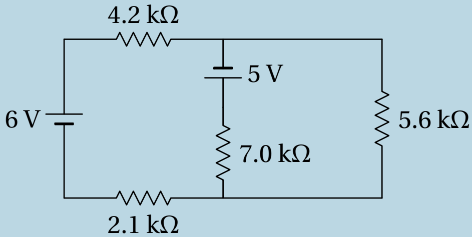
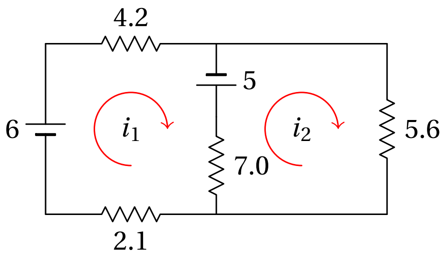
5 Circuitos de corrente contínua

Problema 1
No circuito da figura, determine quais das fontes de força eletromotriz fornecem ou absorvem energia e calcule a potência fornecida, ou absorvida, por cada uma.



Usando unidades de kΩ para as resistências e V para as voltagens, as correntes obtidas estarão em mA. Definem-se duas correntes de malha i_1 e i_2, que podem ser no sentido dos ponteiros do relógio:



Como tal, as equações das malhas são o seguinte sistema:

$$\begin{bmatrix} 13.3 & -7 \\ -7 & 12.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Multiplicando os dois lados da equação pela inversa da matriz que aparece no lado esquerdo, obtêm-se as correntes de malha:

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13.3 & -7 \\ -7 & 12.6 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 11 \\ -5 \end{bmatrix}$$

No Maxima o resultado pode obter-se com o seguinte comando:

```
(%i1) I: invert( matrix ([13.3, -7],[-7, 12.6])).[11, -5];
```

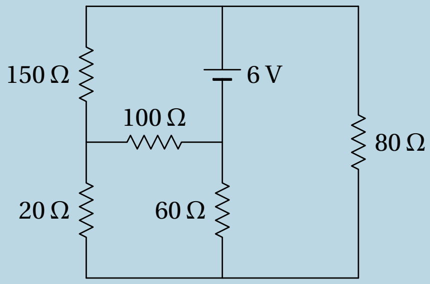
$$\text{(\%o1)} \quad \begin{bmatrix} 0.8737 \\ 0.08855 \end{bmatrix}$$

Os dois valores positivos obtidos indicam que os sentidos das duas correntes de malha sim é o que foi arbitrado (dos ponterios do relógio). A corrente que passa pela f.e.m. de 6 V é a própria corrente de malha $i_1 = 0.8737$ mA, que atravessa a fonte de 6 V do elétrodo negativo para o positivo; como tal, essa fonte fornece $6 \times 0.8737 = 5.24$ mW.

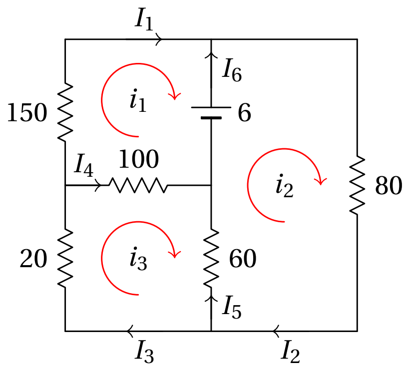
Na fonte de 5 V, a corrente é de cima para baixo, porque $i_1 > i_2$, e tem intensidade $i_1 - i_2 = 0.8737 - 0.08855 = 0.78515$ mA. Essa fonte também fornece potência (a corrente atravessa do elétrodo negativo para o positivo) de valor $5 \times 0.78515 = 3.93$ mW.

Problema 4

Determine a potência dissipada em cada resistência no circuito e a potência fornecida pela f.e.m. Verifique que a potência fornecida pela f.e.m. é igual à soma das potências dissipadas em todas as resistências.



Há três correntes de malha, i_1, i_2 e i_3, que podem ser definidas no sentido dos ponteiros do relógio (unidades SI):



As equações das três malhas são:

$$\begin{bmatrix} 250 & 0 & -100 \\ 0 & 140 & -60 \\ -100 & -60 & 180 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

E a solução desse sistema linear é:

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 250 & 0 & -100 \\ 0 & 140 & -60 \\ -100 & -60 & 180 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -6 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

No Maxima o sistema pode ser resolvido armazenando as 3 correntes de malha numa lista, por meio do seguinte comando:

```
(%i2) i: list_matrix_entries( invert(
        matrix( [250,0,-100], [0,140,-60], [-100,-60,180])).[-6,6,0]);
```

(%o2) $\left[-\frac{117}{5000}, \frac{87}{2000}, \frac{3}{2000} \right]$

O produto da matriz inversa pela lista das voltagens, que dá uma matriz com as correntes de malha, foi convertida em lista usando a função list_matrix_entries.

Observando o diagrama acima, conclui-se que a lista das correntes no 6 ramos, $I_1 \ldots I_6$, nos sentidos escolhidos, têm a seguinte relação com as correntes das malhas:

```
(%i3) I: float([i[1], i[2], i[3], i[3]-i[1], i[2]-i[3], i[2]-i[1]]);
```

(%o3) $[-0.0234, 0.0435, 0.0015, 0.0249, 0.042, 0.0669]$

O sinal negativo de I_1 indica que é no sentido oposto ao que foi indicado no diagrama. As respetivas resistências nos seis ramos são:

```
(%i4) R: [150, 80, 20, 100, 60, 0]$
```

A potência dissipada em calor em cada uma dessas resitências é $P_i = R_i\, I_i^2$. Como tal, a lista das seis potências dissipadas em calor nos seis ramos é:

```
(%i5) P: R*I^2;
```

(%o5) $\left[\, 0.08213,\ 0.1514,\ 4.5\times 10^{-5},\ 0.062,\ 0.1058,\ 0\, \right]$

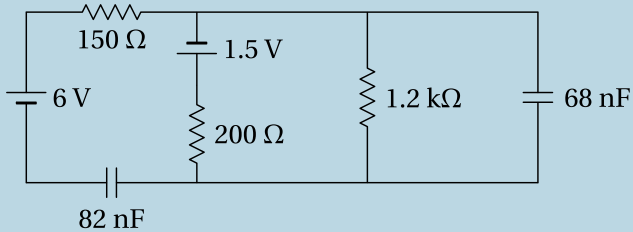
No ramo 6 não há potência dissipada em calor porque não há resistência. A resistência de 150 Ω dissipa 82.13 mW, a resistência de 80 Ω dissipa 151.4 mW, a resistência de 20 Ω dissipa 45 µW, a resistência de 100 Ω dissipa 62 mW e a resistência de 60 Ω dissipa 105.8 mW.

A potência fornecida pela fonte é $6\, I_6 = 0.4014$ W. Para conferir que é igual à potência total dissipada nas resistências, somam-se as potências dissipadas nos seis ramos, ou seja, somam-se os elementos da lista P no Maxima, que pode ser feito aplicando o operador "+" à lista:

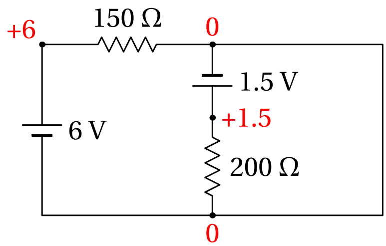
```
(%i6) apply ("+", P);
```

(%o6) 0.4014

Problema 5
No circuito representado no diagrama, os dois condensadores estão inicialmente descarregados. Determine: (*a*) As correntes iniciais nas resistências e condensadores. (*b*) As cargas finais nos condensadores, indicando as suas polaridades.



(a) No instante inicial, em que os condensadores descarregados atuam como curto-circuitos, o circuito equivalente é o seguinte

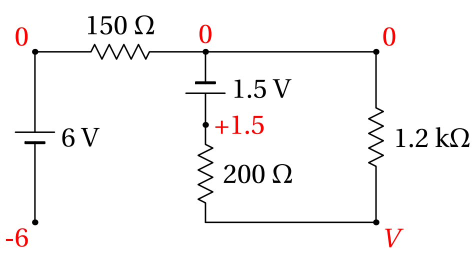


A resistência de 1.2 kΩ não foi representada, porque o equivalente dessa resistência em paralelo com o condensador de 68 nF (curto-circuito com resistência nula) é uma resistência nula (curto-circuito).

Arbitrando potencial nulo no ponto onde o elétrodo negativo da f.e.m. de 1.5 V está em contacto com a resistência de 150 Ω, o elétrodo negativo da f.e.m. de 6 V também terá potencial nulo, porque o potencial em todos os pontos no curto-circuito à direita do circuito é o mesmo. Como tal, o potencial no elétrodo positivo da f.e.m. de 1.5 V será 1.5 V, e o potencial do elétrodo positivo da f.e.m. de 6 V será 6 V, tal como mostra o diagrama acima.

Na resistência de 150 Ω a diferença de potencial é 6 V e a corrente será $6/150 = 0.04$ A (de esquerda para direita), que é a mesma corrente no condensador de 82 nF (de direita para esquerda). Na resistência de 200 Ω, a diferença de potencial é 1.5 V e a corrente $1.5/200 = 0.0075$ A (de cima para baixo). Pela regra dos nós, a corrente no condensador de 68 nF é então, $0.04 - 0.0075 = 0.0325$ A (de cima para baixo). Na resistência de 1.2 kΩ a corrente é nula, porque a diferença de potencial é nula.

(b) No estado final, quando os condensadores completamente carregados são equivalentes a interruptores abertos, o circuito equivalente é o seguinte



Observe-se que a corrente na resistência de 150 Ω é nula, porque não tem percurso por onde circular. Como tal, o potencial nos dois extremos dessa resistência é o mesmo e pode arbitrar-se que é nulo, como mostra o diagrama anterior. O potencial no elétrodo negativo da f.e.m. de 6 V será então igual a −6 V e o potencial no elétrodo positivo da f.e.m. de 1.5 V será igual a 1.5 V.

No ponto comum às resistências de 200 Ω e 1.2 kΩ o valor do potencial, V no diagrama, deverá ser obtido pela lei de Ohm. Essas duas resistências, que estão em série, são equivalentes a uma única resistência de 1400 Ω entre os pontos onde o potencial é 0 e 1.5 V; como tal, a corrente através dessas duas resistências é $I = 1.5/1400$ A, e o valor de V é:

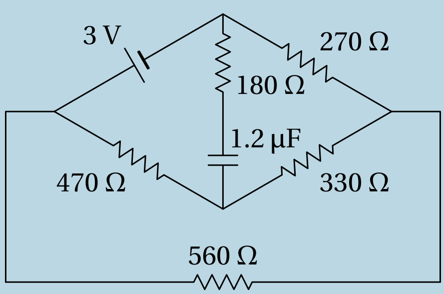
$$V = 1200\,I = \frac{1200 \times 1.5}{1400} = 1.286\,\text{V}$$

Observa-se então que no condensador de 82 nF a carga é positiva na armadura do lado direito (maior potencial), no condensador de 68 nF a carga é negativa na armadura de cima (menor potencial) e os valores das cargas nesses dois condensadores são os seguintes:

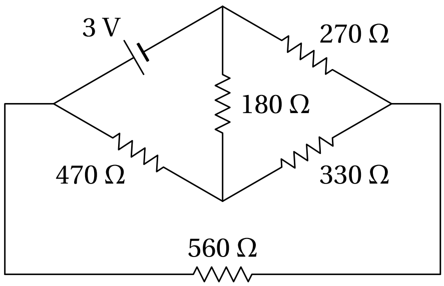
$$Q_1 = 82 \times (1.286 - (-6)) = 597\,\text{nC}$$
$$Q_2 = 68 \times 1.286 = 87.4\,\text{nC}$$

Problema 6

(*a*) Determine a intensidade e sentido da corrente no condensador, no instante inicial em que está descarregado.. (*b*) Determine a carga final do condensador, indicando a sua polaridade.



(a) O circuito equivalente no estado inicial, com o condensador em curto-circuito, é o seguinte

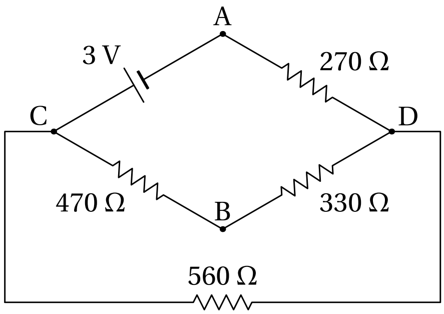


Usando o método das malhas, com três correntes de malha no sentido contrário aos ponteiros do relógio, o sistema de equações do circuito é então,

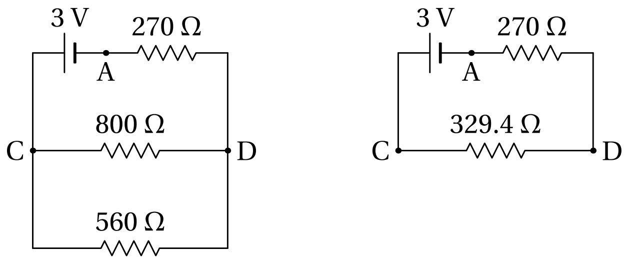
$$\begin{bmatrix} 650 & -180 & -470 \\ -180 & 780 & -330 \\ -470 & -330 & 1360 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix}$$

A solução desse sistema é $i_1 = 0.00824$, $i_2 = 0.00346$ e $i_3 = 0.00369$. A corrente através do condensador é $i_1 - i_2$, para cima, ou seja, 0.00478 A, para cima.

(b) O circuito equivalente no estado final, com o condensador como interruptor aberto, é o seguinte



Onde as resistências de 470 Ω e 330 Ω estão em série entre C e D, e a resistência equivalente ficará em paralelo com a resistência de 560 Ω, conduzindo aos seguintes circuitos equivalentes mais simples:



No circuito do lado direito, a corrente é igual a

$$I = \frac{3}{270 + 329.4} = 0.005005\ \text{A}$$

e a voltagem entre os pontos D e C é:

$$\Delta V_{\text{DC}} = 329.4 \times 0.005005 = 1.649\ \text{V}$$

No circuito do lado esquerdo, a corrente através da resistência de 800 Ω, (de esquerda para direita) é:

$$I_{800} = \frac{1.649}{800} = 0.002061\ \text{A}$$

Que é a mesma corrente I_{470} que passa de C para D no circuito original. Nesse circuito original, a diferença de potencial entre os dois pontos onde está ligado o condensador é igual a,

$$\Delta V_{\text{AB}} = \Delta V_{\text{AC}} + \Delta V_{\text{CB}} = 3 - 470 \times 0.002061 = 2.031\ \text{V}$$

O resultado positivo indica que a carga é positiva na armadura de baixo (maior potencial em B do que em A) e negativa na armadura de cima. Finalmente, a carga no condensador calcula-se a partir da sua voltagem

$$Q = C\,\Delta V = 1.2 \times 2.031 = 2.438\ \mu\text{C}$$