11 Circuitos de corrente alternada

Problema 2
A resistência de uma bobina é 150 Ω e a sua indutância é 1.4 H. A bobina é ligada à rede elétrica com tensão máxima 325 V e frequência de 50 Hz. Encontre a expressão para a corrente na bobina em função do tempo t.

Usaremos unidades SI. A frequência angular da tensão e da corrente é

$$\omega = 2\pi f = 100\pi \approx 314.16$$

A bobina é considerada como uma resitência em série com um indutor. Como tal, a sua impedância é a soma das impedâncias da resistência e do indutor:

$$\begin{aligned} Z &= 150 + \mathrm{i}\,1.4 \times 314.16 \\ &= \sqrt{150^2 + 439.824^2}\,\angle \tan^{-1}\left(\frac{439.824}{150}\right) = 464.7\angle 1.242 \end{aligned}$$

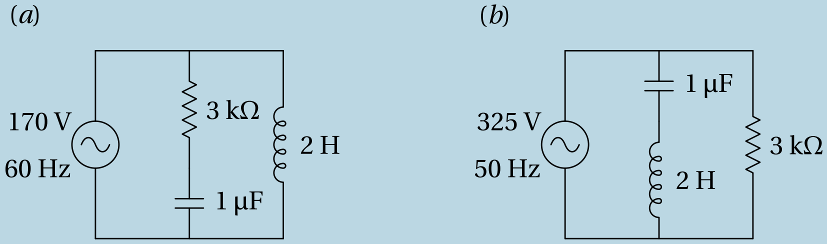
Admitindo que a tensão da rede elétrica em função do tempo seja $325\cos(\omega\,t)$, a voltagem máxima na bobina será 325 V, com fase $\varphi_V = 0$. A corrente máxima e o desfasamento da corrente na bobina são:

$$I_{\text{máx}} = \frac{V_{\text{máx}}}{|Z|} = \frac{325}{464.7} = 0.6694 \qquad \varphi_I = \varphi_V - \varphi_Z = -1.242$$

E a expressão para a corrente é

$$I(t) = 0.6694\cos(314.16\,t - 1.242)$$

Problema 6
Nos dois circuitos representados na figura, calcule a corrente e a tensão em todos os elementos do circuito.



(a) Usando unidades de kΩ para as impedâncias, H para as indutâncias, μF para as capacidades, V para as voltagens e kHz para as frequências, a frequência angular da fonte e as impedâncias dos 3 elementos no circuito são as seguintes:

```
(%i1) w: 2*%pi*60/1000;
(%o1)     3π/25
(%i2) [z1,z2,z3]: float([3, 1/%i/w, %i*2*w])$
```

A voltagem no sistema da resistência em série com o condensador é igual à voltagem da fonte; como tal, o fasor da corrente através desses dois elementos é

```
(%i3) I1: 170/(z1+z2)$
(%i4) [cabs(I1), carg(I1)];
(%o4)     [42.45, 0.724]
```

Ou seja, se t for dado em ms, a expressão da corrente é:

$$I_1 = I_2 = 42.45 \cos\left(\frac{3\pi}{25}\, t + 0.724\right)$$

As voltagens na resistência e no condensador são então

```
(%i5) V1: z1*I1$
(%i6) [cabs(V1), carg(V1)];
```

```
(%o6)    [127.4, 0.724]
(%i7) V2: z2*I1$
(%i8) float([cabs(V2), carg(V2)]);
(%o8)    [112.6, -0.8468]
```

$$V_1 = 127.4\cos\left(\frac{3\pi}{25}\,t + 0.724\right) \qquad V_2 = 112.6\cos\left(\frac{3\pi}{25}\,t - 0.8468\right)$$

No indutor, a voltagem é a mesma voltagem da fonte:

$$V_3 = 170\cos\left(\frac{3\pi}{25}\,t\right)$$

E a corrente é

```
(%i9) I3: 170/z3$
(%i10) [cabs(I3), carg(I3)];
(%o10)    [225.5, -%pi/2]
```

$$I_3 = 225.5\cos\left(\frac{3\pi}{25}\,t - \frac{\pi}{2}\right)$$

(b) Segue-se o mesmo procedimento da alínea (a), mas com os novos valores de frequência e voltagem máxima da fonte e tendo em conta que agora z_1 é a impedância do condensador, z_2 a impedância do indutor e z_3 a impedância da resistência.

```
(%i11) w: 2*%pi*50/1000;
(%o11)    %pi/10
(%i12) [z3,z1,z2]: float([3, 1/%i/w, %i*2*w])$
(%i13) I1: 325/(z1+z2)$
(%i14) [cabs(I1), carg(I1)];
(%o14)    [127.2, %pi/2]
(%i15) V1: z1*I1$
(%i16) [cabs(V1), carg(V1)];
```

```
(%o16)    [404.9, 0]
(%i17) V2: z2*I1$
(%i18) [cabs(V2), carg(V2)];
(%o18)    [79.93, π]
(%i19) I3: 325/z3$
(%i20) [cabs(I3), carg(I3)];
(%o20)    [108.3, 0]
```

Como tal, a corrente e a voltagem no condensador são:

$$I_1 = 127.2\cos\left(\frac{\pi}{10}\,t + \frac{\pi}{2}\right) \qquad V_1 = 404.9\cos\left(\frac{\pi}{10}\,t\right)$$

No indutor:

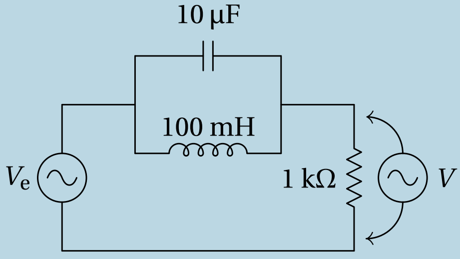
$$I_2 = 127.2\cos\left(\frac{\pi}{10}\,t + \frac{\pi}{2}\right) \qquad V_2 = 79.93\cos\left(\frac{\pi}{10}\,t + \pi\right)$$

E na resistência:

$$I_3 = 108.3\cos\left(\frac{\pi}{10}\,t\right) \qquad V_3 = 325\cos\left(\frac{\pi}{10}\,t\right)$$

Problema 7

A figura mostra um filtro **rejeita-banda** que atenua as frequências angulares próximas de 1 kHz. (*a*) Determine a função de resposta em frequência, $H(\mathrm{i}\omega)$, do circuito. (*b*) Mostre que para $\omega = 1$ kHz, $H(\mathrm{i}\omega)$ é igual a zero. (*c*) Calcule o módulo de $H(\mathrm{i}\omega)$ e trace o seu gráfico para ω entre 0 e 2 kHz.



(*a*) Usando unidades de kΩ para as impedâncias, H para a indutância, μF para a capacidade e kHz para a frequência ω, as impedâncias do condensador, o indutor e a resistência são:

```
(%i21) [z1, z2, z3]: [1/(%i*w*10), %i*w/10, 1]$
```

A impedância equivalente é igual a

```
(%i22) z: z1*z2/(z1+z2) + z3$
```

E os fasores da corrente e da voltagem na resistência são então:

```
(%i23) I: Ve/z$

(%i24) V: I$
```

A função de resposta em frequência é,

```
(%i25) H: ratsimp (V/Ve);
```

(%o25) $$\frac{10\,\mathrm{i}\,w^2 - 10\,\mathrm{i}}{10\,\mathrm{i}\,w^2 + w - 10\,\mathrm{i}}$$

Pode eliminar-se o fator comum i no numerador e denominador, ficando:

$$H(\mathrm{i}\omega) = \frac{10\,\omega^2 - 10}{10\,\omega^2 - 10 - \mathrm{i}\,\omega}$$

(*b*) O valor da função de resposta em frequência, para $\omega = 1$ kHz, é então,

```
(%i26) subst (w=1, H);
```

(%o26) $$0$$

(*c*) O módulo da função de resposta, $|H(\mathrm{i}\omega)|$, obtém-se usando a função cabs do Maxima:

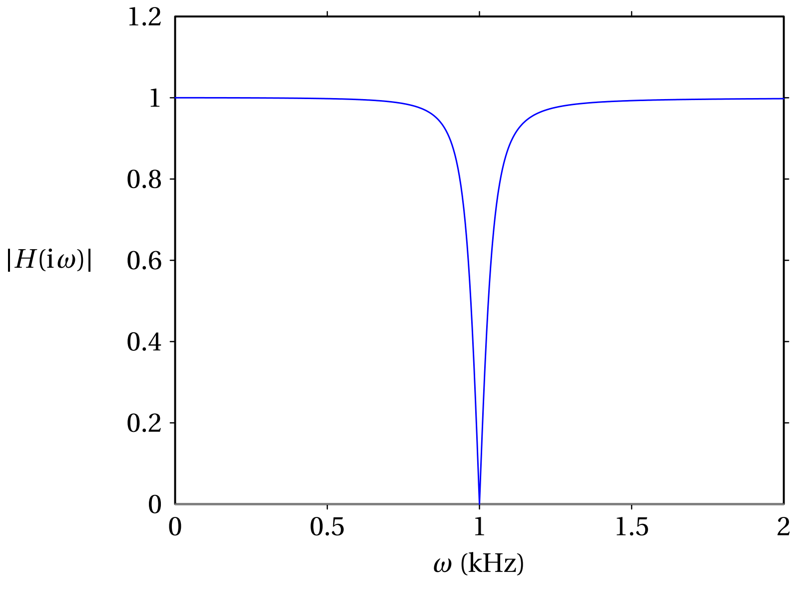
```
(%i27) modH: ratsimp (cabs(H));
```

(%o27) $$\frac{\left|\,10\,w^2 - 10\right|}{\sqrt{100\,w^4 - 199\,w^2 + 100}}$$

$$
|H(\mathrm{i}\omega)| = \frac{\left|10\,\omega^2 - 10\right|}{\sqrt{100\,\omega^4 - 199\,\omega^2 + 100}}
$$

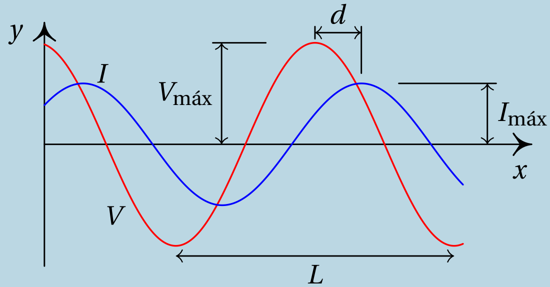
O gráfico dessa função, entre 0 e 2 kHz, obtém-se com o seguinte comando:

```
(%i28) plot2d (modH, [w,0,2], [y,0,1.2], [xlabel,"w (kHz)"],
            [ylabel,"|H(iw)|"]);
```



Comentários: Observe-se que em quase tudo o intervalo de frequências $|H(\mathrm{i}\omega)|$ é aproximadamente igual a 1, o que implica que o sinal de entrada não é atenuado. No entanto, em $\omega = 1$ kHz, $|H| = 0$, ou seja, o sinal de saída é nulo. É por essa razão que o filtro chama-se rejeita-banda; as frequências angulares próximas de uma frequência típica do filtro, neste caso 1 kHz, são eliminadas no sinal de saída.

Problema 10
A figura mostra o ecrã de um osciloscópio onde aparecem a tensão e a corrente num elemento de um circuito. As distâncias L e d foram medidas diretamente no ecrã, obtendo-se os valores $L = 6$ cm, $d = 1$ cm. O osciloscópio também permite determinar que a tensão máxima é $V_{\text{máx}} = 36$ V e a corrente máxima é $I_{\text{máx}} = 12$ mA. Com esses dados, calcule a parte real e a parte imaginária da impedância do elemento do circuito.



O ângulo da impedância é igual à constante de fase da tensão menos a constante de fase da corrente:

$$\varphi_Z = \varphi_V - \varphi_I$$

O gráfico mostra que a tensão está adiantada em relação à corrente (V passa pelo seu valor máximo ou mínimo um pouco antes que I); a diferença das fases, $\varphi_V - \varphi_I$, é então positiva e corresponde à distância d no gráfico. Como a distância L corresponde a um ângulo de 2π, então a o ângulo da impedância é:

$$\varphi_Z = \varphi_V - \varphi_I = \frac{d}{L}2\pi = \frac{\pi}{3}$$

O módulo da impedância é, em kΩ, é igual à tensão máxima em volts dividida pela corrente máxima em miliampere.

$$|Z| = \frac{V_{\text{máx}}}{I_{\text{máx}}} = \frac{36}{12} = 3$$

A impedância, em kΩ, é o número complexo:

$$Z = 3\angle\frac{\pi}{3}$$

E as partes real e imaginária da impedância são:

$$Z = 3\cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\,3\sin\frac{\pi}{3} = (1.5 + \mathrm{i}\,2.598)\ \mathrm{k}\Omega$$