C. Transformada de Laplace

C.1. Definição

Neste apêndice apresenta-se apenas um sumário sobre a transformada de Laplace. Um estudo mais completo do tema encontra-se nos livros de matemática para engenharia ou nos livros sobre equações diferenciais, por exemplo: *An Introduction to Differential Equations and their Applications* (Farlow, 1994).

Define-se a transformada de Laplace de uma função $f(t)$ como o integral:

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-s\,t}\,\mathrm{d}\,t \tag{C.1}$$

Note-se que o resultado desse integral já não depende de t mas sim do parâmetro s, que se admite ser um número real.

Neste livro, para representar a transformada de Laplace, utiliza-se um til por cima da letra que representa a função. Por exemplo, $\tilde{g}(s)$ é a função obtida por aplicação da transformada de Laplace à função $g(t)$.

A variável s tem unidades de inverso do tempo, ou seja unidades de frequência, já que o expoente $s\,t$ é adimensional. Comot al, $g(t)$ e $\tilde{g}(s)$ costumam ser designadas de representações da função no **domínio do tempo** e no **domínio da frequência**, respetivamente.

Tal como no caso da derivação, uma forma rápida de calcular a transformada de uma função é por meio de algumas regras simples que se vão obter nas secções seguintes. A transformada inversa de uma função $\tilde{f}(s)$ é a função $f(t)$ cuja transformada de Laplace é igual a $\tilde{f}(s)$.

Para que a transformada de Laplace de uma função $f(t)$ exista, é necessário que $f(t)$ observe as duas propriedades seguintes:

1. A função tem de ser **parcelarmente contínua**, isto é, $f(t)$ pode ter alguns pontos isolados onde é descontínua, mas é necessariamente con-

tínua em cada intervalo entre dois pontos de descontinuidade.

2. A função $f(t)$ deve ser de **ordem exponencial**: existe um número real a tal que o limite

$$\lim_{t\to\infty} |f(t)|\,\mathrm{e}^{-a\,t} \tag{C.2}$$

existe. O domínio da respetiva transformada de Laplace $\tilde{f}(t)$ é $s > a$.

Note-se que no cálculo da transformada de Laplace não interessa a forma como a função seja definida em $t \le 0$. Isto prende-se com o intervalo de integração usado na definição da transformada. É possível usar outros intervalos diferentes, mas o intervalo $t > 0$ é particularmente útil nos problemas físicos estudados neste livro, em que unicamente interessa a evolução de um sistema físico a partir de um instante inicial $t = 0$.

C.2. Propriedades

C.2.1. Linearidade

Para quaisquer duas funções $f(t)$ e $g(t)$ e duas constantes a e b, verifica-se:

$$\boxed{\mathscr{L}\{a\,f(t) + b\,g(t)\} = a\,\tilde{f}(s) + b\,\tilde{g}(s)} \tag{C.3}$$

e a transformada inversa também é um operador linear:

$$\boxed{\mathscr{L}^{-1}\{a\,\tilde{f}(s) + b\,\tilde{g}(s)\} = a\,f(t) + b\,g(t)} \tag{C.4}$$

C.2.2. Derivada da transformada

A derivada da transformada de $f(t)$, em ordem à frequência s é,

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{f}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\int_0^\infty f(t)\,\mathrm{e}^{-s\,t}\,\mathrm{d}\,t = -\int_0^\infty t\,f(t)\,\mathrm{e}^{-s\,t}\,\mathrm{d}\,t = -\mathscr{L}\{t\,f(t)\} \tag{C.5}$$

e derivando sucessivamente n vezes conclui-se que

$$\boxed{\mathscr{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{\mathrm{d}^n\tilde{f}}{\mathrm{d}s^n}} \tag{C.6}$$

C.2.3. Transformada da derivada

A transformada da derivada de $f(t)$ em ordem ao tempo está relacionada com a própria transformada de $f(t)$. Integrando por partes o integral que define a transformada, obtém-se:

$$\mathscr{L}\{f'\} = \int_0^\infty f' \mathrm{e}^{-s\,t}\,\mathrm{d}\,t = f\,\mathrm{e}^{-s\,t}\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty f\,\mathrm{e}^{-s\,t}\,\mathrm{d}\,t \tag{C.7}$$

o último integral é a transformada de $f(t)$ e, no primeiro termo, o limite de $f\,\mathrm{e}^{-s\,t}$ quando t tende para infinito é zero, já que $f(t)$ é uma função de ordem exponencial. Como tal, obtém-se a seguinte relação:

$$\boxed{\mathscr{L}\{f'\} = s\,\tilde{f} - f(0)} \tag{C.8}$$

A transformada de derivadas de ordem superior calcula-se aplicando a mesma propriedade várias vezes sucessivas; por exemplo, a transformada da segunda derivada é igual a:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{f''\} = s\,\mathscr{L}\{f'\} - f'(0) &= s\left(s\,\tilde{f} - f(0)\right) - f'(0)\\ &= s^2\,\tilde{f} - s\,f(0) - f'(0)\end{aligned} \tag{C.9}$$

C.2.4. Deslocamento na frequência

A transformada do produto entre uma função exponencial e outra função qualquer é:

$$\boxed{\mathscr{L}\{\mathrm{e}^{a\,t} f(t)\} = \int_0^\infty f\,\mathrm{e}^{(a-s)\,t}\,\mathrm{d}\,t = \tilde{f}(s-a)} \tag{C.10}$$

Nomeadamente, quando se multiplica uma função por $\mathrm{e}^{a\,t}$, no domínio do tempo, a sua representação no domínio das frequências desloca-se a unidades no sentido positivo do eixo da frequência s.

C.2.5. Deslocamento no tempo

Define-se a função **degrau unitário**, ou função de Heaviside, como:

$$u(t-a) = \begin{cases} 0 & ,\, t \le a \\ 1 & ,\, t > a \end{cases} \tag{C.11}$$

Como tal, o produto,

$$u(t-a)\,f(t-a) \tag{C.12}$$

é a função $f(t)$ deslocada uma distância a no sentido positivo do eixo do tempo t, sendo nula para $t < a$. Calculando a transformada de Laplace desse produto obtém-se:

$$\mathcal{L}\{u(t-a)\,f(t-a)\} = \int_a^\infty f(t-a)\,\mathrm{e}^{-s\,t}\,\mathrm{d}\,t$$
$$= \int_0^\infty f(r)\,\mathrm{e}^{-s(r+a)}\,\mathrm{d}\,r = \mathrm{e}^{-a\,s}\int_0^\infty f(r)\,\mathrm{e}^{-s\,r}\,\mathrm{d}\,r$$

e conclui-se que:

$$\boxed{\mathcal{L}\{u(t-a)\,f(t-a)\} = \mathrm{e}^{-a\,s}\,\tilde{f}(s)} \tag{C.13}$$

Isto é, quando a função é deslocada a unidades no sentido positivo do tempo t, a sua representação no domínio da frequência fica multiplicada por $\mathrm{e}^{-a\,s}$.

Note-se que no caso particular $a = 0$, esta propriedade implica que a transformada de $u(t)\,f(t)$ é idêntica à transformada de $f(t)$; o produto $u(t)\,f(t)$ simplesmente torna o resultado nulo para $t \le 0$ deixando a função igual para $t > 0$ e como já foi dito, no cálculo da transformada de Laplace apenas interessa a definição da função em $t > 0$.

Esta propriedade é muito útil para calcular as transformadas de Laplace de funções com descontinuidades. Uma outra forma equivalente é

$$\boxed{\mathcal{L}\{u(t-a)\,f(t)\} = \mathrm{e}^{-a\,s}\mathcal{L}\{f(t+a)\}} \tag{C.14}$$

C.3. Transformadas de funções importantes

C.3.1. Polinómios

A transformada de t^p, onde p é qualquer número real, pode ser simplificada usando a mudança de variável $u = s\,t$

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{t^p\} &= \int_0^\infty t^p\,\mathrm{e}^{-s\,t}\,\mathrm{d}\,t = \int_0^\infty \left(\frac{u}{s}\right)^p \mathrm{e}^{-u}\,\frac{\mathrm{d}\,u}{s} \\ &= s^{-(p+1)}\int_0^\infty u^p\,\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}\,u \end{aligned} \tag{C.15}$$

e este último integral é a **função gama** de $p+1$; como tal, a transformada de t^p é

$$\boxed{\mathscr{L}\{t^p\} = \frac{\Gamma\left(p+1\right)}{s^{p+1}}} \tag{C.16}$$

em particular, quando p é um número inteiro positivo n, a função gama de $n+1$ é igual ao fatorial de n e obtém-se:

$$\boxed{\mathscr{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}} \tag{C.17}$$

e para $n = 0$

$$\boxed{\mathscr{L}\{1\} = \frac{1}{s}} \tag{C.18}$$

C.3.2. Funções exponenciais

Aplicando a propriedade de deslocamento na frequência s, com $f(t) = 1$ e tendo em conta que $\mathscr{L}\{1\} = 1/s$, obtém-se a transformada da função exponencial,

$$\mathscr{L}\{\mathrm{e}^{a\,t}\} = \frac{1}{s-a} \tag{C.19}$$

e como a derivada de $1/(s-a)$ é $-1/(s-a)^2$, usando a propriedade da derivada da transformada conclui-se:

$$\boxed{\mathscr{L}\{t\,\mathrm{e}^{a\,t}\} = \frac{1}{(s-a)^2}} \tag{C.20}$$

O mesmo resultado pode ser obtido a partir da transformada de t e usando a propriedade de deslocamento em s.

C.3.3. Funções sinusoidais

Para calcular a transformada de Laplace das funções sinusoidais é conveniente usar a fórmula de Euler:

$$\begin{aligned} f(t) &= f_{\text{máx}}\cos\left(\omega\, t+\varphi\right) = \mathrm{Re}\left(f_{\text{máx}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega\, t+\varphi)}\right) \\ &= \mathrm{Re}\left(f_{\text{máx}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\, t}\right) \end{aligned} \tag{C.21}$$

onde $\mathrm{Re}\{z\}$ é a função que dá a parte real do número complexo z. Com tal, a transformada de Laplace da função sinusoidal $f(t)$ é:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(s) &= \mathscr{L}\left\{\mathrm{Re}\left(f_{\text{máx}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\, t}\right)\right\} \\ &= \mathrm{Re}\left(f_{\text{máx}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\,\mathscr{L}\left\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\, t}\right\}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{f_{\text{máx}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}}{s-\mathrm{i}\omega}\right) \end{aligned} \tag{C.22}$$

Por simplicidade, costuma-se omitir a função Re, ficando implícito que só interessa a parte real. Definindo o **fasor F** da função sinusoidal $f(t)$ como o produto $f_{\text{máx}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$, a transformada de Laplace da função sinusoidal é então:

$$\boxed{\mathscr{L}\{f_{\text{máx}}\cos\left(\omega\, t+\varphi\right)\} = \frac{\mathbf{F}}{s-\mathrm{i}\omega}} \tag{C.23}$$

onde $\mathbf{F}$ é o respetivo fasor. Como $\sin x = \mathrm{Re}\left(-\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}\right)$, conclui-se também que:

$$\boxed{\mathscr{L}\{f_{\text{máx}}\sin\left(\omega\, t+\varphi\right)\} = \frac{-\mathrm{i}\,\mathbf{F}}{s-\mathrm{i}\omega}} \tag{C.24}$$

C.3.4. Função impulso unitário

A função **impulso unitário**, ou função delta de Dirac, $\delta(t-a)$, é a derivada da função degrau unitário $u(t-a)$. Note-se que não é realmente uma função, porque em $t=a$ a função $u(t-a)$ é descontínua e a sua derivada não existe.

Pode interpretar-se $\delta(t-a)$ usando uma função degrau unitário contínua, que não muda abruptamente de 0 para 1 em $t=a$, mas sim aumentando gradualmente de 0 para 1 num pequeno intervalo que inclui $t = a$; como tal, $\delta(t-a)$ é nula excepto nesse pequeno intervalo em que o degrau unitário passa de 0 para 1, e a área total sob $\delta(t-a)$ deve ser igual a 1. No limite em que o comprimento desse intervalo se aproxima de zero, o valor de $\delta(t-a)$ aproxima-se de infinito, em $t = a$, e de zero em qualquer outro valor de $t \neq a$.

Uma função $f(t)$, contínua em a, verifica a propriedade seguinte:

$$\int\limits_{-\infty}^{t} f(z)\,\delta(z-a)\,\mathrm{d}\,z = \begin{cases} 0 & ,\, t \le a \\ f(a) & ,\, t > a \end{cases} \tag{C.25}$$

A transformada da função impulso unitário é a transformada da derivada da função degrau unitário. Aplicando a propriedade da transformada da derivada, obtém-se:

$$\boxed{\mathscr{L}\{\delta(t-a)\} = \mathrm{e}^{-a\,s}} \tag{C.26}$$

As propriedades da transformada de Laplace e as transformadas das funções calculadas nas secções anteriores encontram-se resumidas na tabela C.1.

Tabela C.1.: Propriedades da transformada de Laplace.

Função	**Transformada**
$f(t)$	$\tilde{f}(s)$
t^n	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$
$e^{a\,t} f(t)$	$\tilde{f}(s-a)$
$f'(t)$	$s\,\tilde{f}(s) - f(0)$
$\displaystyle\int_0^t f(z)\,\mathrm{d}z$	$\dfrac{1}{s}\,\tilde{f}(s)$
$t\,f(t)$	$-\dfrac{\mathrm{d}\tilde{f}}{\mathrm{d}s}$
$\dfrac{f(t)}{t}$	$\displaystyle\int_s^\infty \tilde{f}(r)\mathrm{d}r$
$u(t-a)\,f(t-a)$	$e^{-a\,s}\,\tilde{f}(s)$
$u(t-a)\,f(t)$	$e^{-a\,s}\,\mathscr{L}\{f(t+a)\}$
$\delta(t-a)$	$e^{-a\,s}$
$f\left(\dfrac{t}{a}\right)$	$a\,\tilde{f}(a\,s)$
$f_{\text{máx}}\cos\left(\omega\,t+\varphi\right)$	$\dfrac{\mathbf{F}}{s-\mathrm{i}\omega}$
$f_{\text{máx}}\sin\left(\omega\,t+\varphi\right)$	$\dfrac{-\mathrm{i}\,\mathbf{F}}{s-\mathrm{i}\omega}$