Eletricidade, Magnetismo e Circuitos
Problemas adicionais

Jaime E. Villate
Faculdade de Engenharia
Universidade do Porto

Setembro de 2021

1 Campo elétrico

Problema 1
Um protão (massa 1.67×10^{-27} kg) passa pela origem, em $t = 0$, com velocidade $(3\,\hat{\imath} + 2\,\hat{\jmath})$ Mm/s, dentro de uma região onde há vácuo e campo elétrico uniforme, $\vec{E} = E\,\hat{\jmath}$. Determine o valor que deverá ter E para que o protão atravesse o eixo dos x em $x = 85$ cm. (O peso do protão pode ser desprezado neste caso).

A força elétrica sobre o protão e a sua aceleração, ambas constantes, são:

$$\vec{F} = e\,E\,\hat{\jmath} \qquad\qquad \vec{a} = \frac{e\,E}{m}\,\hat{\jmath}$$

As duas componentes da equação de movimento são (unidades SI):

$$\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = 0 \qquad\qquad \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = 9.593 \times 10^{7}\,E$$

A primeira equação implica que v_x permanece constante, ou seja, igual à componente x da velocidade inicial: $v_x = 3$ Mm/s. Como a projeção y do movimento é com aceleração constante, a trajetória será uma parábola no plano xy, com eixo paralelo ao eixo y, tal como no caso do lançamento de um projétil. .

O tempo que o protão demora até atravessar o eixo dos x, em $x = 85$ cm é:

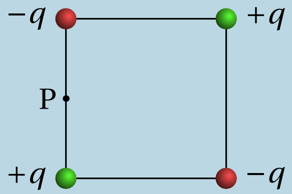
$$\Delta t = \frac{0.85}{3 \times 10^{6}} = 2.833 \times 10^{-7}\ \mathrm{s}$$

A trajetória parabólica implica que quando o protão atravessar novamente o eixo dos x terá componente v_y da velocidade com o mesmo valor absoluto do seu valor inicial, mas com sinal negativo, ou seja, $v_y = -2$ Mm/s. Separando variáveis e integrando a segunda equação de movimento, obtém-se:

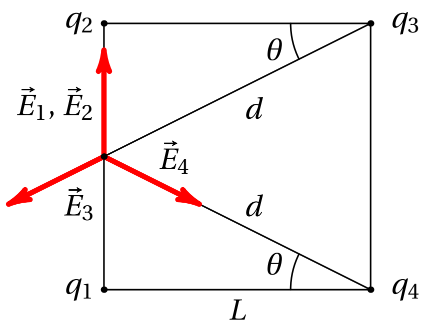
$$\int\limits_{2\times10^{6}}^{-2\times10^{6}} \mathrm{d}v_y = 9.593 \times 10^{7}\,E \int\limits_{0}^{2.833\times10^{-7}} \mathrm{d}t \quad\Longrightarrow\quad E = -\frac{4 \times 10^{6}}{9.593 \times 10^{7} \times 2.833 \times 10^{-7}}$$

O resultado é $E = -1.47 \times 10^{5}$ N/C.

Problema 2
Quatro cargas com valores $+q$ e $-q$ ($q > 0$), encontram-se nos vértices dum quadrado de aresta L. Determine a expressão do campo elétrico $\vec{E}$, no ponto P (no meio da aresta do lado esquerdo), em função de q, L e a constante de Coulomb, k.



Na figura seguinte, as quatro cargas pontuais, designadas de q_1, q_2, q_3 e q_4, produzem os quatro campos $\vec{E}_1$, $\vec{E}_2$, $\vec{E}_3$ e $\vec{E}_4$ nas direções indicadas.



Os módulos desses quatro campos determinam-se a partir da Lei de Coulomb:

$$E_1 = E_2 = \frac{k\,q}{(L/2)^2} = \frac{4\,k\,q}{L^2}$$
$$E_3 = E_4 = \frac{k\,q}{d^2} = \frac{k\,q}{L^2 + (L/2)^2} = \frac{4\,k\,q}{5\,L^2}$$

O campo total no ponto P é a soma vetorial dos quatro campos que, usando eixo dos x na direção de $\overline{q_1\,q_4}$ e eixo dos y na direção de $\overline{q_1\,q_2}$ na figura anterior, será:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= (E_1 + E_2)\,\hat{\jmath} + E_3\left(-\cos\theta\,\hat{\imath} + \sin\theta\,\hat{\jmath}\right) + E_4\left(\cos\theta\,\hat{\imath} + \sin\theta\,\hat{\jmath}\right)\\ &= 2\,E_1\,\hat{\jmath} - 2\,E_3\,\sin\theta\,\hat{\jmath}\end{aligned}$$

A partir da figura observa-se que

$$\sin\theta = \frac{L}{2\,d} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

substituindo esse valor e as expressões de E_1 e E_3 obtém-se:

$$\vec{E} = \frac{8\,k\,q}{L^2}\left(1 - \frac{1}{5\sqrt{5}}\right)\hat{\jmath} = \frac{8\,k\,q}{25\,L^2}\left(25 - \sqrt{5}\right)\hat{\jmath}$$

2 Voltagem e corrente

Problema 3
Uma partícula pontual com massa de 1.5 µg e carga de 12 nC encontra-se numa região onde existe vácuo e campo elétrico constante, com módulo 2.3 kV/m e direção e sentido do eixo dos x. Se num instante inicial a partícula estiver em repouso em $x = -3$ cm. Determine com que velocidade passará pela posição $x = 3$ cm.

A diferença de potencial entre as posições $x = -3$ cm e $x = 3$ cm, em unidades SI, é:

$$\Delta V = V(0.03) - V(-0.03) = -\int\limits_{-0.03}^{0.03} \vec{E}\cdot(\hat{\imath}\,\mathrm{d}x) = -\int\limits_{-0.03}^{0.03} 2300\,\mathrm{d}x = -138\,\mathrm{V}$$

a variação da energia potencial elétrica da partícula durante o percurso é:

$$\Delta U = q\,\Delta V = -1.656\times 10^{-6}\,\mathrm{J}$$

O sinal negativo indica que a partícula perde energia potencial e, como no vácuo não há forças dissipativas, a energia mecânica conserva-se e a diminuição da energia potencial será igual ao aumento da energia cinética:

$$\frac{1}{2}m\,v^2 = \frac{1.5\times 10^{-9}}{2}v^2 = 138 \quad\Longrightarrow\quad v = 46.99\,\mathrm{m/s}$$

Comentário: Observe-se que a aceleração da partícula é constante e com módulo:

$$a = \frac{q\,E}{m} = 18400\,\mathrm{m/s^2}$$

e o tempo que demora o percurso é:

$$\Delta t = \frac{\Delta v}{a} = 2.5\,\text{ms}$$

A distância que a partícula cai, pelo efeito da gravidade, durante esse intervalo é desprezável comparada com os 6 cm que percorre. Como tal, não é necessário saber qual é a posição do eixo x referido em relação ao plano horizontal.

Problema 4
Determine o trabalho realizado por uma pilha de 9 V, que fornece uma corrente de 235 mA durante 5 minutos.

A potência fornecida pela pilha é:

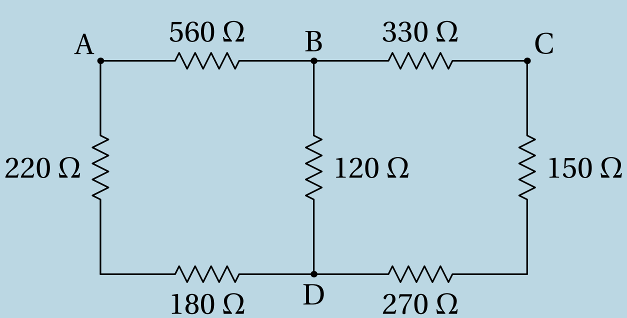
$$P = \varepsilon\, I = 9 \times 235 \times 10^{-3} = 2.115\,\text{W}$$

e o trabalho realizado é igual à energia fornecida durante os 5 minutos:

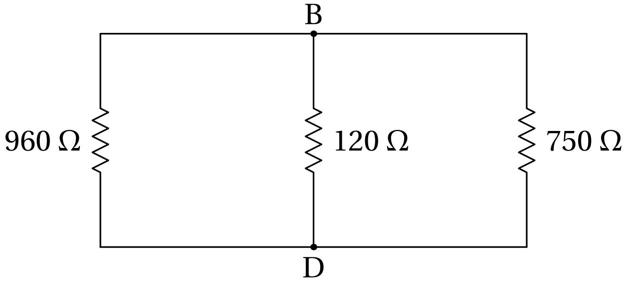
$$W = \Delta U = P\,\Delta t = 2.115 \times 5 \times 60 = 634.5\,\text{J}$$

3 Resistência

Problema 5
No circuito da figura, determine a resistência equivalente (*a*) entre B e D, (*b*) entre A e B, e (*c*) entre A e D



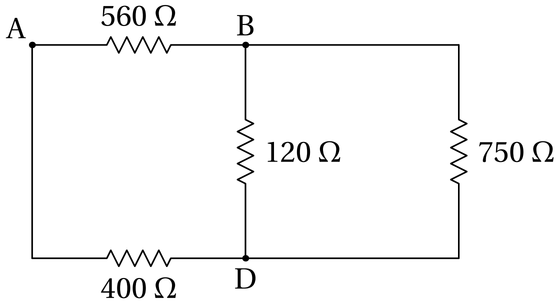
(a) Para determinar a resistência entre B e D, admitimos que há um medidor de resistências ligado nesses pontos, mas não há nada ligado nos pontos A e C. Como tal, as correntes nas resistências de 560 Ω, 220 Ω e 180 Ω são iguais e, como tal, essas 3 resistências estão em série, podendo ser substituídas por uma única resistência de 960 Ω. De forma análoga, as correntes nas resistências de 330 Ω, 150 Ω e 270 Ω são iguais e, podendo ser substituídas por uma única resistência de 750 Ω. Com essas duas substituições obtém-se o seguinte circuito equivalente:



Cada uma das três resistências nesse circuito está ligada entre os pontos B e D. Como tal, as três resistências estão em paralelo e a resistência equivalente entre B e D é:

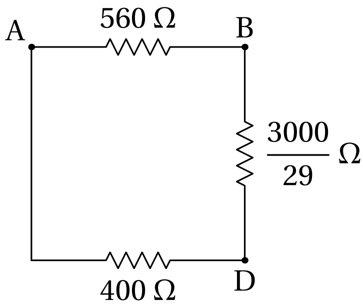
$$R = \left(\frac{1}{960} + \frac{1}{120} + \frac{1}{750}\right)^{-1} = 93.39\ \Omega$$

(b) Para determinar a resistência entre A e B, as resistências de 220 Ω e 180 Ω estão em série (equivalente a 400 Ω), mas não estão em série com a de 560 Ω, porque em A entra ou sai corrente para o medidor de resistência. As resistências de 330 Ω, 150 Ω e 270 Ω também estão em série, porque não há nada ligado em C, sendo equivalentes a uma única resistência de 750 Ω:

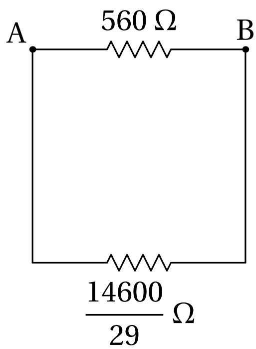


As resistências de 120 Ω e 750 Ω, que estão em paralelo, podem ser substituídas pela resistência equivalente,

$$\left(\frac{1}{120}+\frac{1}{750}\right)^{-1}=\frac{120\times 750}{120+750}=\frac{3000}{29}\ \Omega$$



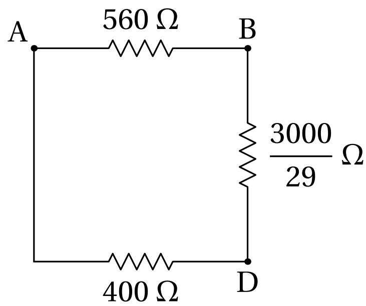
As resistências de 400 Ω e 3000/29 Ω, em série porque não há nada ligado em D, são equivalentes a 14600/29 Ω



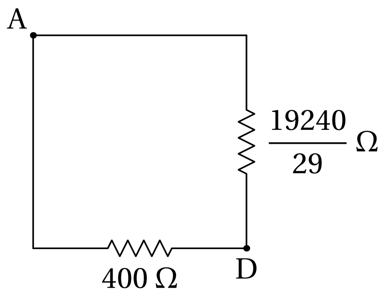
E essas duas resistências estão em paralelo, sendo a resistência equivalente entre A e B igual a:

$$R=\left(\frac{1}{560}+\frac{29}{14600}\right)^{-1}=265.1\ \Omega$$

(*c*) Para determinar a resistência equivalente entre A e D, podem-se usar os mesmos dois primeiros passos da alínea anterior, conduzindo ao circuito equivalente:



As resistências de 560 Ω e 3000/29 Ω, em série porque não há nada ligado em B, são equivalentes a 19240/29 Ω



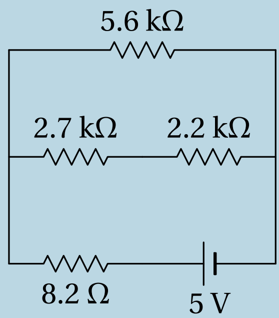
Finalmente, essas duas resistências estão em paralelo e a resistência equivalente entre A e D é:

$$R = \left(\frac{1}{400} + \frac{29}{19240}\right)^{-1} = 249.5\ \Omega$$

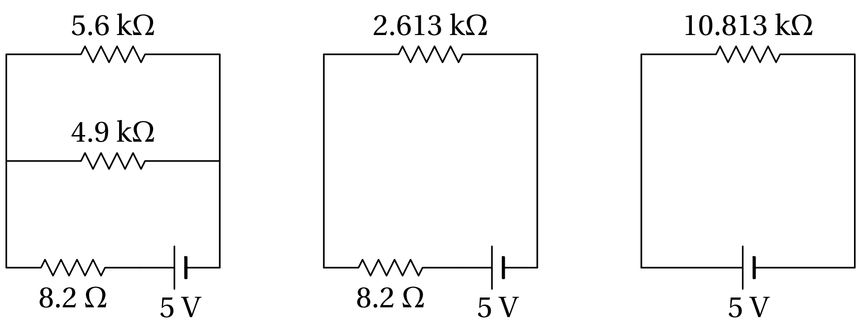
Comentário: O método usado aqui não poderia ser usado para encontrar a resistência equivalente entre A e C. O único que poderíamos fazer seria combinar as resistências de 220 Ω e 180 Ω em série, e as resistências de 150 Ω e 270 Ω em série. Mas a seguir fica-se com um circuito em que nenhumas das resistências estão ou em série ou em paralelo. Nesse caso há que usar os métodos estudados no capítulo 5.

Problema 6

Determine a corrente e a diferença de potencial em cada resistência:



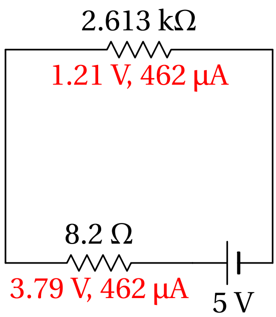
As quatro resistências podem ser combinadas numa só, usando os três passos indicados na figura seguinte. Primeiro combinam-se as resistências de 2.7 kΩ e 2.2 kΩ, em série, a seguir a resultante combina-se, em paralelo, com a resistência de 5.6 kΩ e a resultante combina-se em série com a resistência de 8.2 kΩ.



Com uma única resistência ligada à f.e.m. de 5 V, a diferença de potencial nessa resistência são 5 V e a corrente é:

$$I = \frac{\Delta V}{R} = \frac{5}{10813} = 462\ \mu\text{A}$$

Substituindo a resistência de 10.813 kΩ pelas resistências de 2.613 kΩ e 8.2 kΩ em série, como mostra a figura seguinte, a corrente de 462 μA será igual nas duas e as diferenças de potencial serão essa corrente multiplicada pelas duas resistências.

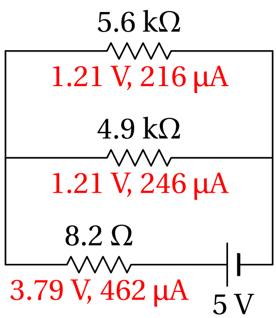


Observe-se que os resultados das diferenças de potencial foram ambos arredondados a duas casas decimais e de forma a que a soma deles seja igual aos 5 V da f.e.m.

Substituindo a resistência de 2.613 kΩ pelas resistências de 5.6 kΩ e 4.9 kΩ em paralelo, a diferença de potencial nessas duas resistências em paralelo será a mesma, 1.21 V, e as correntes nas duas resistências obtêm-se usando a lei de Ohm:

$$I_1 = \frac{1.21}{5600} = 216.071\ldots\ \mu\text{A} \qquad I_2 = \frac{1.21}{4900} = 246.939\ldots\ \mu\text{A}$$

Arredondando as correntes para números inteiros, de forma consistente com o circuito anterior, usaremos 216 e 246 como mostra a figura seguinte (a soma deverá ser 462 e 246.939 está mais próximo de 246 do que 216.071 em relação a 215).



Finalmente, substitui-se a resistência de 4.9 kΩ pelas resistências de 2.7 kΩ e 2.2 kΩ, recuperando-se o circuito original. Nessas duas resistências em série a corrente de 246 μA será a mesma, e as diferenças de potencial obtêm-se multiplicando essa corrente pelos valores das duas resistências. A figura seguinte mostra a diferença de potencial e a corrente em todas as resistências do circuito original.