10. Processamento de sinais

Um sintetizador é um instrumento musical baseado no processamento de sinais eléctricos. É produzida uma tensão elétrica oscilatória que é logo processada passando por vários filtros que alteram a forma da função que representa a tensão em função do tempo. O sinal de saída é alimentado num altifalante produzindo o som desejado. A fotografia mostra um sintetizador Moog, modelo Minimoog, de 1970.

10.1. Sinais

Uma aplicação importante dos circuitos elétricos é no processamento de sinais. Os sinais a processar são tensões ou correntes elétricas variáveis em função do tempo. Esses sinais podem ser produzidos, por exemplo, num microfone ou em transdutores de diversos tipos, usados para medir pressões, temperaturas ou outras propriedades físicas. O sinal elétrico produzido pelo transdutor constitui uma fonte de tensão ou corrente variável no circuito elétrico usado para o seu processamento.

Neste capítulo designa-se por **sinal** qualquer grandeza que varie em função do tempo em alguma parte de um circuito. Por exemplo, uma tensão $V(t)$, uma corrente $I(t)$ ou a carga $Q(t)$ num condensador. Utiliza-se um til para indicar transformadas de Laplace correspondentes, nomeadamente, $\tilde{V}(s)$, $\tilde{I}(s)$ e $\tilde{Q}(s)$. Quando é óbvio que se está a falar de sinal, por vezes escreve-se apenas V e $\tilde{V}$, ficando implícito que são funções que dependem do tempo t e da frequência s (o apêndice C apresenta um sumário sobre a transformada de Laplace).

10.2. Circuito RC

A figura 10.1 mostra o diagrama de circuito para um condensador, com carga inicial Q_0, que é descarregado por ligação a uma resistência R. Esse circuito é designado de circuito RC.

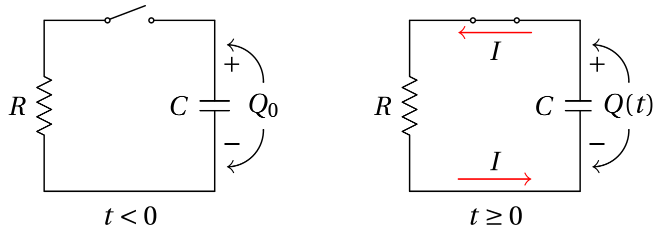


Figura 10.1.: Descarga de um condensador.

O instante $t = 0$ em que o condensador é ligado à resistência corresponde ao instante em que é fechado o interruptor no diagrama de circuito da figura 10.1. Quando o condensador começa a descarregar, a corrente é igual à taxa de diminuição da carga no condensador, $-\mathrm{d}Q/\mathrm{d}t$.

Em qualquer instante $t \geq 0$, a corrente e a diferença de potencial no condensador são iguais à corrente I e à diferença de potencial IR na resistência, respetivamente:

$$-\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = I \qquad \frac{Q}{C} = IR \tag{10.1}$$

Combinando estas duas equações obtém-se uma equação diferencial para a carga em função do tempo,

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = -\frac{Q}{RC} \qquad (t \geq 0) \tag{10.2}$$

Calculando a transformada de Laplace (apêndice C) de ambos os membros da equação obtém-se

$$s\tilde{Q} - Q_0 = -\frac{\tilde{Q}}{RC} \tag{10.3}$$

e segue-se que

$$\tilde{Q} = \frac{Q_0}{s + \frac{1}{RC}} \tag{10.4}$$

A transformada inversa desta equação dá a carga em função do tempo no circuito RC:

$$\boxed{Q(t) = Q_0\,\mathrm{e}^{-t/(RC)}} \tag{10.5}$$

Constata-se que a carga no condensador decresce de forma exponencial. A corrente obtém-se dividindo a carga por RC e, portanto, decresce também de forma exponencial. Os gráficos da carga e da corrente, em função do tempo, são apresentados na figura 10.2.

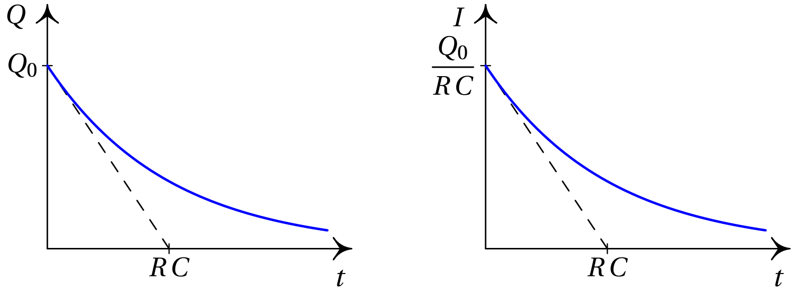


Figura 10.2.: Carga e corrente no circuito RC.

A constante $t_C = RC$, com unidades de tempo, chama-se **constante de tempo**. É o tempo que demoraria a descarregar o condensador se a corrente mantivesse o seu valor inicial Q_0/t_C. A constante de tempo t_C é também igual ao intervalo de tempo em que a carga e a corrente diminuem até $1/e$ (ou seja, 37%) dos seus valores iniciais. Quanto maior é a constante de tempo, mais lenta é a diminuição da carga e da corrente no circuito RC.

10.3. Equações diferenciais dos circuitos

Considere-se um circuito onde existe uma fonte com tensão variável $V_e(t)$, que constitui o **sinal de entrada**. Interessa calcular a tensão $V(t)$ produzida em algum elemento do circuito; essa tensão $V(t)$ considera-se o **sinal de saída** do circuito.

Para facilitar a análise, admite-se que o sinal de entrada $V_e(t)$ só aparece a partir de um instante arbitrado $t = 0$, tal que para $t < 0$ o sistema se encontra em equilíbrio estável. No final desta secção explica-se o que isso quer dizer.

O primeiro exemplo considerado é o **circuito RLC** da figura 10.3, onde o sinal de saída é a tensão no condensador. Os símbolos + e - não implicam tensões positivas ou negativas; indicam apenas que $V_e(t)$ (ou $V(t)$) é o potencial no ponto designado +, subtraído do potencial no ponto designado −.

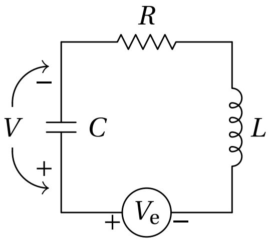


Figura 10.3.: Circuito RLC.

Se $I(t)$ for a corrente no circuito, as diferenças de potencial na resistência e no indutor são:

$$V_R(t) = R\,I(t) \qquad\qquad V_L(t) = L\,\dot{I}(t) \tag{10.6}$$

onde $\dot{I}(t)$ é a derivada de $I(t)$ em ordem a t.

No condensador, a diferença de potencial é o sinal de saída $V(t)$, que é diretamente proporcional à carga no condensador

$$V(t) = \frac{Q(t)}{C} \tag{10.7}$$

Por aplicação da regra da malha ao circuito da figura 10.3 obtém-se

$$L\,\dot{I} + R\,I + V = V_e \tag{10.8}$$

Como a corrente I é igual à derivada da carga Q no condensador, derivando a equação 10.7 obtém-se:

$$I = C\,\dot{V} \tag{10.9}$$

onde $\dot{V}$ é a derivada de $V(t)$. Derivando novamente obtém-se

$$\dot{I} = C\,\ddot{V} \tag{10.10}$$

Finalmente, substituindo 10.9 e 10.10 na equação 10.8 obtém-se a equação que permite calcular o sinal de saída V a partir do sinal de entrada V_e:

$$L\,C\,\ddot{V} + R\,C\,\dot{V} + V = V_\mathrm{e} \tag{10.11}$$

Para um sinal de entrada conhecido, $V_\mathrm{e}(t)$, e valores conhecidos de R, C e L, a equação diferencial 10.11 pode ser resolvida para obter o sinal de saída $V(t)$.

O segundo exemplo corresponde ao mesmo circuito RLC da figura 10.3, mas com tensão de saída na resistência (figura 10.4). A tensão de saída verifica a lei de Ohm

$$V = R\,I \tag{10.12}$$

E aplicando a regra das malhas obtém-se

$$L\,\dot{I} + V + \frac{Q}{C} = V_\mathrm{e} \tag{10.13}$$

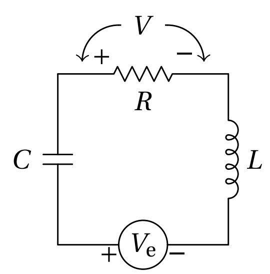


Figura 10.4.: Circuito RLC.

Derivando ambos os membros da equação anterior, substituindo I em função de V (usando a equação 10.12) e lembrando que a derivada da carga no condensador é igual à corrente I, obtém-se a equação diferencial para este circuito:

$$\frac{L}{R}\,\ddot{V} + \dot{V} + \frac{1}{R\,C}\,V = \dot{V}_\mathrm{e} \tag{10.14}$$

O último exemplo analisado nesta secção é, mais uma vez, o mesmo circuito RLC, mas em que o sinal de saída é a diferença de potencial no indutor (figura 10.5).

Neste caso a tensão de saída verifica a equação

$$V = L\dot{I} \tag{10.15}$$

Derivando a equação da malha duas vezes e substituindo $\dot{I}$ em função de V (usando a equação anterior), obtém-se a equação diferencial para o circuito na figura 10.5:

$$\ddot{V} + \frac{R}{L}\dot{V} + \frac{1}{LC}V = \ddot{V}_e \tag{10.16}$$

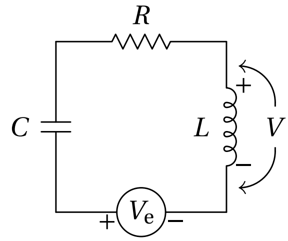


Figura 10.5.: Circuito RLC.

Para cada possível sinal de entrada, $V_e(t)$, as equações diferenciais dos 3 exemplos considerados (equações 10.11, 10.14 e 10.16) são equações diferenciais lineares, não homogéneas, com coeficientes constantes. Qualquer outro circuito mais complicado, formado por fontes, resistências condensadores e indutores, conduz ao mesmo tipo de equação diferencial.

Em $t < 0$ o sinal de entrada é nulo e a equação diferencial linear torna-se homogénea. Todas as equações diferenciais lineares homogéneas com coeficientes constantes podem ser escritas na forma de um sistema dinâmico autónomo e linear, como se mostra no livro *Dinâmica e Sistemas Dinâmicos* (Villate, 2015, capítulo 9). Como tal, o sistema dinâmico tem um único ponto de equilíbrio com $V = \dot{V} = 0$ (se a equação for de segunda ordem; já se for de terceira ordem, $V = \dot{V} = \ddot{V} = 0$, etc).

Na prática, a resistência R de cada elemento num circuito nunca é exatamente nula mas sim um valor positivo, o que faz com que o sistema dinâmico seja dissipativo e o ponto de equilíbrio seja estável (atrativo). Como tal, admite-se que em $t < 0$ o sistema evolui para o estado de equilíbrio estável e no limite $t \to 0^-$ o circuito está no estado estacionário em que o sinal de saída e a sua derivada são ambos nulos ($V = \dot{V} = 0$). Ou seja, admite-se que todas as cargas e correntes no circuito são nulas no instante inicial ($t \to 0^-$).

10.4. Unidades de tempo e de frequência

A frequência tem unidades de inverso do tempo. A unidade SI de frequência é o hertz, em homenagem a Heinrich R. Hertz (1857–1894), representado pelo símbolo Hz e equivalente a s^{-1}. Na secção 10.2 viu-se que o comportamento de um circuito RC depende de uma única constante própria do sistema, com unidades de tempo:

$$t_C = R\,C \tag{10.17}$$

Como tal, conclui-se então que o termo $R\,C\,\dot{V}$ na equação 10.11 tem unidades de voltagem, já que $\dot{V}$ tem unidades de voltagem sobre tempo; de facto, para que a equação seja válida, todos os termos nos dois membros da equação devem ter as mesmas unidades, neste caso voltagem.

Já na equação 10.14, o segundo membro da equação tem unidades de voltagem sobre tempo e observando o primeiro termo do primeiro membro da equação, conclui-se que L/R tem unidades de tempo, pois as unidades de $\ddot{V}$ são voltagem sobre tempo ao quadrado. Define-se então uma segunda constante de tempo:

$$t_L = \frac{L}{R} \tag{10.18}$$

A constante $L\,C$ que aparece na equação 10.16 é igual ao produto das duas constantes de tempo ($t_C\, t_L$) e como tal, tem unidades de tempo ao quadrado. Todos os termos da equação 10.16 têm unidades de voltagem sobre tempo ao quadrado.

As equações 10.17 e 10.18 permitem definir o sistema de unidades mais conveniente num circuito determinado. Por exemplo, se as resistências no circuito fossem da ordem dos kΩ e as capacidades da ordem dos nF, a unidade de tempo mais conveniente seria o µs (produto entre kΩ e nF), a unidade de indutância mais conveniente seria então o mH (produto entre µs e kΩ) e a unidade de frequência mas conveniente seria MHz (inverso de µs). Com os valores das resistências em kΩ, capacidades em nF, indutâncias em mH, tempos em µs e frequências em MHz, podem-se ignorar as unidades e trabalhar com números de ordens de grandeza semelhantes.

10.5. Impedância

As equações dos circuitos com condensadores e indutores são sempre equações diferenciais, como se viu nos exemplos da secção 10.3. No entanto, como essas equações são lineares e de coeficientes constantes, as correspondentes transformadas de Laplace são sempre equações algébricas em função de um parâmetro s com unidades de frequência.

É muito mais fácil encontrar diretamente a equação algébrica do circuito, em função do parâmetro s, resolvê-la para encontrar a transformada de Laplace do sinal de saída e a seguir calcular a transformada de Laplace inversa para determinar o sinal de saída em ordem ao tempo. Para encontrar a equação do circuito no domínio da frequência s, é necessário saber a relação que existe entre corrente e tensão no domínio da frequência, para cada tipo de elemento no circuito e aplicar a lei dos nós e a lei das malhas.

Como já foi referido, nos circuitos dissipativos pode sempre admitir-se que no instante inicial $t = 0$, o sinal de entrada $V_\mathrm{e}(t)$ e o sinal de saída $V(t)$ são nulos. Assim sendo, as transformadas de Laplace de $\dot{V}_\mathrm{e}$ e $\dot{V}$ são $s\,\tilde{V}_\mathrm{e}(s)$ e $s\,\tilde{V}(s)$, onde $\tilde{V}_\mathrm{e}$ e $\tilde{V}$ são as transformadas dos sinais de entrada e saída. Como as derivadas dos sinais também são inicialmente nulas, as transformadas de $\ddot{V}_\mathrm{e}$ e $\ddot{V}$ são $s^2\,\tilde{V}_\mathrm{e}(s)$ e $s^2\,\tilde{V}(s)$.

Numa resistência, a lei de Ohm define a relação entre os sinais da tensão e da corrente

$$V(t) = R\,I(t) \tag{10.19}$$

e aplicando a transformada de Laplace a ambos os membros da equação obtém-se:

$$\tilde{V} = R\,\tilde{I} \tag{10.20}$$

Num indutor, a relação entre a tensão e a corrente é

$$V(t) = L\,\frac{\mathrm{d}\,I(t)}{\mathrm{d}\,t} \tag{10.21}$$

Como se está a admitir que a tensão e a corrente são nulas em $t < 0$, usando a propriedade da transformada de Laplace da derivada obtém-se a equação:

$$\tilde{V} = L\,s\,\tilde{I} \tag{10.22}$$

que é semelhante à lei de Ohm 10.20 para as resistências, exceto que em vez de R se tem uma função $Z(s)$ que depende da frequência:

$$Z(s) = L\,s \tag{10.23}$$

Num condensador, a diferença de potencial é diretamente proporcional à carga acumulada:

$$V(t) = \frac{Q(t)}{C} \tag{10.24}$$

e a condição de cargas e correntes nulas em $t < 0$ implica que a carga num instante $t > 0$ é igual ao integral da corrente, desde $t = 0$ até t:

$$V(t) = \frac{1}{C}\int_0^t I(u)\,\mathrm{d}\,u \tag{10.25}$$

Usando a propriedade da transformada de Laplace do integral, obtém-se:

$$\tilde{V} = \frac{\tilde{I}}{s\,C} \tag{10.26}$$

Mais uma vez, obteve-se uma relação semelhante à lei de Ohm, mas em que o valor da resistência R é substituído por uma função que depende da frequência:

$$Z(s) = \frac{1}{s\,C} \tag{10.27}$$

Conclui-se então que, no domínio da frequência, as resistências, indutores e condensadores verificam todos uma **lei de Ohm generalizada**:

$$\boxed{\tilde{V}(s) = Z(s)\,\tilde{I}(s)} \tag{10.28}$$

onde a função $Z(s)$ denominada **impedância generalizada**, é dada por:

$$Z = \begin{cases} R & \text{(resistências)} \\ L\,s & \text{(indutores)} \\ \dfrac{1}{C\,s} & \text{(condensadores)} \end{cases} \tag{10.29}$$

Note-se que a impedência dos indutores aumenta quando a frequência s aumenta, a impedência dos condensadores diminui com o aumento da frequência, e a impedância das resistências é constante, qualquer que seja a frequência.

10.6. Associações de impedâncias

Na secção 3.7 encontrou-se o valor da resistência equivalente para duas resistências ligadas em série ou em paralelo. No processo de demonstração teve-se em conta que nas resistências em série a corrente é a mesma mas a diferença de potencial total é igual à soma das diferenças de potencial, nas resistências em paralelo a diferença de potencial é a mesma mas a corrente total é soma das correntes nas resistências e que em cada resistência a tensão ΔV é diretamente proporcional à corrente I.

As mesmas condições são válidas no caso de combinações de resistências, indutores ou condensadores em série ou em paralelo, no domínio da frequência onde a transformada de Laplace da tensão ($\tilde{V}$) é diretamente proporcional à transformada de Laplace da corrente ($\tilde{I}$) em qualquer um desses dispositivos (basta repetir o mesmo raciocínio da secção 3.7 substituindo ΔV por $\tilde{V}$, I por $\tilde{I}$ e R por Z).

Como tal, as regras para obter a impedância equivalente de combinações de resistências, indutores ou condensadores, ligados em série ou em paralelo, são idênticas às regras para obter a resistência equivalente de resistências em série ou em paralelo. No caso de dois dispositivos em série (figura 10.6, a impedância equivalente é igual à soma das impedâncias dos dois dispositivos:

$$\boxed{Z_\text{s} = Z_1 + Z_2} \tag{10.30}$$

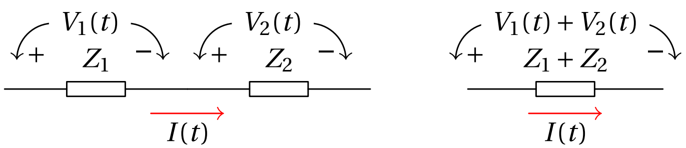


Figura 10.6.: Impedâncias em série e sistema equivalente.

No caso de dois dispositivos em paralelo (figura 10.7), a impedância equivalente é:

$$\boxed{Z_\text{p} = Z_1 \parallel Z_2 = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}} \tag{10.31}$$

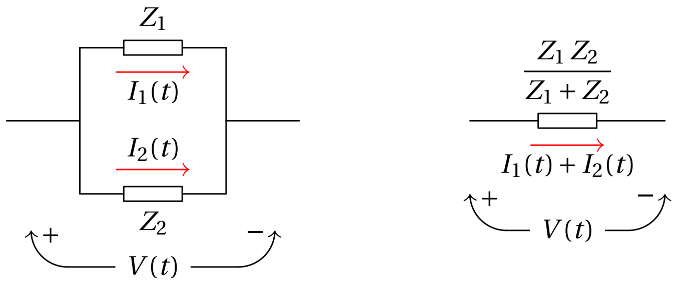
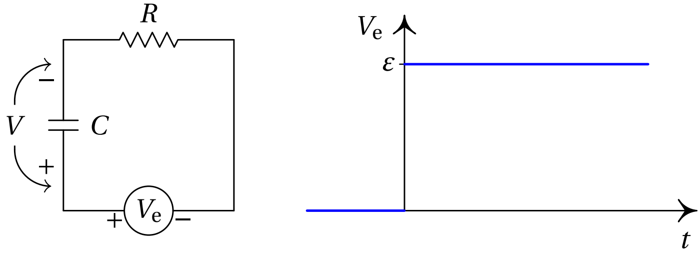


Figura 10.7.: Impedâncias em paralelo e sistema equivalente.

Exemplo 10.1
Liga-se um condensador a uma fonte de tensão contínua para o carregar. Descreva a variação da carga e da corrente no condensador, em função do tempo (resposta transitória).

Resolução. A fonte de tensão contínua, com f.e.m. ε, ligada num instante arbitrário $t = 0$, pode ser considerada como um sinal de entrada $V_\text{e} = \varepsilon\, u(t)$, onde $u(t)$ é a função **degrau unitário** (ver apêndice C). A transformada de Laplace de V_e é então $\tilde{V}_\text{e} = \varepsilon / s$.

O lado esquerdo da figura seguinte mostra o diagrama do circuito, onde R representa a soma da resistência interna da fonte com a resistência dos fios usados para ligar a fonte ao condensador, e no lado direiro mostra-se o gráfico de $V_\text{e} = \varepsilon\, u(t)$



A impedância total do circuito é a soma das impedâncias da resistência e do condensador, já que estão em série

$$Z_t = R + \frac{1}{C\,s}$$

e, pela lei de Ohm generalizada, a transformada da corrente no circuito é:

$$\tilde{I} = \frac{\tilde{V}_\text{e}}{R + \dfrac{1}{C\,s}} = \frac{\varepsilon}{R\,s + \dfrac{1}{C}}$$

A transformada de Laplace da tensão no condensador é igual à impedância do condensador vezes $\tilde{I}$:

$$\tilde{V} = \frac{\tilde{I}}{C\,s} = \frac{\varepsilon}{s(R\,C\,s+1)}\varepsilon\left(\frac{1}{s} - \frac{R\,C}{R\,C\,s+1}\right)$$

A tensão no condensador, em função do tempo, é a transformada de Laplace inversa

$$V(t) = \varepsilon\left(1 - e^{-t/(RC)}\right) \tag{10.32}$$

A carga em função do tempo $Q(t)$ obtém-se multiplicando a expressão anterior por C e a figura 10.8 mostra os gráficos da carga e da corrente ($\mathrm{d}Q/\mathrm{d}t$) em função do tempo. A carga aumenta de forma exponencial, desde zero até o valor máximo $C\varepsilon$. Substituindo um condensador por um interruptor aberto (aproximação para $t \to \infty$), verifica-se que o valor assimptótico da tensão no condensador é ε e a carga aproxima-se assimptoticamente de $C\varepsilon$.

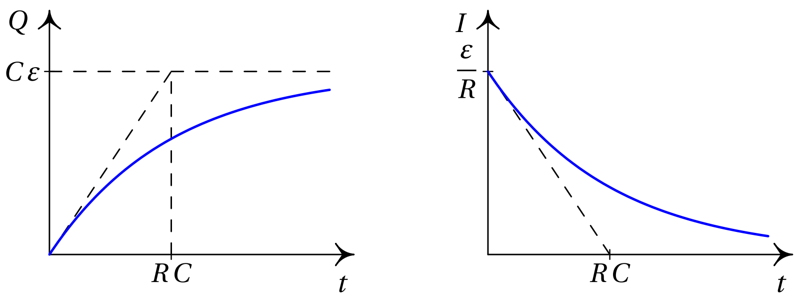
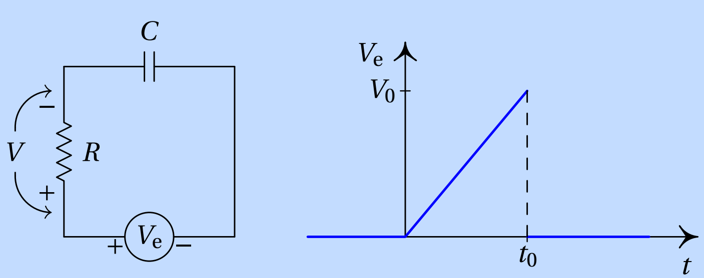


Figura 10.8.: Gráficos do período transitório da carga e corrente num condensador a ser carregado com uma fonte de tensão contínua.

Exemplo 10.2
No circuito da figura, determine o sinal de saída $V(t)$, quando o sinal de entrada $V_e(t)$ é o sinal triangular representado no gráfico.



Resolução. A impedância equivalente e a transformada da corrente são iguais às do exemplo anterior:

$$\tilde{I} = \frac{\tilde{V}_\text{e}}{R + \dfrac{1}{C\,s}}$$

Mas como a tensão de saída é agora medida na resistência, vem:

$$\tilde{V} = R\,\tilde{I} = \frac{R\,C\,s\,\tilde{V}_\text{e}}{R\,C\,s + 1} \tag{10.33}$$

Usando a função degrau unitário, o sinal de entrada escreve-se:

$$V_\text{e} = \frac{V_0\,t}{t_0}\,(u(t) - u(t - t_0))$$

e é útil escrevé-la da forma equivalente:

$$V_\text{e} = \frac{V_0}{t_0}\,(t\,u(t) - t_0\,u(t - t_0) - (t - t_0)\,u(t - t_0))$$

Aplicando agora a propriedade de deslocamento no tempo da transformada de Laplace, obtém-se a transformada de Laplace do sinal triangular de entrada:

$$\tilde{V}_\text{e} = \frac{V_0}{t_0}\left(\frac{1}{s^2} - \frac{t_0\,\text{e}^{-t_0\,s}}{s} - \frac{\text{e}^{-t_0\,s}}{s^2}\right)$$

e substituindo $\tilde{V}_\text{e}$ na equação 10.33 obtém-se

$$\tilde{V} = \frac{V_0}{t_0}\left(\frac{R\,C}{s\,(R\,C\,s + 1)} - \frac{R\,C\,t_0\,\text{e}^{-t_0\,s}}{R\,C\,s + 1} - \frac{R\,C\,\text{e}^{-t_0\,s}}{s\,(R\,C\,s + 1)}\right)$$

Para calcular a transformada inversa, começa-se por ignorar os fatores exponenciais e calcular as transformadas inversas seguintes

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{R\,C}{R\,C\,s + 1}\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s + \frac{1}{R\,C}}\right\} = \text{e}^{-t/(R\,C)}$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{R\,C}{s\,(R\,C\,s + 1)}\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{R\,C}{s} - \frac{R\,C}{s + \frac{1}{R\,C}}\right\} = R\,C\left(1 - \text{e}^{-t/(R\,C)}\right)$$

em que foi usada expansão em frações parciais no segundo caso. Usando esses dois resultados, a transformada inversa de $\tilde{V}$ pode escrever-se da forma seguinte:

$$\begin{aligned} V(t) = {} & \frac{V_0\,R\,C}{t_0}\left(1 - \text{e}^{-t/(R\,C)}\right) - V_o\,u(t - t_0)\,\text{e}^{-(t - t_0)/(R\,C)} \\ & - \frac{V_0\,R\,C}{t_0}\,u(t - t_0)\,\left(1 - \text{e}^{-(t - t_0)/(R\,C)}\right) \end{aligned} \tag{10.34}$$

Este exemplo pode ser resolvido também usando o programa *Maxima*. Começa-se por definir o sinal de entrada (para maior claridade usam-se maiúsculas para as funções do tempo, `Ve`, `V`, `I` e minúsculas para as suas transformadas de Laplace, `ve`, `v`, `i`)

```
(%i1) Ve: V0*t*(1 - unit_step(t - t0)) /t0$
```

Para calcular a transformada de Laplace usa-se a função laplace, à qual devem ser dados 3 argumentos: a função, a variável usada para o tempo e a variável usada para a frequência.

```
(%i2) ve: laplace (Ve, t, s);
```

(%o2) $$-\frac{e^{-s\,t_0}\,V_0}{s^2\,t_0} - \frac{e^{-s\,t_0}\,V_0}{s} + \frac{V_0}{s^2\,t_0}$$

A impedância total e a transformada da corrente no circuito são:

```
(%i3) Zt: R + 1/(C*s)$

(%i4) i: ve/Zt$
```

A transformada do sinal de saída é a tensão na resistência, no domínio da frequência:

```
(%i5) v: expand (R*i);
```

(%o5) $$-\frac{R\,V_0}{s^2\,t_0\,e^{s\,t_0}\,R + \frac{s\,t_0\,e^{s\,t_0}}{C}} - \frac{R\,V_0}{s\,e^{s\,t_0}\,R + \frac{e^{s\,t_0}}{C}} + \frac{R\,V_0}{s^2\,t_0\,R + \frac{s\,t_0}{C}}$$

o comando expand foi usado para separar os 3 termos na expressão. Neste momento devia ser possível calcular diretamente a transformada inversa de `ve`, usando a função ilt do Maxima, mas atualmente (versão 5.43 do Maxima) a função ilt não está completamente implementada e não consegue calcular transformadas inversas de funções com termos exponenciais. Para essas funções, pode-se ignorar a função exponencial, calcular a transformada inversa e a seguir deslocá-la no tempo, usando a propriedade do deslocamento no tempo da transformada de Laplace (equação C.13 do apêndice C).

A separação dos 3 termos, eliminando as funções exponenciais nos dois primeiros termos, pode ser feita da forma seguinte:

```
(%i6) v1: ratsimp (exp(s*t0)*part(v,1));
```

(%o6) $$-\frac{C\,R\,V_0}{s^2\,t_0\,C\,R+s\,t_0}$$

```
(%i7) v2: ratsimp (exp(s*t0)*part(v,2));
```

(%o7) $$-\frac{C\,R\,V_0}{s\,C\,R+1}$$

```
(%i8) v3: part(v,3);
```

(%o8) $$\frac{R\,V_0}{s^2\,t_0\,R+\frac{s\,t_0}{C}}$$

e podem-se calcular as correspondentes transformadas inversas de Laplace

```
(%i9) V1: ilt (v1, s, t)$
(%i10) V2: ilt (v2, s, t)$
(%i11) V3: ilt (v3, s, t)$
```

Finalmente, pela propriedade de deslocamento no tempo (equação C.13) obtém-se $V(t)$

```
(%i12) V:subst (t=t - t0, ratsimp(V1+V2))*unit_step(t - t0) + V3;
```

(%o12) $$\frac{u(t-t_0)\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{CR}}\left((C\,R-t_0)\,\mathrm{e}^{\frac{t_0}{CR}}-C\,R\,\mathrm{e}^{\frac{t}{CR}}\right)V_0}{t_0}-\frac{C\,R\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{CR}}\,V_0}{t_0}+\frac{C\,R\,V_0}{t_0}$$

esta expressão é equivalente à já obtida na equação 10.34. A vantagem de utilizar o Maxima é que se pode usar este resultado, por exemplo, para representar o gráfico do sinal de saída, dando valores numéricos aos parâmetros.

Por exemplo, com os parâmetros $t_0 = 5$, $R = 2$, $C = 1$ e $V_0 = 3$ o gráfico obtém-se com o comando:

```
(%i13) plot2d(subst([t0=5,R=2,C=1,V0=3],V),[t,0,10],[ylabel,"V"])$
```

A figura 10.9 mostra o gráfico obtido para o sinal de saída.

A descontinuidade em $t = 5$ deve-se a que entre $t = 0$ e $t = 5$ a fonte alimenta tanto o condensador como a resistência, passando o condensador a ser elemento ativo no circuito e alimentando a resistência, a partir do instante em que a tensão da fonte desaparece, em $t = 5$. O sentido da corrente inverte-se assim em $t = 5$, dando origem à mudança abrupta no sinal da tensão de saída.

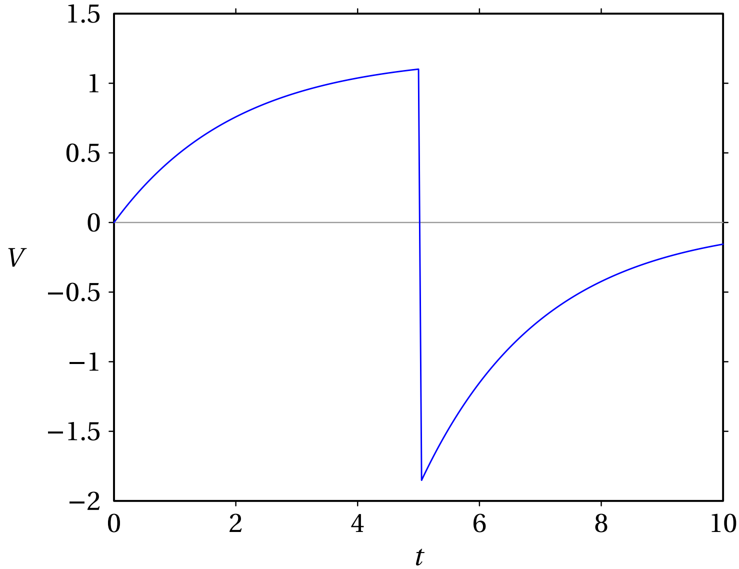


Figura 10.9.: Sinal de saída no exemplo 10.2 com: $t_0 = 5$, $R = 2$, $C = 1$ e $V_0 = 3$.

Outra função do Maxima que é bastante útil para calcular integrais e transformadas inversas é partfrac, para obter expansões em frações parciais. É necessário dar dois argumentos a essa função: a expressão a ser expandida e a variável nessa expressão. Por exemplo, a expansão:

$$\frac{R\,C}{s\,(R\,C\,s+1)} = \frac{R\,C}{s} - \frac{R^2\,C^2}{R\,C\,s+1}$$

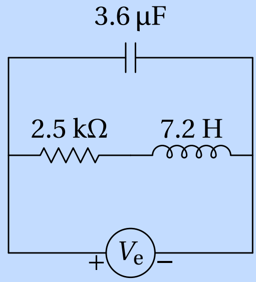
usada no exemplo anterior para obter o resultado 10.34, podia ser obtida com o comando:

```
(%i14) partfrac (R*C/(s*(R*C*s + 1)), s);
```

(%o14) $$\frac{C\,R}{s} - \frac{C^2\,R^2}{s\,C\,R+1}$$

Exemplo 10.3
No circuito da figura, calcule as transformadas de Laplace das tensões e correntes em cada um dos 3 dispositivos, em função da transformada da tensão de entrada, $\tilde{V}_e$. Encontre as expressões para essas tensões e correntes, em função do tempo, no caso particular em que a entrada é

uma fonte ideal de tensão contínua com f.e.m. ε.

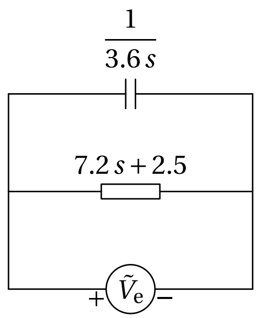


Resolução. Convém começar pela escolha de um sistema de unidades que facilite os cálculos numéricos. Para todas as impedâncias (resistências) usam-se kΩ e para as capacidades μF; isso implica usar ms como unidade de tempo e H como unidade de indutância. Usando V para as tensões, as correntes estarão em mA.

Com esse sistema de unidades, as impedâncias do condensador, da resistência e do indutor são: $1/(3.6\,s)$, 2.5 e $7.2\,s$ onde s é medida em kHz. A resistência e o indutor estão em série e podem ser combinados numa única impedância com valor:

$$7.2\,s + 2.5 = 7.2\left(s + \frac{1}{2.88}\right)$$

Note-se que a última simplificação é uma questão de gosto, para trabalhar com contantes de tempo e neste caso $2.88 = 7.2/2.5$ é a constante de tempo para esse segmento do circuito. O circuito original é então equivalente ao seguinte circuito com dois elementos em paralelo:



Nos dois elementos em paralelo a tensão é a mesma, igual à tensão V_e.

Como tal, a transformada da corrente que passa através do condensador é

$$\tilde{I}_C = \frac{\tilde{V}_\mathrm{e}}{Z_C} = 3.6\, s\, \tilde{V}_\mathrm{e}$$

e a transformada da corrente através da resistência e do condensador é

$$\tilde{I}_R = \tilde{I}_L = \frac{\tilde{V}_\mathrm{e}}{Z_{RL}} = \frac{\tilde{V}_\mathrm{e}}{7.2\, s + 2.5}$$

As transformadas das tensões na resistência e no indutor são:

$$\tilde{V}_R = R\, \tilde{I}_R = \frac{2.5\, \tilde{V}_\mathrm{e}}{7.2\, s + 2.5} \qquad \tilde{V}_R = Z_L\, \tilde{I}_R = \frac{7.2\, s\, \tilde{V}_\mathrm{e}}{7.2\, s + 2.5}$$

No caso em que a fonte é de tensão contínua, $V_\mathrm{e} = \varepsilon$, e portanto,

$$\tilde{V}_\mathrm{e} = \varepsilon / s$$

No condensador,

$$V_C = V_\mathrm{e} = \varepsilon \qquad \tilde{I}_C = 3.6\varepsilon \qquad \Longrightarrow \qquad I_C = 3.6\,\varepsilon\delta(t)$$

onde $\delta(t)$ é a função delta de Dirac (impulso unitário). Refira-se que a corrente é infinita em $t = 0$ e nula em outros instantes, mas o integral da corrente é igual à carga armazenada no condensador, $3.6\,\varepsilon$. Esta solução é apenas uma aproximação, admitindo que a resistência das armaduras do condensador é nula; na realidade essas armaduras têm uma pequena resistência r, a tensão não aumenta instantaneamente até ε mas demorará um tempo pequeno da ordem de $r\,C$ e a corrente não será realmente infinita, mas sim muito elevada num pequeno intervalo de tempo da ordem de $r\,C$.

Na resistência:

$$\tilde{I}_R = \frac{\varepsilon}{s\,(7.2\, s + 2.5)} \qquad \Longrightarrow \qquad I_R = 0.4\,\varepsilon\left(1 - \mathrm{e}^{-t/2.88}\right)$$

$$V_R = 2.5\, I_R \qquad \Longrightarrow \qquad V_R = \varepsilon\left(1 - \mathrm{e}^{-t/2.88}\right)$$

ou seja, a tensão aumenta exponencialmente desde zero até ε e a corrente aumenta exponencialmente desde zero até $0.4\,\varepsilon$.

No indutor:

$$I_L = I_R = 0.4\,\varepsilon\left(1 - \mathrm{e}^{-t/2.88}\right) \qquad V_L = \varepsilon - V_R = \varepsilon \mathrm{e}^{-t/2.88}$$

e conclui-se que a tensão decresce exponencialmente desde ε até 0 e a corrente aumenta exponencialmente desde 0 até $0.4\,\varepsilon$.

Os resultados obtidos no exemplo anterior, no caso em que a tensão de entrada é contínua, podem ser corroborados tendo em conta que, para tensões constantes, após um tempo suficientemente elevado, um condensador comporta-se como um circuito aberto (impedância infinita porque a frequência é nula) e um indutor como um curto circuito (impedância nula porque a frequência é nula).

Como tal, a corrente no condensador deve-se aproximar de 0 e a tensão de ε. No indutor e na resistência a corrente deve-se aproximar-se de $0.4\,\varepsilon$; a tensão na resistência aproxima-se de ε e no indutor tende para 0.

10.7. Função de transferência

As equações diferenciais dos circuitos com fontes, resistências, condensadores e indutores são sempre lineares. Se em $t < 0$ todas as tensões e correntes são nulas, a transformada de Laplace da equação do circuito fica igual a um polinómio $P(s)$, vezes a transformada do sinal de saída $\tilde{V}(s)$, igual a outro polinómio $Q(s)$, vezes a transformada do sinal de entrada $\tilde{V}_\text{e}(s)$:

$$P(s)\,\tilde{V}(s) = Q(s)\,\tilde{V}_\text{e}(s) \tag{10.35}$$

A expressão geral para a transformada do sinal de saída é então

$$\boxed{\tilde{V}(s) = H(s)\,\tilde{V}_\text{e}(s)} \tag{10.36}$$

onde a função:

$$H(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} \tag{10.37}$$

chama-se **função de transferência**. Refira-se que a função $P(s)$ no denominador é o **polinómio característico** da respetiva equação diferencial homogénea. Como tal, os valores próprios da equação homogénea são pontos onde a função de transferência H é singular (infinita).

O conhecimento da função de transferência de um circuito permite calcular a saída para diferentes sinais de entrada, por simples multiplicação de H pelas transformadas de Laplace dos sinais de entrada, $\tilde{V}_\text{e}$, seguida do cálculo das transformadas inversas.

Por exemplo, no caso do circuito do exemplo 10.2, a função de transferência é obtida calculando $\tilde{V}/\tilde{V}_\mathrm{e}$ na equação 10.33

$$H(s) = \frac{R\,C\,s}{R\,C\,s + 1} \tag{10.38}$$

Quando a frequência s é igual a $1/(R\,C)$ esta função de transferência é igual a 0.5. Se a frequência for menor que $1/(R\,C)$, H aproxima-se de 0 e se s for maior que $1/(RC)$, H aproxima-se de 1. Isso quer dizer que as frequências menores que a frequência de corte, $1/(R\,C)$, serão atenuadas, enquanto que as frequências elevadas não sofrem muita atenuação, razão pela qual o circuito do exemplo 10.2 é denominado **filtro passa-alto**. A figura 10.10 mostra o gráfico desta função de transferência, no caso específico em que $R\,C$ é igual a 2 unidades de tempo.

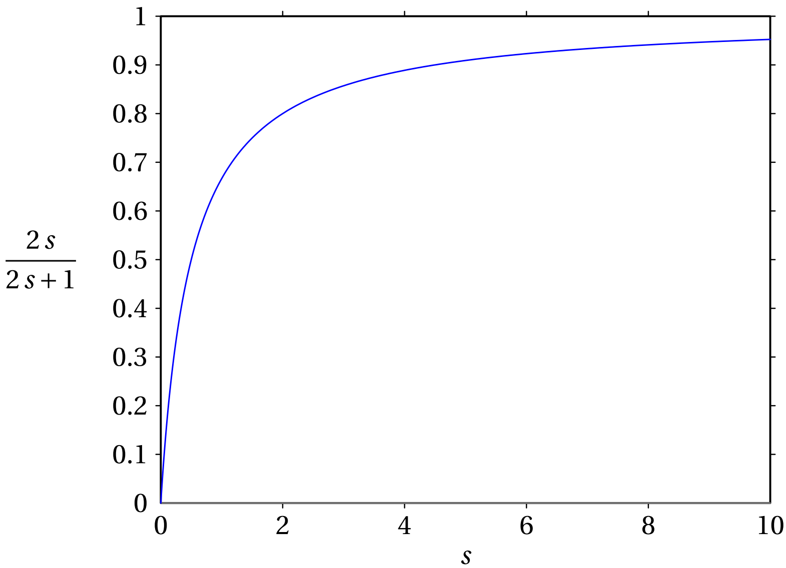
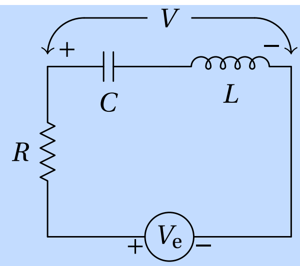


Figura 10.10.: Função de transferência de um filtro passa-alto com $R\,C = 2$.

Exemplo 10.4
Encontre a função de transferência e a equação diferencial do circuito representado no diagrama.



Resolução. A impedância total do segmento onde está a ser medida a tensão V é:

$$Z_{LC} = \frac{1}{C\,s} + L\,s = \frac{L\,s^2 + \dfrac{1}{C}}{s}$$

e a impedância total do circuito é $Z_{LC} + R$. A transformada da corrente no circuito é então

$$\tilde{I} = \frac{s\,\tilde{V}_e}{L\,s^2 + R\,s + \dfrac{1}{C}}$$

A transformada da tensão de saída é igual ao produto da impedância à saída pela transformada da corrente

$$\tilde{V} = Z_{LC}\,\tilde{I} = \left(\frac{L\,s^2 + \dfrac{1}{C}}{L\,s^2 + R\,s + \dfrac{1}{C}}\right)\tilde{V}_e$$

e a função de transferência é:

$$H = \frac{s^2 + \dfrac{1}{L\,C}}{s^2 + \dfrac{R\,s}{L} + \dfrac{1}{L\,C}}$$

O denominador de H é o polinómio caraterístico da equação do circuito e o numerador, multiplicado por $\tilde{V}_e$, é a transformada do segundo membro dessa equação; como tal, a equação diferencial do circuito é:

$$\ddot{V} + \frac{R\,\dot{V}}{L} + \frac{V}{L\,C} = \ddot{V}_e + \frac{V_e}{L\,C}$$

Perguntas

1. A equação diferencial de um circuito é: $3\ddot{V} - 2\dot{V} + V = 2\dot{V}_e$. Qual das seguintes funções representa a função de transferência desse circuito?

A. $\dfrac{2}{3s^2 - 2s + 1}$

B. $\dfrac{2s}{3s^2 - 2s + 1}$

C. $\dfrac{2}{s^2 - 2s + 3}$

D. $\dfrac{-2}{3s^2 - 2s + 1}$

E. $\dfrac{2s}{s^2 - 2s + 3}$

2. A função de transferência de um filtro é: $H(s) = \dfrac{s + 10}{2 - s}$. Determine a expressão do sinal de saída $V(t)$ quando o sinal de entrada é $V_e(t) = e^{-t}$.

A. $3e^{t} - 4e^{2t}$

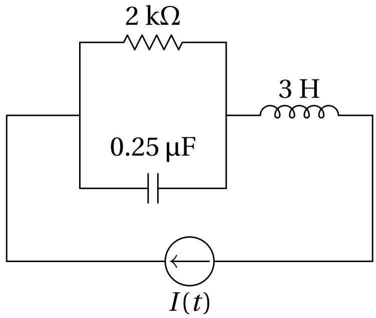
B. $e^{-t} - 4e^{-2t}$

C. $4e^{-t} - 3e^{-2t}$

D. $3e^{-t} - 4e^{2t}$

E. $3e^{t} - 2e^{-2t}$

3. No circuito do diagrama, a expressão da corrente fornecida pela fonte é $I(t) = e^{-2t}$ (em mA se o tempo estiver em ms). Encontre a expressão da corrente através da resistência em função do tempo.



A. $(2 + t)e^{-2t}$

B. $2e^{-2t}$

C. e^{-2t}

D. $2te^{-2t}$

E. $0.5e^{-2t}$

4. Uma resistência com valor R, um condensador com capacidade C e um indutor com indutância L estão ligados em paralelo entre dois pontos de um circuito. Determine a impedância equivalente desse sistema em paralelo.

A. $\dfrac{R L s}{R L C s^2 + L s + R}$

B. $\dfrac{R L s}{L C s^2 + R C s + 1}$

C. $\dfrac{L C s^2 + R C s + 1}{C s}$

D. $\dfrac{R L C s^2 + L s + R}{R L s}$

E. $\dfrac{L C s^2 + R C s + 1}{R L s}$

5. Quando a entrada num circuito é a tensão contínua $V_\text{e} = 5$, a saída é $2.5\,(1 - \text{e}^{-2\,t})$. Se no mesmo circuito a entrada for $5\,\text{e}^{-t}$ qual será a saída?

A. $2.5\,\text{e}^{-t}\left(1 - \text{e}^{-2\,t}\right)$

B. $5\,\text{e}^{-t}\left(1 - \text{e}^{-2\,t}\right)$

C. $2.5\,\text{e}^{-t}\left(1 - \text{e}^{-t}\right)$

D. $5\,\text{e}^{-t}\left(1 - \text{e}^{-t}\right)$

E. $2.5\left(1 - \text{e}^{-2(t+1)}\right)$

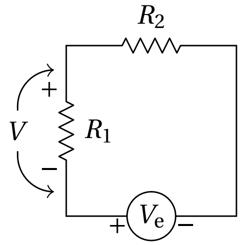
Problemas

1. Um condensador de 50 μF é carregado usando uma fonte com f.e.m. de 6 V e resistência interna de 350 Ω, através de uma resistência de 100 kΩ. (*a*) Calcule a corrente inicial no instante $t = 0$ em que é ligada a fonte. (*b*) Num instante $t_1 > 0$, a corrente é de 20 μA; calcule as diferenças de potencial no condensador e na resistência nesse instante. (*c*) Calcule a carga armazenada no condensador em t_1. (*d*) Calcule o valor de t_1.

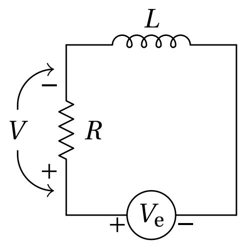
2. A memoria RAM de um computador funciona com uma fonte de alimentação de 5 V, extraindo uma corrente de 80 mA. O conteúdo da memoria é apagado se a tensão de alimentação diminuir abaixo de 3 V. Para proteger os dados na memória em caso de cortes na fonte de alimentação, liga-se um condensador de 1 F aos terminais da fonte de alimentação. Faça uma estimativa do tempo que o condensador pode manter os dados na memoria. Admita que a única resistência no circuito é a da memória RAM.

3. Uma resistência de 3 kΩ e um condensador de 5 nF estão ligados em série a uma fonte com tensão $V_e(t) = 2-2\,t$, entre $t = 0$ e $t = 4$, e $V_e(t) = 0$ nos outros instantes (t medido em µs e V_e em V). Calcule a corrente no circuito em $t > 0$.

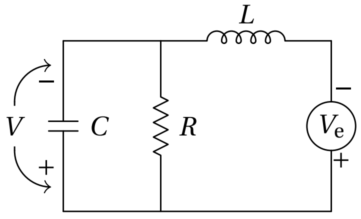
4. O circuito na figura é um **atenuador inversor** (observe a posição dos sinais positivo e negativo da saída). (*a*) Encontre a equação do circuito. (*b*) Calcule a função de transferência. (*c*) Explique a designação de atenuador inversor.



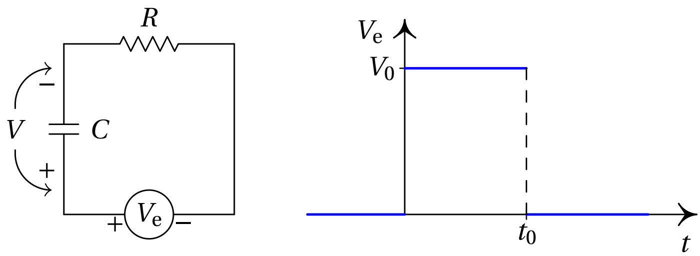
5. No circuito LR da figura: (*a*) Encontre a função de transferência. (*b*) Calcule a tensão $V(t)$ no caso em que o sinal de entrada é uma fonte de tensão contínua com força eletromotriz $V_e = \varepsilon$. (*c*) Represente o gráfico do sinal $V(t)$ calculado na alínea anterior.



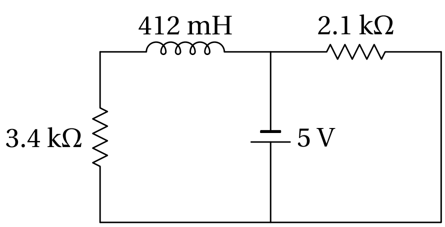
6. No circuito da figura: (*a*) Calcule a impedância total, em função de s. (*b*) Calcule a transformada da corrente que passa pelo indutor. (*c*) Encontre a função de transferência, se a tensão de saída for medida no condensador. (*d*) Determine a equação diferencial para a tensão de saída.



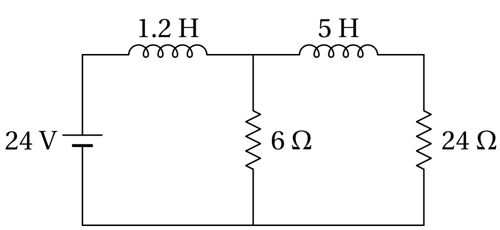
7. O circuito na figura é denominado **filtro passa-baixo**. Escreva a equação que relaciona o sinal de saída com o sinal de entrada. Encontre a função de transferência do sistema e determine o sinal de saída quando o sinal de entrada é o indicado no lado direito da figura. Explique porque se designa este circuito de filtro passa-baixo.



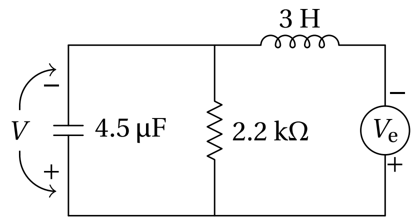
8. No circuito representado no diagrama, a fonte foi ligada no instante $t = 0$, quando não havia corrente no indutor. Determine a expressão da voltagem na resistência de 3.4 kΩ, em função do tempo t. Com a expressão obtida, confirme as respostas dadas para o 11 no capítulo 9.



9. A fonte no circuito do diagrama foi ligada no instante $t = 0$, quando a corrente nos dois indutores era nula. Encontre as expressões das correntes nos dois indutores em função do tempo. Com as expressões obtidas, confirme as respostas dadas para o 12 no capítulo 9.



10. A figura mostra o diagrama de circuito de um filtro. O sinal de entrada é V_e e o sinal de saída é V. Encontre a função de transferência do filtro e a equação diferencial que permite calcular $V(t)$ para um sinal de entrada $V_e(t)$ dado.



Respostas

Perguntas: 1. B. **2.** D. **3.** D. **4.** A. **5.** D.

Problemas

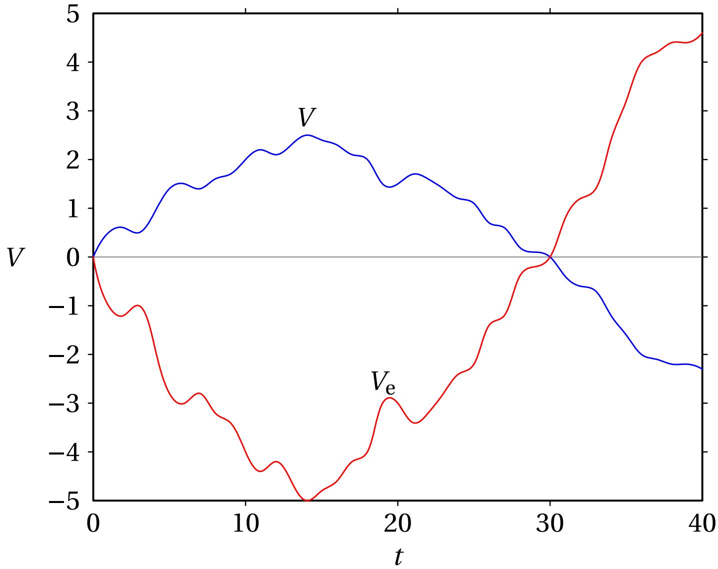
1. (*a*) 59.79 µA. (*b*) 3.993 V no condensador e 2.0 V na resistência. (*c*) 0.200 mC. (*d*) 5.495 s.

2. 32 s.

3. $I(t) = \dfrac{32}{3}\,\mathrm{e}^{-t/15} - 10 + u(t-4)\left(10 - 8\,\mathrm{e}^{-(t-4)/15}\right)$

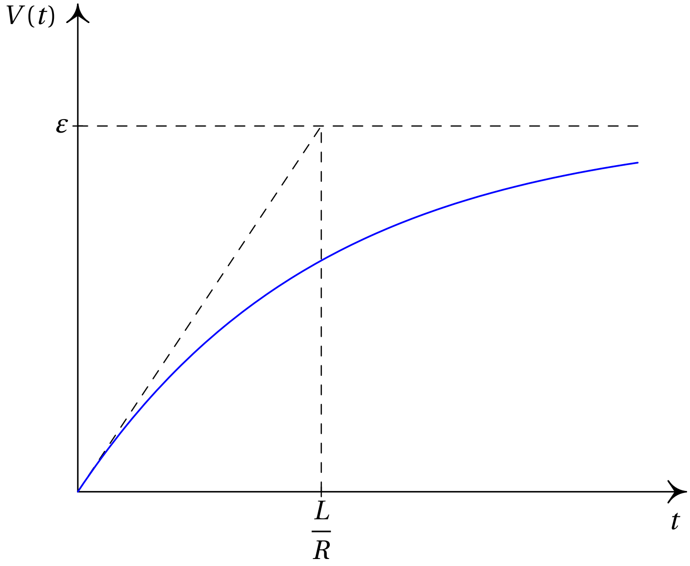
(em mA, se t estiver em segundos).

4. (*a*) $V(t) = -\dfrac{R_1}{R_1 + R_2}\,V_\mathrm{e}(t)$. (*b*) $-\dfrac{R_1}{R_1+R_2}$
(*c*) O sinal de saída tem sempre a mesma forma do sinal de entrada, mas multiplicado por uma constante negativa, com valor absoluto menor que 1, como no exemplo do gráfico seguinte:



5. (*a*) $\dfrac{R}{L\,s + R}$ (*b*) $\varepsilon\left(1 - \mathrm{e}^{-R\,t/L}\right)$

(*c*) O gráfico é o seguinte:



6. (a) $\dfrac{R\,L\,C\,s^2+L\,s+R}{R\,C\,s+1}$ (b) $\dfrac{(R\,C\,s+1)\,\tilde{V}_e}{R\,L\,C\,s^2+L\,s+R}$

(c) $\dfrac{R}{R\,L\,C\,s^2+L\,s+R}$ (d) $L\,C\,\ddot{V}+\dfrac{L}{R}\dot{V}+V=V_e$

7. Equação: $R\,C\,\dot{V}+V=V_e$

Função de transferência: $\dfrac{1}{R\,C\,s+1}$

Saída: $V_0\left(1-e^{-t/(RC)}-u(t-t_0)\left(1-e^{-(t-t_0)/(RC)}\right)\right)$

Chama-se passa-baixo, porque H é 1 para frequências baixas ($s\to 0$) e nula para frequências altas ($s\to\infty$).

8. Em unidades SI, $V(t)=5\left(1-e^{-8252.4\,t}\right)$

9. No indutor de 1.2 H, $I(t)=5-4\,e^{-3\,t}-e^{-8\,t}$ (SI). No indutor de 5 H, $I(t)=1-\dfrac{8}{5}e^{-3\,t}+\dfrac{3}{5}e^{-8\,t}$ (SI)

10. Função de transferência (com s em kHz e voltagens em volts):

$H(s)=\dfrac{2.2}{29.7\,s^2+3\,s+2.2}$

Equação diferencial (voltagens em volts e tempo em milisegundos):

$29.7\,\ddot{V}+3\,\dot{V}+2.2\,V=2.2\,V_e$