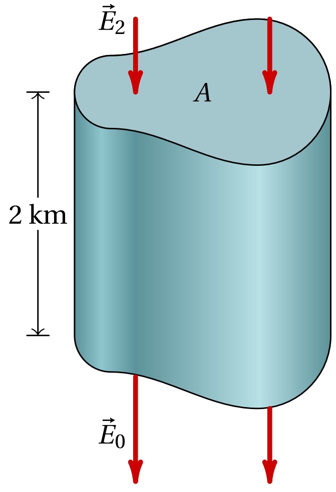
6 Fluxo elétrico

Problema 1
Na atmosfera existe um campo eléctrico que aponta na vertical, para baixo. A nível do mar, o módulo desse campo, é aproximadamente 120 N/C e diminui em função da altura; 2 km acima do nível do mar o campo é aproximadamente 66 N/C. Que pode concluir acerca do sinal das cargas livres nos dois primeiros quilómetros da atmosfera? Calcule a carga volúmica média nessa região.

A lei de Gauss relaciona as cargas livres numa região com o fluxo elétrico através da fronteira dessa região. Como tal, para determinar a carga livre que existe na atmosfera, devemos encontrar uma superfície fechada onde seja possível calcular o fluxo elétrico. Com os dados do problema, podemos calcular facilmente o fluxo numa superfície horizontal (perpendicular ao campo) que esteja a uma altura do nível do mar ou 2 km por cima. Usaremos uma superfície fechada com duas tampas horizontais iguais de área A, uma ao nível do mar e a outra 2 km por cima, com paredes laterais verticais, tal como mostra a figura seguinte:



Na tampa de cima o campo elétrico, $\vec{E}_2$, tem módulo 66 N/C e aponta para dentro da superfície fechada. Como tal, nessa tampa há fluxo negativo igual a (unidades SI):

$$\Phi_2 = -66\,A$$

Na tampa de baixo, o o campo elétrico, $\vec{E}_0$, produz fluxo positivo porque aponta para fora da superfície fechada e o valor do fluxo nessa tampa é:

$$\Phi_0 = 120\,A$$

Nas paredes laterais não há fluxo, porque as linhas de campo são tangentes a essa superfície. O fluxo total na superfície fechada é então:

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_2 = 54\,A$$

O resultado positivo permite concluir que na atmosfera (dentro da superfície fechada escolhida) existem cargas livres positivas.

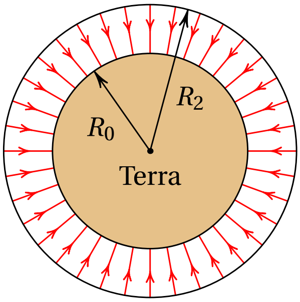
Aplicando a lei de Gauss obtém-se a carga no interior da superfície fechada:

$$\Phi = 54\,A = 4\pi\,k\,q_{\text{int}} \implies q_{\text{int}} = \frac{54\,A}{36\times 10^{9}\,\pi} = 4.775\times 10^{-10}\,A$$

Como o volume da superfície fechada, em unidades SI, é igual a 2000 A, então a carga volúmica média é:

$$\rho = \frac{4.775\times 10^{-10}\,A}{2000\,A} = 2.387\times 10^{-13}\ \text{C/m}^3$$

Comentários: Foi admitido que as linhas de campo, verticais, são paralelas entre si. Realmente as linhas verticais em dois pontos diferentes da Terra não são paralelas, porque são perpendiculares à superfície da Terra que é curva. Para obter maior precisão, a superfície fechada usada para aplicar a lei de Gauss poderia estar formada por duas esferas concêntricas: a própria superfície esférica da Terra, com raio de $R_0 = 6371$ km, e a segunda superfície esférica com centro no centro da Terra e raio $R_2 = 6373$ km, tal como mostra a figura seguinte.



O fluxo elétrico que sai do volume entre essas duas esferas é (unidades SI):

$$\Phi = 120 \times 4\,\pi\, R_0^2 - 66 \times 4\,\pi\, R_2^2$$

E a carga volúmica média será:

$$\rho = \frac{\dfrac{\Phi}{4\,\pi\,k}}{\dfrac{4\,\pi\,(R_2^3 - R_0^3)}{3}} = \frac{360\,R_0^2 - 198\,R_2^2}{4\,\pi\,k\,(R_2^3 - R_0^3)} = 2.385 \times 10^{-13}\ \mathrm{C/m^3}$$

Este resultado, mais correto, é muito semelhante ao resultado obtido admitindo linhas de campo paralelas, devido a que as curvaturas das duas esferas (inverso do raio) são muito semelhantes.

Problema 2
Uma carga pontual de 5 nC encontra-se a 6 cm de um fio retilíneo muito comprido, com carga linear constante de 7 nC/cm. Calcule a força elétrica sobre o fio (sugestão: calcule melhor a força do fio sobre a carga pontual, que é mais fácil de calcular, e pela lei de ação e reação deverá ter o mesmo módulo).

Como foi demonstrado no livro, o campo elétrico de um fio retilíneo infinito, com carga linear λ constante é na direção radial desde o fio e com módulo

$$E = \frac{2\,k\,\lambda}{d}$$

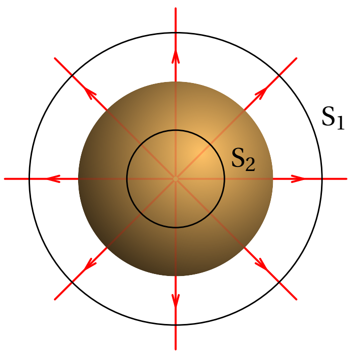
onde d é a distância desde o fio.

O módulo da força do fio sobre a carga pontual é (unidades SI):

$$F = q\,E = \frac{2\,k\,\lambda\,q}{d} = \frac{2\times 9\times 10^{9}\times 7\times 10^{-7}\times 5\times 10^{-9}}{6\times 10^{-2}} = 1.05\ \text{mN}$$

Problema 5
Uma esfera de raio R tem uma carga elétrica Q distribuída uniformemente dentro do seu volume. Usando a lei de Gauss, calcule o módulo do campo elétrico num ponto a uma distância r do centro da esfera. Considere os casos $r \geq R$ e $r < R$.

Devido à simetria da esfera carregada uniformemente, o campo elétrico deverá ser na direção radial, passando pelo centro da esfera, para fora se Q for positiva, ou para dentro se Q for negativa. E o módulo do campo, E, dependerá apenas da distância r até centro da esfera. A figura seguinte mostra as linhas de campo no caso de carga positiva.



Para obter a expressão do campo fora da esfera ($r \geq R$) e dentro da esfera ($r < R$), aplicaremos a lei de Gauss nas duas superfícies S_1 e S_2 apresentadas na figura anterior. Cada uma dessas superfícies esféricas, de raio r, tem área $A = 4\,\pi\,r^2$ e é perpendicular às linhas de campo. Como tal, o fluxo através dessas esferas é $\Phi = 4\,\pi\,r^2\,E$ e, aplicando a lei de Gauss, obtém-se a expressão para E:

$$\Phi = 4\,\pi\,k\,q_{\text{int}} \quad\Longrightarrow\quad E = \frac{k\,q_{\text{int}}}{r^2}$$

No caso de S_1, com $r \geq R$, a carga interna dentro de S_1 é a carga total da esfera, Q, e a expressão do módulo do campo é:

$$E = \frac{k\,Q}{r^2} \qquad (r \geq R)$$

No caso de S_2, com $r < R$, a carga interna dentro de S_2 é proporcional ao volume da esfera S_2:

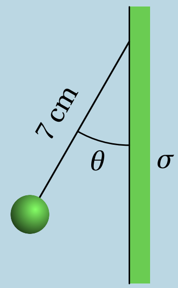
$$q_{\text{int}} = Q\,\frac{\text{volume } S_2}{\text{volume esfera de raio } R} = Q\,\frac{r^3}{R^3}$$

e o módulo do campo é:

$$E = \frac{k\,Q\,r}{R^3} \qquad (r < R)$$

Problema 6

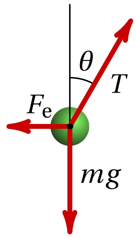
Uma partícula pontual com massa igual a 25 g e carga de 50 nC encontra-se pendurada de um fio de 7 cm que está colado a um plano vertical. O plano vertical tem uma carga superficial constante $\sigma = 17$ nC/cm^2 e pode ser considerado infinito. Calcule o ângulo θ que o fio faz com o plano vertical.

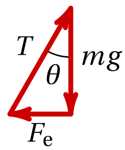


O campo elétrico produzido pelo plano é horizontal, com módulo constante $E = 2\pi\,k\sigma$. A força elétrica sobre a carga pontual positiva é horizontal, para a esquerda, e com módulo (unidades SI):

$$F_{\text{e}} = 2\pi\,k\sigma\,q = \pi \times 18 \times 10^9 \times 17 \times 10^{-5} \times 50 \times 10^{-9} = 0.4807\ \text{N}$$

Sobre a carga pontual atuam três forças externas: a força elétrica, a tensão no fio, e o peso. O lado esquerdo da figura seguinte mostra essas forças.





Como a carga pontual fica em equilíbrio, a soma dessas 3 forças deverá ser nula. O problema podia ser resolvido definindo um sistema de dois eixos e resolvendo as duas equações das somas das componentes das forças nos dois eixos iguais a zero. No entanto, é mais fácil observar que para que a soma dos 3 vetores seja nula, se forem colocados um a seguir ao outro, como no lado direito da figura acima, deverão formar um triângulo, que neste caso é retângulo com catetos de comprimento mg e F_e. Como tal, a tangente do ângulo θ deverá ser igual a $F_\mathrm{e}/(mg)$, e o ângulo θ será:

$$\theta = \mathrm{arctg}\left(\frac{F_\mathrm{e}}{mg}\right) = \mathrm{arctg}\left(\frac{0.4807}{0.025\times 9.8}\right) = 62.99^\circ$$