$  negativo através do interior da circunferência que passa por  $P_1$  e positivo através do interior da circunferência que passa por  $P_3$ . Quando os pontos  $P_1$  e  $P_3$  se aproximam de  $P_2$ , o fluxo elétrico nessas duas circunferências é  $-2 \pi k q$  e  $2 \pi k q$  respectivamente. Como tal, a derivada do fluxo elétrico em ordem ao tempo passa de  $-2 \pi k I$  para  $2 \pi k I$  e o termo que falta no segundo membro da equação 12.4 é:

$$\frac{k_m}{k} \frac{d\Phi}{dt} \tag{12.6}$$

Incluindo esse termo na equação 12.4, obtém-se a quarta equação de Maxwell:

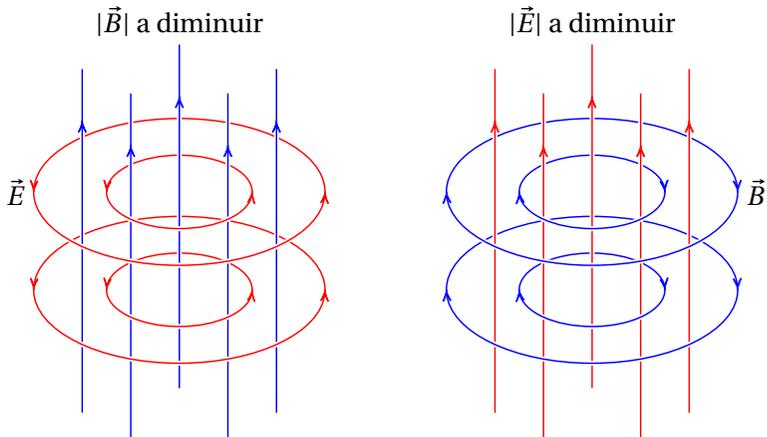
$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = 4 \pi k_m I_{int} + \frac{k_m}{k} \frac{d\Phi}{dt} \tag{12.7}$$

## 12.2. Campos induzidos

Um campo magnético variável no tempo induz um campo elétrico, e um campo elétrico variável induz um campo magnético. Um exemplo é o

campo magnético uniforme do 6 no capítulo 9; a variação do campo em função do tempo induz um campo elétrico com linhas de campo circulares.

O campo elétrico induzido é proporcional à derivada do fluxo magnético e o campo magnético induzido é proporcional à derivada do fluxo elétrico. Quando um campo é uniforme, o fluxo através de uma superfície é maior se a superfície for perpendicular ao campo; isso implica que o campo induzido é perpendicular ao campo variável.



**Figura 12.3.:** Campo elétrico induzido por um campo magnético uniforme de intensidade variável (esquerda) e campo magnético induzido por um campo elétrico uniforme de intensidade variável (direita).

A figura 12.3 mostra o campo elétrico induzido por um campo magnético uniforme mas variável, e o campo magnético induzido por um campo elétrico uniforme e variável. No primeiro caso, devido ao sinal negativo no lado direito da equação 12.3, o campo elétrico induzido tem sentido oposto ao obtido com a regra da mão direita em relação à derivada do campo magnético; como o campo magnético está a diminuir, a derivada do campo aponta para baixo e a regra da mão direita indica rotação no sentido horário; portanto, as linhas do campo induzido estão orientadas no sentido anti-horário.

O sinal positivo do último termo na equação 12.7 implica que as linhas do campo magnético induzido seguem a regra da mão direita em relação ao aumento do campo elétrico. No caso do campo elétrico variável no lado direito da figura 12.3, como o campo está a diminuir, a derivada do campo

elétrico aponta para baixo e a regra da mão direita indica que o campo magnético induzido é no sentido horário.

### 12.3. Campo eletromagnético no vácuo

No vácuo, não podem haver cargas ou correntes, pois não há matéria, mas pode haver campos elétricos e magnéticos. Nesse caso, as quatro equações de Maxwell tomam a forma,

$$\Phi(\text{Sup. fechada}) = 0 \quad (12.8)$$

$$\Psi(\text{Sup. fechada}) = 0 \quad (12.9)$$

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{d\Psi}{dt} \quad (12.10)$$

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \frac{k_m}{k} \frac{d\Phi}{dt} \quad (12.11)$$

O único parâmetro nessas equações é a constante  $k_m/k$ . No sistema internacional de unidades, o valor dessa constante é:

$$\frac{k_m}{k} = \frac{10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-1}}{9 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2}} = \frac{1}{9 \times 10^{16}} \frac{\text{s}^2}{\text{m}^2} \quad (12.12)$$

que é exatamente igual ao inverso do quadrado da velocidade da luz no vácuo,  $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$

$$\boxed{\frac{k_m}{k} = \frac{1}{c^2}} \quad (12.13)$$

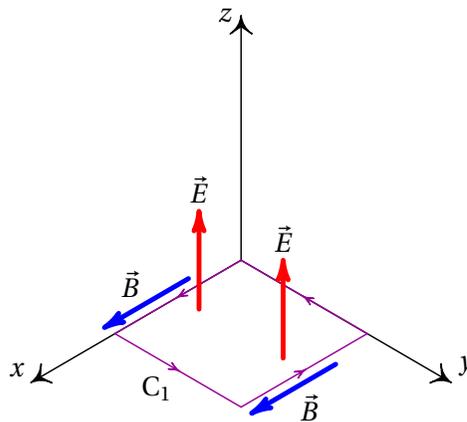
Maxwell foi o primeiro a descobrir esta relação entre as constantes elétrica e magnética e a velocidade da luz, a meados do século XIX, quando o valor da velocidade da luz no vácuo já era conhecido com muita precisão, mas ninguém suspeitava que existisse qualquer relação entre o eletromagnetismo e a luz. Maxwell concluiu então que a luz deve ser uma onda eletromagnética, composta por campos elétrico e magnético que se podem propagar no vácuo.

Para investigar as soluções das equações 12.8, 12.9, 12.10 e 12.11, admita-se que numa região existem campos elétrico e magnético que são soluções

dessas equações; cada um dos campos é induzido pela variação do outro. Se os campos forem uniformes nessa região, já se viu que devem ser perpendiculares entre si. Pode-se fixar a origem num ponto onde existem campo elétrico e magnético e escolher os eixo dos  $x$  e dos  $z$  a apontar nas direções e sentidos do campo  $\vec{B}$  e  $\vec{E}$  nesse ponto, respetivamente.

Aplique-se a equação 12.11 num percurso retangular infinitesimal  $C_1$ , perpendicular ao eixo dos  $z$ , com lados  $\Delta x$  e  $\Delta y$  e um vértice na origem, orientado como indica a figura 12.4. O fluxo elétrico através do interior de  $C_1$  é:

$$\Phi_e = E \Delta x \Delta y \quad (12.14)$$



**Figura 12.4.:** Fluxo elétrico e integral de linha do campo magnético num retângulo no plano  $Oxy$ .

Estando o campo magnético na direção e sentido do eixo dos  $x$ , o integral de linha do campo magnético ao longo de  $C_1$  é:

$$\int_{C_1} B_t ds = B(y) \Delta x - B(y + \Delta y) \Delta x \quad (12.15)$$

e substituindo 12.14 e 12.15 na equação 12.11, obtém-se:

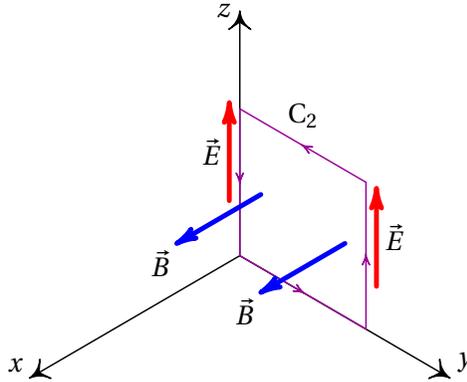
$$B(y) \Delta x - B(y + \Delta y) \Delta x = \frac{1}{c^2} \Delta x \Delta y \frac{\partial E}{\partial t} \quad (12.16)$$

Dividindo os dois membros dessa equação por  $\Delta x \Delta y$  e calculando o limite  $\Delta y \rightarrow 0$ , obtém-se no primeiro membro a derivada parcial de  $B$  em ordem

a  $y$ , com sinal negativo:

$$-\frac{\partial B}{\partial y} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E}{\partial t} \quad (12.17)$$

Em seguida, aplique-se a equação 12.10 num percurso retangular infinitesimal  $C_2$ , perpendicular ao eixo dos  $x$ , com lados  $\Delta y$  e  $\Delta z$  e um vértice na origem, orientado no sentido que mostra a figura 12.5.



**Figura 12.5.:** Fluxo magnético e integral de linha do campo elétrico num retângulo no plano  $Oyz$ .

O fluxo magnético através do interior de  $C_2$  é  $B \Delta y \Delta z$ , e o integral de linha do campo elétrico ao longo de  $C_2$  é  $E(y + \Delta y) \Delta z - E(y) \Delta z$ . Substituindo na equação 12.9 obtém-se:

$$E(y + \Delta y) \Delta z - E(y) \Delta z = -\Delta y \Delta z \frac{\partial B}{\partial t} \quad (12.18)$$

e dividindo ambos os membros por  $\Delta y \Delta z$  e calculando o limite  $\Delta y \rightarrow 0$ , o primeiro membro fica igual à derivada parcial de  $E$  em função de  $y$ :

$$\frac{\partial E}{\partial y} = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad (12.19)$$

Derivando a equação 12.17 em ordem a  $t$  e a equação 12.19 em ordem a  $y$  e combinando as duas equações, pode-se obter uma equação em que figura unicamente o campo elétrico:

$$\boxed{\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 E}{\partial y^2}} \quad (12.20)$$

Também se pode obter uma equação apenas para o campo magnético, derivando a equação 12.17 em ordem a  $y$  e a equação 12.19 em ordem a  $t$  e combinando os resultados:

$$\boxed{\frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 B}{\partial y^2}} \quad (12.21)$$

As equações 12.20 e 12.21 são a mesma equação, designada de **equação de onda**.

## 12.4. Ondas planas polarizadas

As soluções das equações 12.20 ou 12.21 podem ser obtidas num outro sistema de coordenadas em que a equação assume uma forma mais simples. A componente  $E$  do campo elétrico, na equação 12.20, é uma função que depende de  $y$  e de  $t$ . Fazendo uma mudança para duas **variáveis características**  $r$  e  $s$  definidas por:

$$r = y + ct \quad s = y - ct \quad (12.22)$$

e usando a regra de derivação de funções compostas, calculam-se as derivadas parciais de  $E$ , em função de  $r$  e  $s$ , substituindo-as na equação 12.20 para obter:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial r \partial s} = 0 \quad (12.23)$$

É fácil ver que para verificar essa equação, uma das duas derivadas parciais de  $E$ , em ordem a  $r$  ou em ordem a  $s$ , deve ser nula. Isto é, o campo  $E$  deve ser uma função  $f(r)$  que depende apenas de  $r$ , ou uma função  $g(s)$  que depende apenas de  $s$ . Em função das variáveis  $y$  e  $t$ , a função  $E$  pode ter uma das duas formas:

$$E = f(y + ct) \quad E = g(y - ct) \quad (12.24)$$

ou qualquer combinação linear desses dois tipos de funções. Quaisquer funções  $f$  ou  $g$  conduzem a soluções particulares da equação de onda.

Para cada valor de  $t$ , a função  $f(y + ct)$  é idêntica à função  $f(y)$ , em  $t = 0$ , mas deslocada no sentido negativo do eixo dos  $y$  de uma distância igual a  $ct$ . Assim sendo, o campo  $E = f(y + ct)$  descreve uma onda que se

propaga no sentido negativo do eixo dos  $y$ , com velocidade  $c$ . Uma análise semelhante mostra que  $E = g(y - ct)$  descreve uma onda que se propaga no sentido positivo do eixo dos  $y$ , com velocidade  $c$ .

O campo magnético  $B$ , que também verifica a equação de onda, também deve ter uma forma semelhante à equação 12.24, mas não pode ser independente da solução obtida para  $E$ , devido às relações 12.17 e 12.19. Substituindo as soluções 12.24 na equação 12.17, obtém-se as soluções correspondentes para o campo magnético:

$$B = -\frac{1}{c} f(y + ct) \quad B = \frac{1}{c} g(y - ct) \quad (12.25)$$

O fator  $c$  no denominador indica que a intensidade do campo magnético numa onda eletromagnética é muito menor que a intensidade do campo elétrico. Os sinais obtidos nestas expressões para  $B$  indicam que os campos indicados nas figuras 12.4 e 12.5 correspondem a uma onda que se propaga no sentido positivo do eixo dos  $y$  e se a onda se propaga no sentido negativo do eixo dos  $y$ , o campo magnético tem o sentido oposto ao que foi indicado nas figuras 12.4 e 12.5.

Conclui-se que existem duas famílias de soluções das equações de onda eletromagnética. A primeira família corresponde a ondas que se propagam no sentido positivo do eixo dos  $y$  com campos elétrico e magnético dados pelas seguintes expressões:

$$\vec{E} = g(y - ct) \hat{k} \quad (12.26)$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c} g(y - ct) \hat{i} \quad (12.27)$$

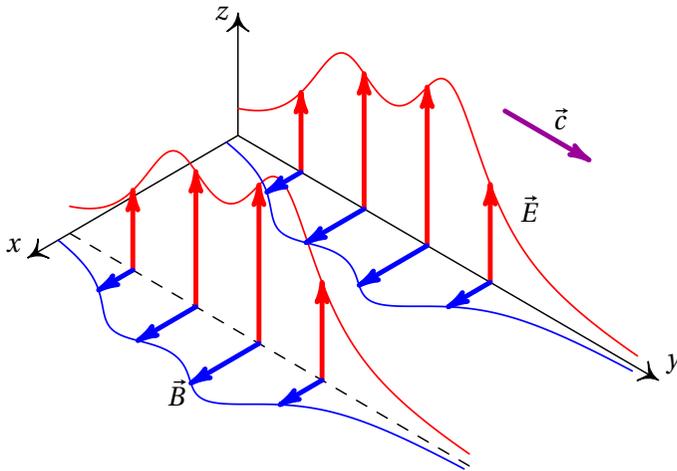
em que  $g$  pode ser qualquer função contínua de uma variável,  $g(s)$ . A figura 12.6 mostra uma dessas soluções.

A segunda família de soluções são ondas eletromagnéticas que se propagam no sentido negativo do eixo dos  $y$ , e com campos que verificam as expressões:

$$\vec{E} = f(y + ct) \hat{k} \quad (12.28)$$

$$\vec{B} = -\frac{1}{c} f(y + ct) \hat{i} \quad (12.29)$$

onde  $f$  é qualquer função contínua de uma variável,  $f(r)$ .



**Figura 12.6.:** Onda eletromagnética plana polarizada, com velocidade no sentido positivo do eixo dos  $y$ .

Estas soluções foram obtidas admitindo que as direções dos campos elétrico e magnético são iguais em todo o espaço e esse tipo de onda eletromagnética chama-se **onda plana polarizada**. Lembre-se que a direção do campo magnético é necessariamente perpendicular ao campo elétrico. A direção de propagação da onda é perpendicular à direção do campo elétrico e à direção do campo magnético e é sempre no sentido do produto vetorial ( $\vec{E} \times \vec{B}$ ); nomeadamente, seguindo a regra da mão direita de  $\vec{E}$  para  $\vec{B}$ .

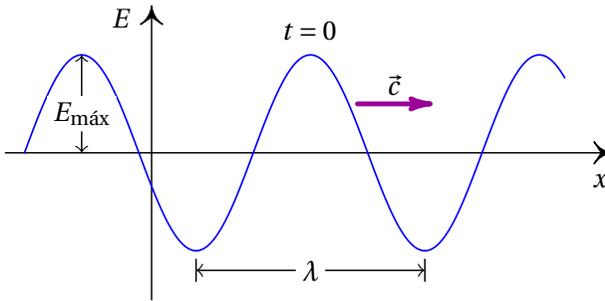
A direção de polarização é, por definição, a direção do campo elétrico. O campo magnético da onda é muito mais fraco do que o campo elétrico. O módulo da velocidade de todas as ondas eletromagnéticas no vácuo é sempre a constante  $c$ .

As ondas planas polarizadas, que se propagam na direção do eixo dos  $x$  ou dos  $z$ , têm formas semelhantes às equações 12.26 ou 12.28, com  $y$  substituído pela coordenada correspondente à direção de propagação, o versor  $\hat{k}$  substituído pelo versor na direção de polarização e  $\hat{i}$  substituído pelo versor perpendicular às direções de propagação e de polarização, seguindo a regra da mão direita do versor de propagação para o versor de polarização.

## 12.5. Ondas harmônicas

Uma onda harmônica é uma onda com a forma de uma função sinusoidal, como na figura 12.7, no caso de uma onda que se desloca no sentido positivo do eixo dos  $x$ .

A distância  $\lambda$  entre dois pontos consecutivos onde o campo e a sua derivada têm o mesmo valor, é designada por **comprimento de onda** (por exemplo, a distância entre dois máximos ou mínimos consecutivos). O valor máximo do módulo do campo,  $E_{\text{máx}}$ , é a sua **amplitude**, o valor máximo.



**Figura 12.7.:** Onda harmônica.

O tempo que a onda demora a percorrer um comprimento de onda designa-se por **período**,  $T$ . O inverso do período é a **frequência**  $f = 1/T$ , que indica o número de comprimentos de onda que passam por um ponto, por unidade de tempo. No sistema SI a unidade da frequência é o hertz,  $1 \text{ Hz} = 1 \text{ s}^{-1}$ .

No caso de uma onda eletromagnética no vácuo, a velocidade de propagação é  $c$  e observa-se a relação:

$$c = \frac{\lambda}{T} = \lambda f \quad (12.30)$$

A equação da função representada na figura 12.7 é:

$$E(x) = E_{\text{máx}} \sin\left(2\pi \frac{x}{\lambda} + \varphi\right) \quad (12.31)$$

onde a constante  $\varphi$  é a **fase inicial**. Essa função representa a forma da onda num instante inicial, que se pode tomar como  $t = 0$ . Para obter a

função de onda num instante diferente, substitui-se  $x$  por  $x - ct$ , já que a onda se propaga no sentido positivo do eixo dos  $x$ , com velocidade  $c$

$$E(x, t) = E_{\text{máx}} \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x - ct) + \varphi\right) \quad (12.32)$$

e usando a relação entre a velocidade e o período, pode-se escrever

$$E(x, t) = E_{\text{máx}} \sin\left(2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) + \varphi\right) \quad (12.33)$$

Para  $x = 0$ , obtém-se a equação que descreve o campo elétrico na origem, em função do tempo:

$$E(x) = -E_{\text{máx}} \sin\left(2\pi\frac{t}{T} + \varphi\right) \quad (12.34)$$

e vê-se que o campo elétrico na origem é uma função sinusoidal com período  $T$  e amplitude  $E_{\text{máx}}$ . O campo noutros pontos tem exatamente a mesma forma sinusoidal, mas com diferentes valores da constante de fase.

### Exemplo 12.1

Uma onda eletromagnética plana propaga-se no vácuo, no sentido negativo do eixo dos  $z$ . Num dado instante  $t = 0$  o campo elétrico é  $\vec{E} = 34 \sin(3,25 \times 10^8 z) \hat{i}$ , onde  $z$  é medido em metros e o campo é medido em N/C. Escreva a função que define o campo magnético em qualquer ponto e em qualquer instante.

**Resolução.** A função que define o campo elétrico em  $t = 0$  indica que se trata de uma onda harmónica polarizada na direção do versor  $\hat{i}$ . O campo elétrico de uma onda harmónica plana, polarizada segundo  $\hat{i}$ , que se propaga no sentido negativo do eixo  $z$ , é:

$$\vec{E} = E_{\text{máx}} \sin\left(2\pi\left(\frac{z}{\lambda} + \frac{t}{T}\right) + \varphi\right) \hat{i}$$

Substituindo  $t = 0$  e comparando com o campo dado no enunciado, conclui-se que:

$$\varphi = 0 \quad \frac{2\pi}{\lambda} = 3,25 \times 10^8 \quad E_{\text{máx}} = 34$$

e  $\lambda/T$  deve ser igual à velocidade da luz no vácuo que em unidades SI é  $3 \times 10^8$ . Assim,  $2\pi/T = 9.75 \times 10^{16}$  e o campo elétrico em qualquer ponto e em qualquer instante é:

$$\vec{E} = 34 \sin(3.25 \times 10^8 z + 9.75 \times 10^{16} t) \hat{i}$$

O módulo do campo  $\vec{B}$  é igual ao módulo do campo elétrico, dividido pela velocidade da luz; o sentido de  $\vec{B}$  deve garantir que o produto vetorial  $\vec{E} \times \vec{B}$  seja na direção de propagação ( $-\hat{k}$ ) e portanto:

$$\vec{B} = -1.13 \times 10^{-7} \sin(3.25 \times 10^8 z + 9.75 \times 10^{16} t) \hat{j}$$

## 12.6. Espectro eletromagnético

O comprimento de onda,  $\lambda$ , e a frequência,  $f$ , de uma onda harmônica não podem variar independentemente, pois estão relacionados por  $\lambda f = c$ . Dada a frequência ou o comprimento de onda, é possível classificar a onda dentro do **espectro eletromagnético** e determinar as suas propriedades. O valor máximo dos campos determina a intensidade, mas não a classificação no espectro.

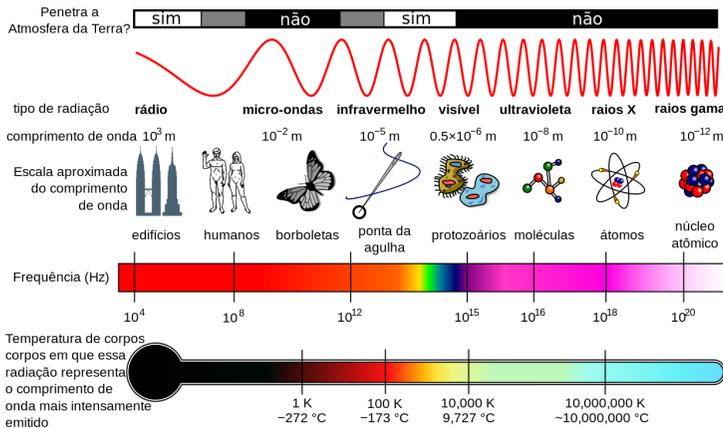
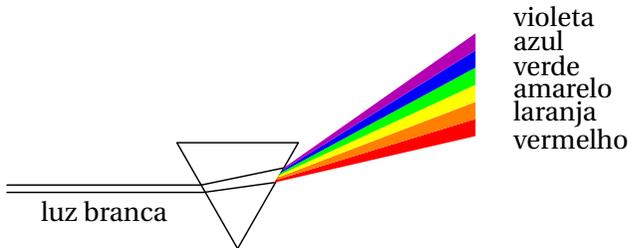


Figura 12.8.: Espectro eletromagnético.

Em princípio, podem existir ondas eletromagnéticas com qualquer valor de  $\lambda$  entre 0 e  $\infty$ . Alguns exemplos de ondas eletromagnéticas são as ondas de rádio e de comunicações móveis, as ondas usadas num forno

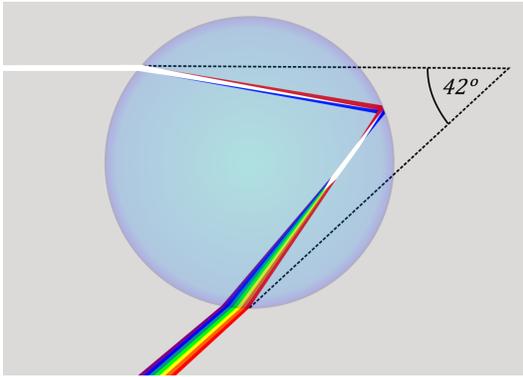
de microondas para aquecer os alimentos e a luz visível. O que distingue entre essas ondas é a frequência respectiva, ou de forma equivalente, o comprimento de onda. A figura 12.8 mostra o espectro eletromagnético identificando algumas das ondas comuns.

Usualmente, a radiação eletromagnética produzida por um sistema não tem uma frequência única  $f$ , como no caso das ondas harmônicas, mas é uma sobreposição de ondas harmônicas com uma distribuição de frequências. Por exemplo, a luz solar tem um espectro contínuo de frequências na banda visível; a mistura das várias cores faz parecer a luz branca mas fazendo passar essa luz através de um prisma (figura 12.9), consegue-se ver o espectro das várias cores (diferentes frequências).



**Figura 12.9.:** Dispersão da luz num prisma.

Dentro de um meio diferente do vácuo, a constante de Coulomb  $k$  na equação 12.13 deve ser dividida pela constante dielétrica  $K$  do meio. Isso conduz a uma velocidade da luz menor do que no vácuo. A constante dielétrica é maior quanto maior a frequência; como tal, a cor que se propaga mais lentamente no prisma (violeta) sofre um maior desvio, como mostra a figura 12.9. O arco-íris é outra manifestação desse mesmo fenômeno (**dispersão** da luz). A luz do Sol atravessa gotas de água nas nuvens e é refletida, como se mostra na figura 12.10; se não houvesse dispersão, veríamos um ponto de luz intensa, refletida, na direção oposta a onde está o Sol. A dispersão da luz dentro das gotas de água faz com que esse ponto de luz refletida se torne num anel, com um ângulo de aproximadamente  $42^\circ$ , à volta desse ponto. Como a dispersão das diferentes cores é diferente, em vez de um anel são criados vários anéis. A cor que sofre maior dispersão (violeta) acaba por ficar no anel mais próximo do centro, porque a reflexão na superfície interna da gota inverte a ordem das cores.



**Figura 12.10.:** Dispersão e reflexão da luz numa gota de água.

## 12.7. Teoria ondulatória da luz

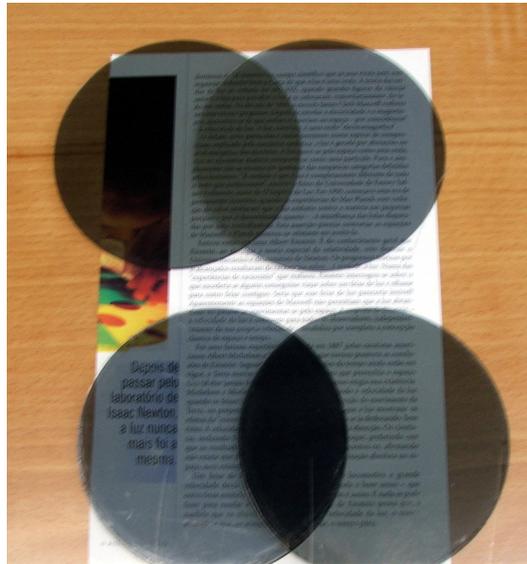
Existem vários fenômenos que corroboram que a luz é uma onda; por exemplo, a interferência, difração e polarização. Alguns cristais têm a propriedade de polarizar a luz: só deixam passar uma parte da luz incidente. Colocando um segundo filtro polarizador a seguir ao primeiro e rodando um dos filtros, existe uma posição para a qual não passa nenhuma luz (figura 12.11).

Observando com um filtro polarizador a luz refletida numa superfície e rodando o filtro, existe uma posição em que não se consegue ver a luz refletida.

Normalmente a luz é uma sobreposição de ondas com campos que oscilam em diferentes direções. Num filtro polarizador as moléculas estão orientadas numa direção determinada, o eixo do polarizador, e só deixam passar a luz polarizada nessa direção (direção do campo elétrico).

A luz refletida numa superfície é polarizada na direção tangente à superfície. Um filtro polarizador com o seu eixo perpendicular a essa superfície não deixa passar nenhuma luz. Uma forma de saber se as lentes nuns óculos de sol estão polarizadas ou não, consiste em olhar para um reflexo e rodar a lente; se estiver polarizada, deverá existir um ângulo em que os reflexos desaparecem.

Os cristais líquidos têm a propriedade de orientar as suas moléculas numa direção, quando são atravessados pela corrente elétrica, tornando-se polarizadores. Esse é o princípio usado nos ecrãs LCD (*Liquid Crystal Display*)



**Figura 12.11.:** Dois filtros polarizadores com os eixos paralelos (acima) e com os eixos perpendiculares (abaixo).

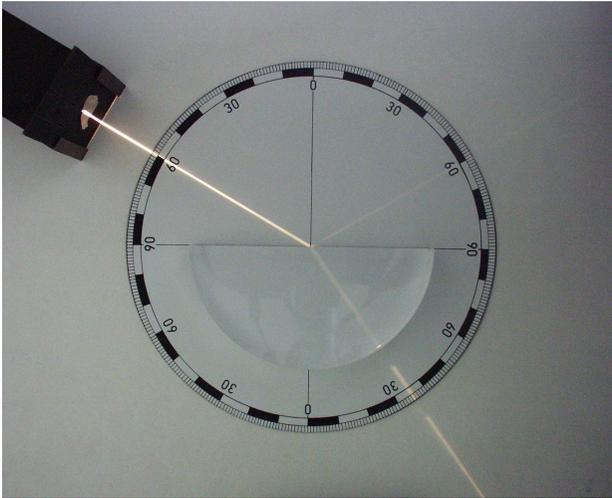
de calculadoras, telemóveis e televisores. A luz que sai do ecrã é polarizada com um filtro polarizador e a seguir, passa por pontos onde existem vários cristais líquidos, com correntes elétricas consegue-se controlar os pontos onde os cristais são polarizados perpendicularmente ao primeiro polarizador, impedindo a luz de passar.

## 12.8. Teoria corpuscular da luz

Antes de Maxwell ter proposto que a luz é uma onda eletromagnética, na década de 1860, havia um debate agitado na comunidade científica, entre os que defendiam a teoria corpuscular proposta e os que defendiam a teoria ondulatória da luz. Newton no século XVII, acreditava na teoria corpuscular e o seu contemporâneo Huygens (1629–1695) defendia a teoria ondulatória.

A figura 12.12 mostra um raio de luz que sai de uma fonte de luz e incide na superfície de um semicírculo de vidro. O ângulo que o raio incidente faz com a perpendicular à superfície do vidro é de  $60^\circ$ ; o raio incidente separa-se num raio refletido que também faz um ângulo de  $60^\circ$  com a

perpendicular à superfície e um raio refratado que entra no vidro e faz um ângulo de  $35^\circ$  com a perpendicular.



**Figura 12.12.:** Raios de luz incidente (esquerda acima), refletido (direita acima) e refratado (abaixo) num semicírculo de vidro.

Segundo a teoria corpuscular, a luz é formada por pequenas partículas que saem da fonte e se deslocam em linha reta. Assim explica-se facilmente a existência de raios de luz, que se deslocam em linha reta. A teoria corpuscular explica com sucesso a igualdade dos ângulos dos raios incidente e refletido com a perpendicular à superfície porque é o mesmo que acontece quando são disparadas partículas contra uma superfície rígida. Consegue também explicar a diferença entre os ângulos dos raios incidentes e refratado com a perpendicular, admitindo que os corpúsculos de luz se deslocam com velocidade diferente no ar e no vidro.

A teoria ondulatória da luz também consegue explicar a criação de feixes de luz, embora o argumento não seja tão intuitivo como no caso da teoria corpuscular. As ondas também verificam as leis da reflexão e da refração, mas no caso da refração há uma diferença importante entre as previsões das duas teorias. Quando a luz passa do ar para o vidro, como na figura 12.12, o ângulo do raio refratado com a perpendicular é menor que o ângulo entre o raio incidente e a normal. Segundo a teoria corpuscular, isso implica velocidade da luz maior no vidro do que no ar, enquanto que na teoria ondulatória implica velocidade das ondas de luz menor no vidro

do que no ar.

Na época de Newton e Huygens não era fácil medir a diferença da velocidade da luz no vidro e no ar e o prestígio de Newton fez com que fosse dada maior credibilidade à teoria corpuscular do que à teoria ondulatória. Hoje em dia sabe-se que a velocidade da luz no vidro é de facto menor do que no ar, como prevê a teoria ondulatória. A teoria eletromagnética de Maxwell acabou com o debate, ficando estabelecido, sem lugar a dúvida, que a luz é uma onda eletromagnética.

No entanto, no fim do século XIX foi descoberto o **efeito fotoelétrico**, que não pode ser explicado com a teoria ondulatória. Einstein explicou esse efeito em 1905, através da teoria dos fotões: a luz é formada por partículas designadas de **fotões**. Cada fotão transporta uma energia igual a:

$$U = h f \quad (12.35)$$

em que  $f$  é a frequência da luz associada ao fotão e  $h$  é a constante de Planck:

$$h = 6.626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \quad (12.36)$$

Ou seja, a energia de uma onda eletromagnética não pode ter um valor qualquer, mas apenas múltiplos inteiros do **quantum** de energia  $h f$ , já que o número de fotões tem de ser um número inteiro.

Numa onda clássica, a energia pode ser absorvida de forma contínua; nomeadamente, a onda pode transferir qualquer parte da sua energia a um sistema. No caso de uma onda quântica, como as ondas eletromagnéticas, a transferência de energia a um sistema só pode ser feita por absorção de alguns fotões; a energia transferida é a soma das energias desses fotões e, portanto, deve ser um múltiplo inteiro do quantum de energia  $h f$ .

Hoje em dia acredita-se que os fotões ou qualquer outra partícula têm também uma natureza ondulatória. A energia de um fotão e das outras partículas é produzida ou absorvida em quantidades discretas, mas é transportada de um ponto para outro na forma de uma onda. Todas as formas de matéria e energia apresentam propriedades de onda e de partícula. Esse fenómeno, designado de **dualidade onda-partícula**, é a base da física quântica.

## 12.9. Díodos emissores de luz (LED)

Os **díodos emissores de luz** (LED) são dispositivos com um cátodo e um ânodo, identificados como mostra a figura 12.13. Ligando uma diferença de potencial superior a um valor mínimo, com o ânodo a maior potencial que o cátodo, o LED produz luz monocromática. A imagem de abertura deste capítulo mostra vários tipos de LED. Quando o potencial do ânodo for menor que o potencial do cátodo, o LED não deixa passar corrente e não acende.



**Figura 12.13.:** LED e diagrama de circuito correspondente. O cátodo costuma ser um fio mais curto e estar perto de uma zona onde a cobertura plástica é plana.

A energia elétrica que os portadores de carga perdem na passagem da interface entre os dois semicondutores é transformada em luz. Essa energia corresponde à diferença entre dois níveis de energia no semicondutor e tem um valor específico próprio dos semicondutores usados no LED.

Como se viu, a energia que transporta cada fóton é dada pela equação 12.35 como tal, os fótons emitidos no LED têm todos aproximadamente a mesma frequência, igual à diferença entre os níveis de energia dos elétrons nos dois eletrodos do LED, dividida pela constante de Planck; isso implica que a luz do LED é monocromática. Assim, a cor da luz emitida pelo LED depende do semicondutor usado. A tabela 12.1 mostra as cores próprias de alguns semicondutores.

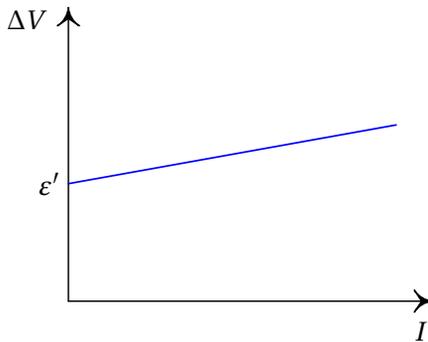
Quando circula corrente pelo LED, cada carga de condução que atravessa a interface no LED perde a energia correspondente à de um fóton. Assim, a curva característica do LED é semelhante à característica de um recetor, com ordenada na origem positiva, e declive constante positivo (figura 12.14).

A força contra-eletromotriz do LED,  $\mathcal{E}'$  (ordenada na origem da característica tensão-corrente), é a energia por unidade de carga, que as cargas de condução perdem na passagem pelo LED e é convertida em luz.

Assim, a energia que cada elétron perde quando atravessa a interface entre os dois semicondutores é igual a:  $e\mathcal{E}'$ . Essa energia é a energia do fóton que

**Tabela 12.1.:** Cores associadas a alguns semicondutores usados atualmente.

Semicondutor	Cor da luz	$\lambda$
Arsenieto de gálio e alumínio	Infravermelha	880 nm
Arsenieto de gálio e alumínio	Vermelha	645 nm
Fosfato de alumínio, índio e gálio	Amarela	595 nm
Fosfato de gálio	Verde	565 nm
Nitreto de gálio	Azul	430 nm

**Figura 12.14.:** Característica tensão-corrente de um LED.

é emitido:

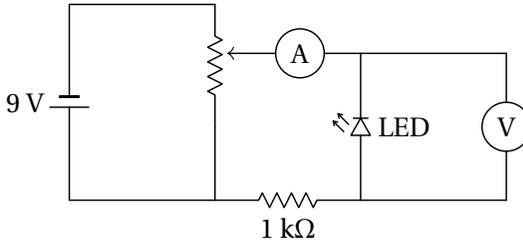
$$e\varepsilon' = hf = \frac{hc}{\lambda} \quad (12.37)$$

onde  $c$  é a velocidade da luz e  $\lambda$  é o comprimento de onda da luz emitida.

Resolvendo a equação 12.37 em ordem a  $h$  obtém-se:

$$h = \frac{e\varepsilon'\lambda}{c} \quad (12.38)$$

Esta equação é útil para medir experimentalmente o valor da constante de Planck, a partir da característica tensão-corrente de um LED usando a montagem experimental apresentada na figura 12.15, por exemplo.



**Figura 12.15.:** Circuito usado para determinar a característica de um LED.

A resistência de  $1\text{ k}\Omega$  é usada para evitar que a corrente no LED ultrapasse alguns miliampere e não queime o LED; se o LED estiver ligado no sentido correto, deve produzir luz. Com os valores medidos da diferença de potencial em função da corrente traça-se a curva característica do LED, que pode ser ajustada por uma reta. A ordenada na origem dessa reta ( $\epsilon'$ ) e o valor do comprimento de onda próprio do LED (tabela 12.1) permitem obter o valor da constante de Planck a partir da equação 12.38.

## Perguntas

- Qual das afirmações é verdadeira para uma onda eletromagnética no vácuo? Quanto menor for o período:
  - Menor é o comprimento de onda.
  - Maior é a velocidade.
  - Menor é a amplitude.
  - Maior é a amplitude.
  - Nenhuma das outras respostas.
- Qual dos seguintes fenômenos é uma prova a favor da teoria ondulatória da luz, contra a teoria corpuscular?
 

A. Refração da luz.	D. Polarização da luz.
B. Efeito fotoelétrico.	E. O arco íris.
C. Reflexão da luz.	

3. Uma onda eletromagnética harmônica tem frequência de 2.0 GHz. Calcule o comprimento de onda.
- A. 30 m  
B. 15 cm  
C. 6.67 m  
D. 150 m  
E. 3.0 m
4. Que tipo de radiação é uma onda eletromagnética com comprimento de onda de 1 cm?
- A. Luz visível.  
B. Raios gama.  
C. Onda de rádio.  
D. Microonda.  
E. Raios X.
5. Uma onda eletromagnética propaga-se no sentido positivo do eixo dos  $z$ . Num certo ponto e num certo instante, o campo elétrico da onda aponta na direção e sentido positivo do eixo dos  $y$ . Em que direção e sentido aponta o campo magnético nesse mesmo ponto e no mesmo instante?
- A. No sentido positivo do eixo dos  $y$ .  
B. No sentido negativo do eixo dos  $y$ .  
C. No sentido positivo do eixo dos  $x$ .  
D. No sentido negativo do eixo dos  $x$ .  
E. No sentido negativo do eixo dos  $z$ .

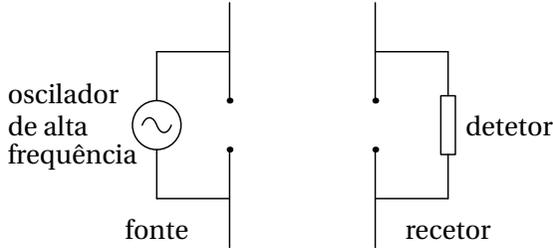
## Problemas

1. Uma onda eletromagnética propaga-se no vácuo, no sentido positivo do eixo dos  $x$ . No instante  $t = 0$ , o campo elétrico em função de  $x$  é dado pela função (unidades SI)

$$E = \frac{50}{x^2 + 2}$$

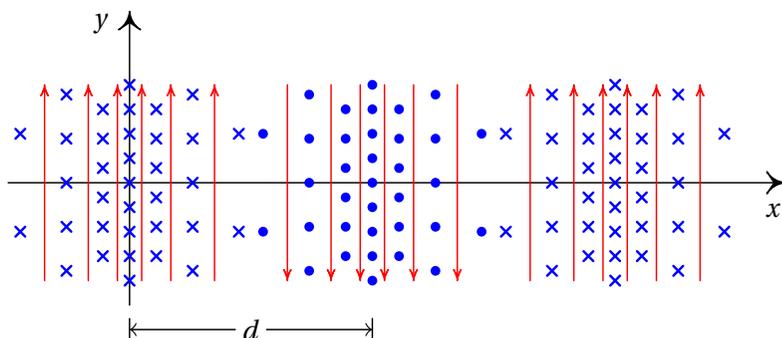
Calcule o campo no ponto  $x = 50$  m, no instante  $t = 0.2 \mu\text{s}$ .

2. Em 1886 Heinrich Hertz conseguiu produzir e detectar ondas de rádio, pela primeira vez, com o aparelho no diagrama. Hertz observou que não se detetava nenhuma onda quando se colocava uma placa metálica entre a fonte e o recetor; explique porque. Também descobriu que não era detetada nenhuma onda se o recetor fosse rodado  $90^\circ$  em relação à linha que une a fonte e o recetor; explique porquê.



3. Considere uma onda eletromagnética plana, polarizada na direção do eixo dos  $x$ , que se propaga no vácuo na direção positiva do eixo dos  $y$ , com frequência de 12 MHz e amplitude  $E_{\text{máx}} = 0.008 \text{ V/m}$ . (a) calcule o período e o comprimento de onda. (b) Escreva uma expressão para  $\vec{E}(t)$  e para  $\vec{B}(t)$ .
4. Uma onda eletromagnética plana propaga-se no vácuo no sentido negativo do eixo dos  $x$ . Num dado instante  $t = 0$  o campo elétrico é  $\vec{E} = E_{\text{máx}} \sin(2.25 \times 10^7 x) \hat{k}$ , com  $x$  em metros. (a) Calcule o comprimento de onda. (b) Calcule a frequência. (c) Diga qual é a direção de polarização da onda.
5. Uma lâmina metálica muito extensa encontra-se sobre o plano  $Oxy$ . A lâmina é ligada a uma fonte variável que produz um campo elétrico uniforme no plano  $Oxy$ , mas variável no tempo segundo a equação:  $\vec{E} = E_{\text{máx}} \sin(\omega t) \hat{i}$ , onde  $E_{\text{máx}}$  e  $\omega$  são constantes. O campo elétrico na lâmina origina uma onda eletromagnética plana. Escreva as funções que representam os campos elétrico e magnético dessa onda, em função do tempo e da posição.
6. Usando a equação 12.17, demonstre que se o campo elétrico for  $E = f(y + ct)$ , o campo magnético é  $B = -f'(y + ct)/c$  e se o campo elétrico for  $E = g(y - ct)$ , o campo magnético é  $B = g'(y - ct)/c$ .
7. A figura representa o campo eletromagnético de uma onda plana de 420 MHz, no instante  $t = 0$ . As linhas de campo verticais representam o campo elétrico e as linhas perpendiculares à folha de papel são as linhas do campo magnético. Calcule a distância  $d$  e escreva o vetor do

campo magnético em função do tempo e da coordenada  $x$ .



8. Calcule a energia, em joules e em elétron-volts, dos fótons na luz laranja, com comprimento de onda de 616 nm.
9. Determine o comprimento de onda de um fóton com energia igual a 2.00 eV. A que tipo de radiação corresponde esse fóton?

## Respostas

**Perguntas:** 1. A. 2. D. 3. B. 4. D. 5. D.

### Problemas

1. 490 mV/m.
2. O campo elétrico na placa metálica é nulo, o que implica que as ondas não passam de um lado para o outro. O recetor só deteta ondas polarizadas na direção da linha entre as duas esferas no detetor; as ondas produzidas pela fonte estão polarizadas na direção da linha entre as duas esferas na fonte.
3. (a)  $P = 83.33$  ns,  $\lambda = 25$  m  
 (b)  $\vec{E} = 0.008 \cos(0.2513 y - 75.40 \times 10^6 t + \varphi) \hat{i}$   
 $\vec{B} = -2.67 \times 10^{-11} \cos(0.2513 y - 75.40 \times 10^6 t + \varphi) \hat{k}$ .
4. (a) 279 nm. (b)  $1.074 \times 10^{15}$  Hz. (c) O eixo dos  $z$
5. As expressões dos campos são:

$$\vec{E} = \begin{cases} E_{\text{máx}} \sin(\omega t - \frac{\omega}{c} z) \hat{i}, & z \geq 0 \\ E_{\text{máx}} \sin(\omega t + \frac{\omega}{c} z) \hat{i}, & z \leq 0 \end{cases}$$

$$\vec{B} = \begin{cases} \frac{E_{\text{máx}}}{c} \sin(\omega t - \frac{\omega}{c} z) \hat{j}, & z \geq 0 \\ -\frac{E_{\text{máx}}}{c} \sin(\omega t + \frac{\omega}{c} z) \hat{j}, & z \leq 0 \end{cases}$$

6. A derivada de  $f(y + ct)$  em ordem a  $t$  é  $c f'(y + ct)$ . Substituindo na equação 12.17 conclui-se que a derivada de  $B$  é função de  $y$  e igual a  $-f'(y + ct)/c$ . Como a derivada de  $f(y + ct)$  em ordem a  $y$  é  $f'(y + ct)$ , então  $B$  é igual a  $-f(y + ct)/c$ .

A derivada de  $g(y - ct)$  em ordem a  $t$  é  $-c g'(y - ct)$ . Substituindo na equação 12.17 conclui-se que a derivada de  $B$  em ordem a  $y$  é igual a  $g'(y - ct)/c$ . Como a derivada de  $g(y - ct)$  em ordem a  $y$  é  $g'(y - ct)$ , então  $B$  é igual a  $g(y - ct)/c$ .

7.  $d = 35.7$  cm,  $\vec{B} = -B_{\text{máx}} \cos(2\pi(4.2 \times 10^8 t + 1.40 x)) \hat{k}$  ( $t$  em segundos,  $x$  em metros)
8.  $3.23 \times 10^{-19}$  J, 2.02 eV.
9. 620 nm. Trata-se de luz visível de cor laranja-vermelha.