2 Voltagem e corrente

Problema 2
Num tubo de raios X são libertados eletrões, inicialmente em repouso, que são logo acelerados no vácuo do tubo por meio de um campo elétrico, atravessando uma região em que a diferença de potencial é de 4 kV. Os eletrões logo colidem com um alvo metálico produzindo radiação X. (*a*) Determine a energia cinética e a velocidade com que os eletrões colidem com o alvo. (*b*) Se a variação de potencial se estender por uma distância de 8 dm, determine a intensidade do campo elétrico médio.

(*a*) A diminuição da energia potencial elétrica do eletrão é

$$\Delta U_\text{e} = |q\,\Delta V| = 4000\ \text{eV}$$

para passar de eletrão-volt para joule, multiplica-se pela carga elementar

```
(%i1) dU: 4000*1.602e-19;
(%o1)    6.408e-16
```

Na passagem pelo tubo de vácuo, não existem forças dissipativas sobre os eletrões e, portanto, ao sua energia mecânica permanece constante. A massa do eletrão, 9.109×10^{-31} kg, implica que para que a variação da sua energia potencial gravítica fosse da ordem da variação da energia potencial elétrica, 6.408×10^{-16} J, o eletrão teria de cair uma altura da ordem dos 10^{13} metros; como tal, vamos ignorar a energia potencial gravítica, admitindo que a energia potencial é apenas elétrica.

Por conservação da energia, a diminuição da energia potencial de cada eletrão, ΔU_e, será igual ao aumento da sua energia cinética, $m\,v^2/2$, onde v é a velocidade final (a velocidade inicial é nula). Substituindo o valor da massa do eletrão obtém-se o módulo da velocidade v:

```
(%i2) float (solve ((1/2)*9.109e-31*v^2 = dU));

(%o2)    [v = - 3.751e+7, v = 3.751e+7]
```

Os eletrões colidem no alvo com energia cinética de 6.408×10^{-16} J e velocidade de 3.751×10^{7} m/s.

(*b*) O campo elétrico médio é igual à diferença de potencial, dividida pela distância:

```
(%i3) E: 4000/8e-1;

(%o3)    5.0e+3
```

O valor médio do campo é $\bar{E} = 5000$ V/m (V/m é equivalente a N/C).

Comentários: Na época de Newton não eram feitas experiências com velocidades tao elevadas como a deste problema. Hoje em dia, este tipo de experiência é feita diariamente, por exemplo, no consultório de um dentista. A mecânica clássica, baseada nas leis de Newton, é apenas válida quando a velocidade v dos objetos for muito menor do que a velocidade da luz, $c = 3\times10^{8}$ m/s. Para determinar se uma velocidade está dentro do domínio em que a mecânica clássica é boa aproximação, calcula-se a função:

$$\gamma = \sqrt{\frac{1}{1-(v/c)^2}}$$

Se γ for muito maior do que 1, ou um número imaginário, a mecânica clássica deixa de ser uma boa aproximação e há que usar os resultados mais precisos da mecânica relativista. A velocidade obtida neste problema, 3.751×10^{7} m/s, próxima da velocidade da luz, poe em causa a validade do resultado; no entanto, com essa velocidade obtém-se $\gamma = 1.008$, que não é muito maior que 1 e, portanto, o valor obtido para a velocidade é aceitável.

A determinação do valor mais preciso de v, usando mecânica relativista, é feito da forma seguite: em vez de usar a expressão clássica da energia cinética, $m\,v^2/2$, usa-se a expressão relativista:

$$E = m\gamma c^2$$

Observe-se que quando a partícula estiver em repouso ($v = 0$) ainda terá energia cinética, igual a $E_0 = m\,c^2$. Como na prática conseguem-se medir apenas diferenças de energia, essa energia em repouso só foi descoberta na época de Einstein. A energia em repouso dum eletrão, dividida pela carga elementar para passar para eletrão-volt, é igual a:

$$E_0 = \frac{m\,c^2}{e} = \frac{9.109\times 10^{-31}\times 9\times 10^{16}}{1.602\times 10^{-19}} = 5.117\times 10^{5}\ \text{eV}$$

A expressão $q\,\Delta V$ da energia elétrica continúa válida na física relativista. Como tal, a energia cinética final de cada eletrão será a sua energia em repouso mais os 4000 eV fornecidos pelo campo elétrico no tubo. O fator γ dos eletrões que chocam no alvo obtém-se dividindo a energia final pela energia em repouso:

$$\gamma = \frac{5.117\times 10^{5} + 4000}{5.117\times 10^{5}} = 1.008$$

Finalmente resolve-se a equação $\gamma^2 = 1/(1-(v/c)^2)$ para determinar a velocidade, obtendo-se o valor 3.73×10^{7} m/s. O resultado obtido usando mecânica clássica está correto nos dois primeiros algarismos significativos, mas o terceiro algarismo já tem erro, devido ao efeito relativista.

Problema 3
Uma certa bateria de automóvel tem carga máxima de 250 Ah, que corresponde à carga disponível quando está carregada a 100%. (*a*) Depois de algum uso, a bateria descarrega até 60% da sua carga máxima. Qual é a carga, em coulombs, com que fica a bateria? (*b*) A seguir, a bateria liga-se a um carregador de 12 V para a recarregar e observa-se que inicialmente a corrente do carregador tem intensidade de 7 A, mas 6 horas depois diminui a 3 A. Admitindo diminuição linear da corrente em ordem ao tempo, com que percentagem da sua carga máxima fica a bateria no fim das 6 horas?

(*a*) Após ter descarregado pelo uso, a carga, que é 60% da carga máxima inicial de 250 A·h, que em coulomb é igual a:

```
(%i4) 0.6*250*3600;

(%o4)    5.4e+5
```

(*b*) Como a corrente diminui linearmente, a corrente média durante as 6 horas é a média entre a corrente inicial e final:

$$\bar{I} = \frac{7+3}{2} = 5\,\text{A}$$

Também podíamos ter encontrado a corrente média da forma seguinte: a equação da reta que que dá 7 A em $t = 0$ e 3 A em $t = 6$ (tempo medido em horas) é:

$$I(t) = 7 - \frac{2}{3}\,t$$

O valor médio é o integral dessa expressão, de 0 a 6, dividido pelo comprimento do intervalo de integração (6 horas). No Maxima,

```
(%i5)  integrate (7-2*t/3, t, 0, 6)/6;

(%o5)    5
```

A carga transferida para a bateria durante as 6 horas, é igual à corrente média vezes o tempo: $\Delta q = (5\text{ A}) \times (6\text{ h}) = 30$ A·h. Como a bateria descarregada tinha carga de 0.6×250 A·h, a carga final dividida pela inicial será:

```
(%i6) (0.6*250 + 30)/250;

(%o6)    0.72
```

Ou seja, a bateria fica com 72% da sua carga inicial.

Problema 7
A corrente num cabo varia de acordo com a função $I = 20+3\,t^2$, onde I mede-se em miliampere e t em segundos. (*a*) Que carga transporta o cabo desde $t = 0$ até $t = 10$ s? (*b*) Qual o valor da corrente constante que transporta a mesma quantidade de carga no mesmo intervalo de tempo?

(*a*) A carga transferida é igual ao integral da corrente, em ordem ao tempo, no intervalo de tempo em questão:

```
(%i7) delq: integrate (20 + 3*t^2, t, 0, 10);
(%o7)    1200
```

As unidades de I eram mA e as unidades de dt segundos. Como tal, o resultado está em mA·s que são mC. A carga transferida é então $\Delta q = 1.2$ C.

(b) A corrente média nesse intervalo é $\Delta q/10$, ou seja, seria necessária uma corrente constante de 120 mA para transferir a mesma carga nos mesmos 10 segundos.

Problema 8
Num condutor ligado a uma pilha com f.e.m. de 1.5 V, circulam 9.6×10^{21} eletrões de condução durante 2 horas. Determine:

(a) A intensidade da corrente média.

(b) A energia fornecida pela pilha durante esse intervalo.

(c) A potência média fornecida pela pilha.

(d) Se a carga inical da pilha era de 3 A·h, com que carga fica após as 2 horas?

(a) O valor absoluto da carga transferida é o número de eletrões transferidos vezes a carga elementar. A corrente média, em ampere, é a carga transferida, em Coulomb, dividida pelo tempo, em segundos:

```
(%i8) I: 9.6e21*1.602e-19/7200;
(%o8)    0.2136
```

A corrente média é 214 mA.

(b) A energia fornecida é igual à carga transferida, vezes a força eletromotriz:

```
(%i9) U: 9.6e21*1.602e-19*1.5;
(%o9)    2.307e+3
```

São fornecidos 2307 J.

(*c*) A potência média fornecida é igual ao produto entre força eletromotriz (constante) e a corrente média (ou, também, energia fornecida dividida pelo intervalo de tempo):

```
(%i10) P: 1.5*I;

(%o10)    0.3204
```

A potência fornecida foi de 0.3204 W.

(*d*) A carga final é igual à carga inicial, menos a carga transferida durante as 2 horas. Em unidades de A·h, a carga transferida é igual à corrente média, em ampere, vezes o intervalo de tempo, em horas:

```
(%i11) 3 - I*2;

(%o11)    2.573
```

A pilha fica com 2.573 A·h.