POTENCIAL DE DISTRIBUIÇÕES SIMÉTRICAS DE CARGA

Exemplo. Esfera de raio R e carga Q, distribuída uniformemente dentro do seu volume.
(problema 5 do capítulo)

ρ = constante $\Rightarrow$ simetria esférica

$$\Rightarrow E(r) = \begin{cases} \left(\dfrac{kQ}{R^3}\right) r & , r \le R \quad \text{(dentro)} \\ \dfrac{kQ}{r^2} & , r \ge R \quad \text{(fora)} \end{cases}$$

$$V_\infty = 0 \quad \Rightarrow \quad V(r) = -\int_\infty^r E(r)\, dr$$

ⓐ $r \ge R$

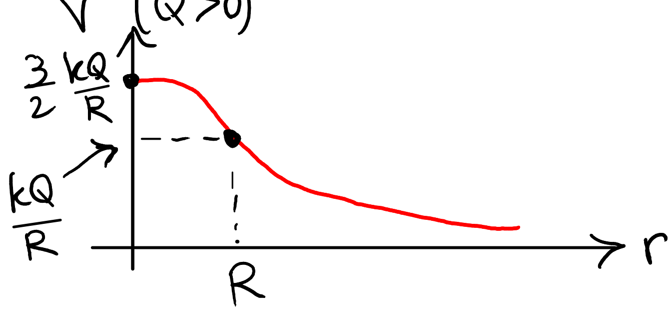
$$\Rightarrow V(r) = -\int_\infty^r \frac{kQ}{r^2} dr = kQ \left(\frac{1}{r}\right)_\infty^r = \frac{kQ}{r}$$

ⓑ $r \le R$

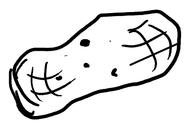
$$\Rightarrow V(r) = -\int_\infty^R E\, dr - \int_R^r E\, dr = -kQ \int_\infty^R \frac{dr}{r^2} - \left(\frac{kQ}{R^3}\right) \int_R^r r\, dr$$

$$= \frac{kQ}{R} + \frac{kQ}{2R^3}\left(R^2 - r^2\right) = \frac{3kQ}{2R} - \frac{kQ}{2R^3} r^2$$

$$V(r) = \begin{cases} \dfrac{kQ}{r} & , r \ge R \quad \text{(fora)} \\ \dfrac{kQ}{R}\left(\dfrac{3}{2} - \dfrac{r^2}{2R^2}\right) & r \le R \quad \text{(dentro)} \end{cases}$$



CONDUTORES EM EQUILÍBRIO ELETROSTÁTICO



condutor isolado
com carga Q

① $\vec{E}=\vec{0}$ no interior do condutor

② $V_1 - V_2 = -\int_2^1 \vec{E}\cdot d\vec{r}$ se 1 e 2 estiverem dentro do condutor, $\vec{E}=\vec{0}$ no integral

$\Rightarrow V_1 - V_2 = 0$

V tem valor constante en todo o condutor

③ $q_{int} = \dfrac{\Psi_s}{4\pi k}$ numa região dentro do condutor,

$\Psi_s = 0 \quad (\vec{E}=\vec{0}) \quad \Rightarrow q_{int} = 0$

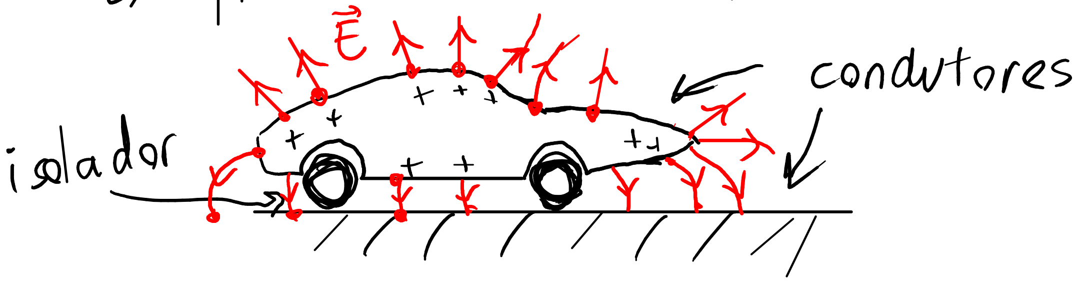
existe carga unicamente na superfície do condutor

$\sigma_{superfície}$ = carga superficial $\left(Q = \iint_{sup.} \sigma\, dA\right)$

④ 2 implica → a superfície do condutor é superfície equipotencial

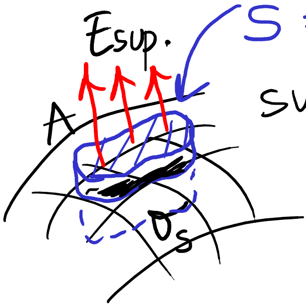
$\Rightarrow$ o campo $\vec{E}$ é perpendicular à superfície do condutor

Exemplo: automóvel = condutor isolado



(5)

S = cilindro ⊥ à superfície (infitesimal)



$$\begin{cases} \Psi_s = E_{sup} A \\ \Psi_s = 4\pi k\, q_{int} \end{cases}$$

carga na área A $= \sigma_s A$

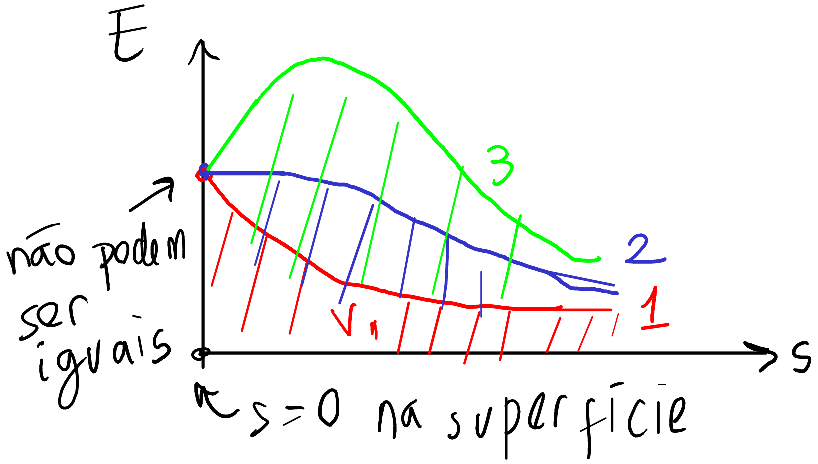
$$E_s A = 4\pi k (\sigma_s A) \implies \boxed{\sigma_s = \frac{E_s}{4\pi k}}$$

(6)

1 → convexo

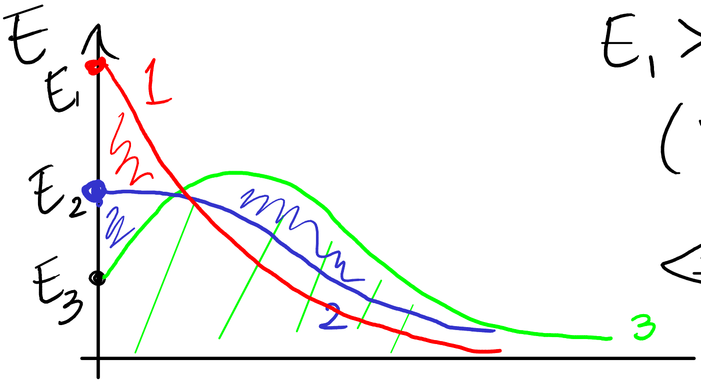
2 → plano

3 → côncavo



V_1 = integral de E desde infinito até a sup. do condutor

$\implies V_1 = V_s$ e $V_2 = V_s$ e $V_3 = V_s$



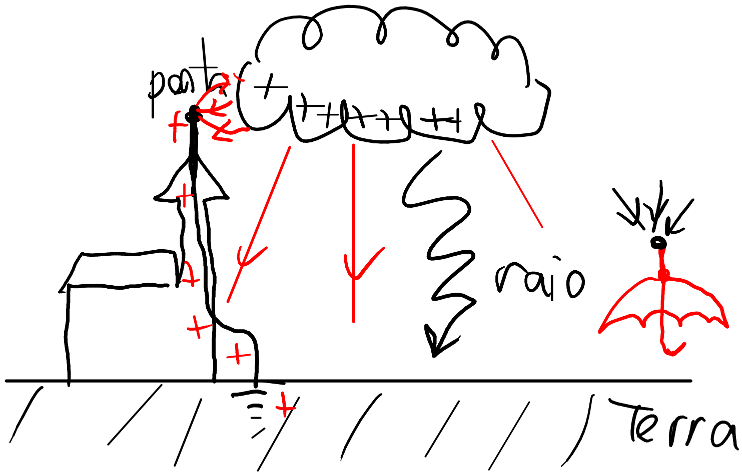
$E_1 > E_2 > E_3$

$(V_1 = V_2 = V_3 = V_s)$

$\iff \sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$

Maior acumulação de carga nas regiões convexas.
(menor nas regiões côncavas) (poder das pontas)

pára-raios



PONTOS DE EQUILÍBRIO DO CAMPO $\vec{E}$
$(\vec{E}=\vec{0})$

matriz jacobiana de $\vec{E}(x,y,z) = E_x\hat{i}+E_y\hat{j}+E_z\hat{k}$

$$J(\vec{E}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial E_x}{\partial x} & \frac{\partial E_x}{\partial y} & \frac{\partial E_x}{\partial z} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} & \frac{\partial E_y}{\partial y} & \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial E_z}{\partial x} & \frac{\partial E_z}{\partial y} & \frac{\partial E_z}{\partial z} \end{bmatrix} = \text{matriz simétrica}$$

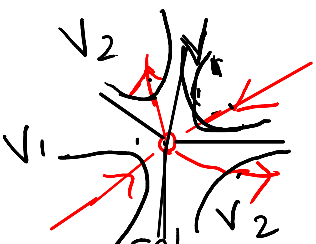
$\Downarrow$

valores próprios reais

$\Downarrow$

ponto de equil.
$\vec{E}=0$

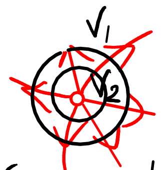
- carga nula $\rightarrow$ ponto de sela $(\lambda_1=-\lambda_2)$
- carga positivo $\rightarrow$ nó repulsivo $(\lambda_i>0)$
- carga negativo $\rightarrow$ nó atrativo $(\lambda_i<0)$



sela

$q=0$

$V_1>V_2$

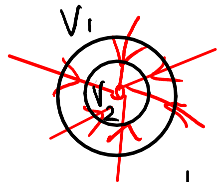


nó repulsivo

$V_1<V_2$

máximo local

$q>0$



nó atrativo

$V_1>V_2$

mínimo local

$q<0$

$$\mathbb{J}(\vec{E}) = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} & -\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} & -\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} \\ -\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} & -\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} & -\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} \\ -\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} & -\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} & -\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \end{bmatrix} = -\text{ matriz Hessiana de } V(x,y,z)$$

pontos de equilíbrio $\rightarrow$ $\vec{E} = \vec{0}$, $E_x = E_y = E_z = 0$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial z} = 0$$

$\rightarrow$ pontos críticos de $V(x,y,z)$

máximo

λ_i positivos

(valores próprios da hessiana < 0)

mínimo

λ_i negativos

ponto de sela

λ_i positivos e negativos