# 12 Ondas eletromagnéticas e luz

**Problema 1**
Uma onda eletromagnética propaga-se no vácuo, no sentido positivo do eixo dos $x$. No instante $t = 0$, o campo elétrico em função de $x$ é dado pela função (unidades SI)

$$E = \frac{50}{x^2 + 2}$$

Calcule o campo no ponto $x = 50$ m, no instante $t = 0.2$ µs.

Como a onda propaga-se no sentido positivo do eixo dos $x$, a função de onda do campo elétrico deverá ser da forma $E = f(x - c\,t)$, onde $c$ é a velocidade da luz no vácuo.

No instante $t = 0$ a expressão do campo em função de $x$ é $E = f(x)$ e, comparando com a função dada no enunciado, conclui-se que

$$f(x) = \frac{50}{x^2 + 2}$$

Como tal, a função de onda do campo elétrico é:

$$E = f(x - c\,t) = \frac{50}{(x - c\,t)^2 + 2}$$

Substituindo os valores dados de $x$ e $t$ e o valor de $c$, em unidades SI, na equação de onda. obtém-se o valor do campo:

$$E = \frac{50}{(50 - 3 \times 10^8 \times 0.2 \times 10^{-6})^2 + 2} = 0.4902\ \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

**Problema 5**
Uma lâmina metálica muito extensa encontra-se sobre o plano O$xy$. A lâmina é ligada a uma fonte variável que produz um campo elétrico uniforme no plano O$xy$, mas variável no tempo segundo a equação: $\vec{E} = E_{\text{máx}} \sin(\omega\, t)\,\hat{\imath}$, onde $E_{\text{máx}}$ e $\omega$ são constantes. O campo elétrico na lâmina origina uma onda eletromagnética plana. Escreva as funções que representam os campos elétrico e magnético dessa onda, em função do tempo e da posição.

A onda plana produzida estará a sair do plano O$xy$ para os dois lados. Ou seja, propagar-se-á no sentido positivo do eixo dos $z$ na região $z > 0$, e no sentido negativo do eixo dos $z$ na região $z < 0$. Como tal, a função de onda para o campo elétrico terá a forma:

$$E = \begin{cases} g(z - c\,t), & z \geq 0 \\ f(z + c\,t), & z \leq 0 \end{cases}$$

Em $z = 0$ obtém-se $E = g(-c\,t) = f(c\,t)$, que deverá ser igual ao valor do campo elétrico na lâmina:

$$g(-c\,t) = f(c\,t) = E_{\text{máx}} \sin(\omega\,t)$$

Substituindo $r = c\,t$ e $s = -c\,t$, as expressões das funções $f$ e $g$ são:

$$g(s) = E_{\text{máx}} \sin\left(-\frac{\omega}{c}s\right) \qquad f(r) = E_{\text{máx}} \sin\left(\frac{\omega}{c}r\right)$$

Em $z \neq 0$, $s = z - c\,t$, $r = z + c\,t$ e a função de onda do campo elétrico será então:

$$E = \begin{cases} E_{\text{máx}} \sin\left(\omega\,t - \dfrac{\omega}{c}z\right), & z \geq 0 \\ E_{\text{máx}} \sin\left(\omega\,t + \dfrac{\omega}{c}z\right), & z \leq 0 \end{cases}$$

A função de onda do campo magnético deverá ser igual à do campo elétrico, dividida pela velocidade da luz; como tal,

$$B = \begin{cases} \dfrac{E_{\text{máx}}}{c} \sin\left(\omega\,t - \dfrac{\omega}{c}z\right), & z \geq 0 \\ \dfrac{E_{\text{máx}}}{c} \sin\left(\omega\,t + \dfrac{\omega}{c}z\right), & z \leq 0 \end{cases}$$

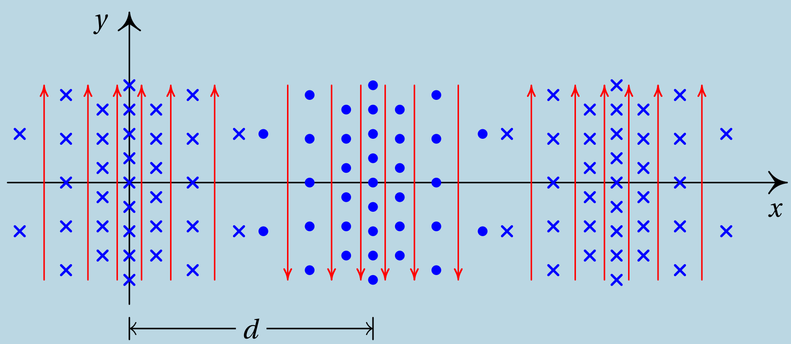
O campo elétrico será na direção de $\hat{\imath}$ em todo o espaço. Na região $z > 0$, como a velocidade é segundo $\hat{k}$, o campo magnético deverá estar na direção e sentido de $\hat{\jmath}$ (o produto vetorial do campo elétrico pelo campo magnético deverá ser na direção e sentido da velocidade). Na região $z < 0$, como a velocidade é segundo $-\hat{k}$, o campo magnético deverá estar na direção de $-\hat{\jmath}$. As expressões vetoriais dos campos são então:

$$\vec{E} = \begin{cases} E_{\text{máx}} \sin\left(\omega\, t - \dfrac{\omega}{c}\, z\right) \hat{\imath}, & z \geq 0 \\ E_{\text{máx}} \sin\left(\omega\, t + \dfrac{\omega}{c}\, z\right) \hat{\imath}, & z \leq 0 \end{cases}$$

$$\vec{B} = \begin{cases} \dfrac{E_{\text{máx}}}{c} \sin\left(\omega\, t - \dfrac{\omega}{c}\, z\right) \hat{\jmath}, & z \geq 0 \\ -\dfrac{E_{\text{máx}}}{c} \sin\left(\omega\, t + \dfrac{\omega}{c}\, z\right) \hat{\jmath}, & z \leq 0 \end{cases}$$

**Problema 7**

A figura representa o campo eletromagnético de uma onda plana de 420 MHz, no instante $t = 0$. As linhas de campo verticais representam o campo elétrico e as linhas perpendiculares à figura são as linhas do campo magnético. Calcule a distância $d$ e escreva o vetor do campo magnético em função do tempo e da coordenada $x$.




Num ponto qualquer, por exemplo na origem, o produto vetorial do campo elétrico com o campo magnético é na direção de propagação da onda; com os dados da figura, esse produto fica na direção do eixo dos $x$, no sentido negativo.

O facto de ter uma frequência específica, indica que a onda é harmónica. Como tal, a equação da onda de cada campo deverá ter a forma da expressão 12.31 mas trocando o sinal negativo por positivo, já que a onda progaga-se no sentido negativo do eixo dos $x$:

$$B = B_{\text{máx}} \sin\left(2\pi\left(\frac{x}{\lambda} + \frac{t}{T}\right) + \varphi\right)$$

Em $t = 0$ e $x = 0$, $B = B_{\text{máx}} \sin(\varphi)$. Como o gráfico mostra que em $t = 0$ e $x = 0$ o valor de $B$ é mínimo, conclui-se que $\varphi = 3\pi/2$; usando a identidade $\sin(\theta + 3\pi/2) = -\cos(\theta)$, temos:

$$\vec{B} = -B_{\text{máx}} \cos\left(2\pi\left(\frac{x}{\lambda} + \frac{t}{T}\right)\right)\hat{k}$$

Em unidades SI, o período é,

$$T = \frac{1}{420 \times 10^6} = 2.381 \times 10^{-9}$$

e o comprimento de onda é:

$$\lambda = c\,T = 3 \times 10^8 \times 2.381 \times 10^{-9} = 0.7143$$

A distância $d$ é metade do comprimento de onda:

$$d = \frac{\lambda}{2} = 0.3571 = 75.71 \text{ cm}$$

Substituindo os valores do período e o comprimento de onda, a expressão do campo magnético é (unidades SI):

$$\vec{B} = -B_{\text{máx}} \cos\left(2\pi\left(\frac{x}{0.7143} + \frac{t}{2.381 \times 10^{-9}}\right)\right)\hat{k}$$