7 Potencial eletrostático

Problema 4
Duas superfícies condutoras esféricas e concêntricas têm raios de 5 cm e 7 cm. A superfície menor tem uma carga total de 3 nC e a carga total na superfície maior é de −2 nC. Calcule a diferença de potencial entre as duas superfícies.

A expressão do potencial produzido por uma superfície condutora esférica, de raio R e carga total Q, num ponto a uma distância r da esfera, é:

$$V(r) = \begin{cases} \dfrac{kQ}{r} & r \geq R \quad \text{(fora da esfera)} \\ \dfrac{kQ}{R} & r < R \quad \text{(constante dentro)} \end{cases}$$

Na superfície menor, de raio $R_1 = 5$ cm o potencial é a soma dos potenciais produzidos pelas duas esferas, em $r = R_1 = 5$ cm. Como esses pontos encontram-se todos no interior da esfera de raio $R_2 = 7$ cm, no caso da segunda esfera há que usar a expressão de $V(r)$ dentro da esfera (kQ_2/R_2, em vez de kQ_2/r). O potencial total nos pontos na superfície da esfera 1 é (unidades SI):

$$V(R_1) = \frac{kQ_1}{R_1} + \frac{kQ_2}{R_2} = \frac{27}{0.05} - \frac{18}{0.07}$$

Na superfície de raio $R_2 = 7$ cm, o potencial total é:

$$V(R_2) = \frac{kQ_1}{R_2} + \frac{kQ_2}{R_2} = \frac{27}{0.07} - \frac{18}{0.07}$$

Como tal, a diferença de potencial é

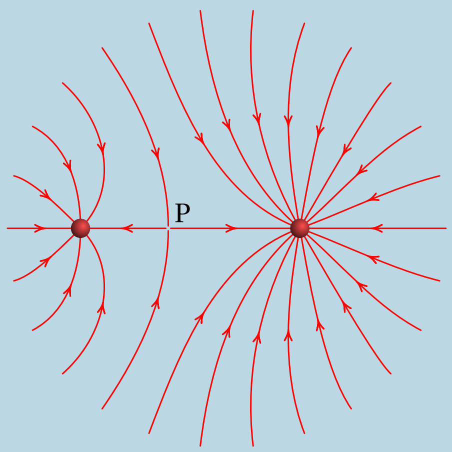
$$V(R_1) - V(R_2) = \frac{27}{0.05} - \frac{18}{0.07} - \frac{27}{0.07} + \frac{18}{0.07} = 154.3\,\text{V}$$

Comentários: Outra forma de resolver este problema consiste em integrar o campo elétrico desde uma esfera até a outra. O percurso de integração pode ser qualquer, por exemplo, na direção radial r. Na região de integração, o campo é devido unicamente à esfera menor, porque essa região está dentro da esfera maior. Como tal,

$$V(R_1) - V(R_2) = \int_{R_1}^{R_2} \frac{k\,Q_1}{r^2}\,\mathrm{d}r = \int_{0.05}^{0.07} \frac{27}{r^2}\,\mathrm{d}r = \frac{27}{0.05} - \frac{27}{0.07} = 154.3$$

Problema 5

A figura representa as linhas de campo elétrico devido a duas cargas pontuais separadas de 7 cm. A razão entre os valores das duas cargas é 4/9. (*a*) Calcule a distância do ponto P às partículas. (*b*) Sabendo que a carga da partícula no lado direito é de −8 nC, calcule o potencial no ponto P (admita $V = 0$ no infinito).



(*a*) No ponto P o campo total é nulo, ou seja, os campos das duas cargas são vetores opostos e com o mesmo módulo. Se d_1 e d_2 são as distâncias desde cada uma das cargas até P, a condição para que os módulos dos dois campos sejam iguais é:

$$\frac{k\,|q_1|}{d_1^2} = \frac{k\,|q_2|}{d_2^2} \quad\Longrightarrow\quad \frac{d_1}{d_2} = \sqrt{\frac{q_1}{q_2}} = \frac{2}{3}$$

e como $d_1 + d_2 = 7$ cm, então, com as distâncias em cm:

$$\frac{d_1}{7 - d_1} = \frac{2}{3} \qquad \Longrightarrow \qquad d_1 = \frac{14}{5} = 2.8\,\text{cm}$$

e $d_2 = 4.2$ cm. A carga mais próxima de P (q_1 à esquerda) é menor que a outra (q_2 à direita).

(b) A carga q_1 da partícula no lado esquerdo obtém-se a partir da outra carga $q_2 = -8$ nC, usando a relação entre as cargas dada no enunciado:

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{4}{9} \qquad \Longrightarrow \qquad q_1 = \frac{4\,q_2}{9} = \frac{32}{9}\ \text{nC}$$

e o potencial total no ponto P é (unidades SI):

$$V = \frac{k\,q_1}{d_1} + \frac{k\,q_2}{d_2} = -\frac{9 \times (32/9)}{0.028} - \frac{9 \times 8}{0.042} = -2857\,\text{V}$$

Problema 7
O potencial no plano Oxy é (unidades SI):

$$V = \frac{2\,x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{3}{(x^2 + y^2)^{1/2}}$$

Calcule o campo elétrico em qualquer ponto do plano Oxy. Usando o Maxima, represente as superfícies equipotenciais e as linhas de campo. Existe algum ponto de campo elétrico nulo?

As componentes x e y do campo elétrico são as derivadas parciais do potencial, multiplicadas por -1.

```
(%i1) V: 2*x/(x^2+y^2)^(3/2) + 3/(x^2+y^2)^(1/2)$
(%i2) E: [-diff(V,x), -diff(V,y)];
```

(%o2) $$\left[\frac{3\,x}{\left(y^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{2}{\left(y^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{6\,x^2}{\left(y^2+x^2\right)^{\frac{5}{2}}}, \frac{3\,y}{\left(y^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{6\,x\,y}{\left(y^2+x^2\right)^{\frac{5}{2}}}\right]$$

A expressão das componentes do campo pode escrever-se duma forma mais compacta, fatorizando cada uma delas por meio da função factor do Maxima:

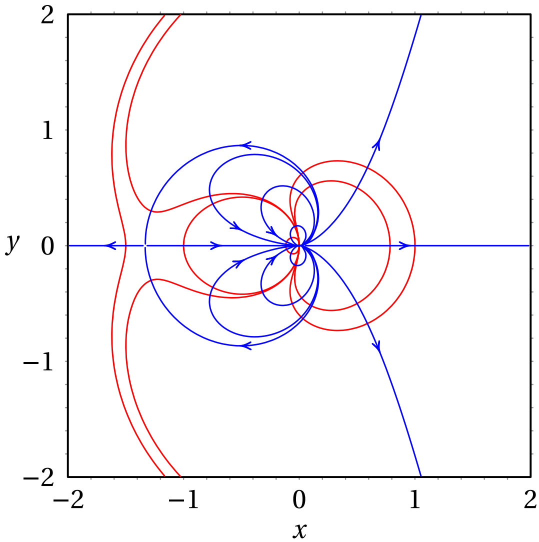
```
(%i3) E: factor (E);
```

$$(\%o3)\quad \left[\frac{3\,x\,y^2-2\,y^2+3\,x^3+4\,x^2}{\left(y^2+x^2\right)^{\frac{5}{2}}},\frac{3\,y\,\left(y^2+x^2+2\,x\right)}{\left(y^2+x^2\right)^{\frac{5}{2}}}\right]$$

As curvas equipotenciais e linhas de campo elétrico traçam-se usando o programa ploteq.

```
(%i4) ploteq(V,[x, -2,2], [y,-2,2]);
```

Após clicar em alguns pontos para traçar curvas equipotenciais (a vermelho), entra-se no menu de configuração, apaga-se a cor “red” no campo “curves” e seleciona-se uma cor diferente, neste caso “blue”, no campo “fieldlines”. Depois de fechar esse menu, cada vez que se clicar no gráfico, será traçada uma das linhas de campo elétrico representadas em azul no gráfico:



Para determinar os pontos onde o campo é nulo, encontram-se os pontos onde os numeradores das componentes x e y do campo são nulas:

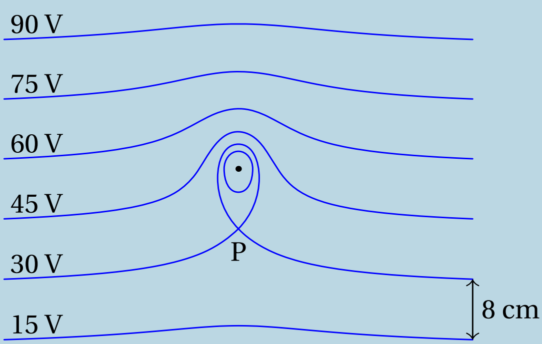
```
(%i5) solve([num(E[1]), num(E[2])]);
```

$$(\%o5)\quad \left[\left[y=0,\;\; x=-\frac{4}{3}\right],\;\; [y=0,\;\; x=0]\right]$$

No primeiro ponto, $(x, y) = (-4/3, 0)$, os denominadores das componentes do campo são diferentes de zero e, portanto, o campo é nulo nesse ponto. No segundo ponto, na origem, os denominadores das componentes do campo também são nulos e, como tal, o campo não é necessariamente nulo nesse ponto. Observando as linhas de campo na vizinhança da origem, comprova-se que de facto o campo não é nulo na origem, mas aponta na direção positiva do eixo dos x.

Problema 8

A figura mostra as superfícies equipotenciais devidas a uma carga pontual e a um campo elétrico uniforme $\vec{E}_{\text{ext}}$. A grandes distâncias da carga pontual, as superfícies são planos paralelos e a distancia entre dois planos com diferença de potencial de 15 V é de 8 cm. (*a*) Calcule o módulo e a direção do campo externo $\vec{E}_{\text{ext}}$. (*b*) Diga se a carga pontual é positiva ou negativa e justifique a sua resposta. (*c*) Qual a direção da força sobre a carga pontual? (*d*) Se a distância entre a carga pontual e o ponto P é 9 cm, determine o valor da carga pontual.



(*a*) O campo externo aponta para baixo (direção em que diminui o potencial) e tem módulo:

$$E_{\text{ext}} = \frac{15}{0.08} = 187.5\ \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

(*b*) A carga é negativa, porque há uma linha de campo que atravessa as superfícies equipotenciais de 90 V, 75 V, 60 V, 45 V e 30 V entrando logo na carga. Também, se não existisse a carga, o potencial no ponto onde se encontra teria um valor entre 45 V e 60 V, mas com a carga pontual o potencial nesse ponto passa a ser menor que 30 V, ou seja, o potencial da carga pontual é negativo e a carga também.

(*c*) Como a carga é negativa, a força é na direção oposta ao campo externo, ou seja, para cima.

(*d*) No ponto P o campo total é nulo e, como tal, o módulo do campo produzido pela carga pontual deverá ser igual ao módulo do campo externo:

$$E = \frac{k\,|q|}{d^2} = E_{\text{ext}} = 187.5$$
$$\Longrightarrow \quad |q| = \frac{187.5 \times 0.09^2}{9 \times 10^9} = 1.687 \times 10^{-10}$$

O valor da carga pontual é $q = -0.1687$ nC.