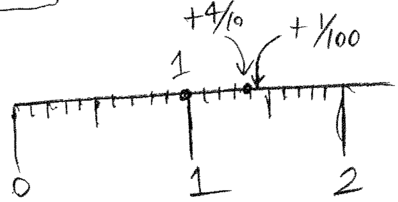
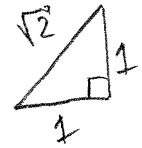
MECÂNICA QUÂNTICA. Aula 2. 12/3/2025

Números racionais: exemplo: $1.41 = 1 + \frac{4}{10} + \frac{1}{100}$



Números irracionais. exemplo: $\sqrt{2}$

solução de $\boxed{x^2 = 2}$



NÚMEROS COMPLEXOS.

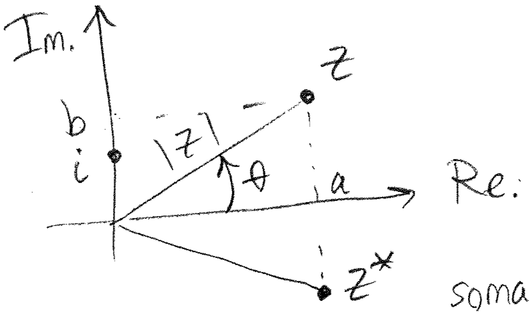
Exemplo: soluções z da equação $z^2 - 2az + a^2 + b^2 = 0$

$\Rightarrow z = a \pm \sqrt{-b^2}$

$\boxed{z = a + i\,b}$ $\quad i = \sqrt{-1}$ (uma das duas raízes)

parte real ... parte imaginária

Plano Complexo



módulo: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

argumento: $\theta = \mathrm{Arctan}\left(\frac{a}{b}\right)$

conjugado: $z^* = a - ib$

soma: $(a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$

produto: $(a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1 a_2 - b_1 b_2 + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$

Propriedades:

① $z z^* = |z|^2$

② $(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*$

③ $z = z^* \Leftrightarrow z$ é real

④ $(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*$

Exemplo. Calcule $\dfrac{[(2 - i3) + (-1 + i7)] \times (3 - i2)}{2 + i3}$

Resolução: $(2 - i3) + (-1 + i7) = 1 + i4$

$(1 + i4)(3 - i2) = 11 + i10$

$$\frac{11 + i10}{2 + i3} = \frac{(11 + i10)(2 - i3)}{(2 + i3)(2 - i3)} = \frac{52 - i13}{4 + 9} = 4 - i$$

ESPAÇOS VETORIAIS COM COEFICIENTES COMPLEXOS

Conjunto de elementos $|A\rangle$, que chamaremos <u>kets</u>, com 2 operações

① Soma vetorial: $|A\rangle + |B\rangle = |C\rangle$

② Produto por número complexo: $z|A\rangle = |D\rangle$

Axiomas:

ⓐ Associatividade: $|A\rangle + (|B\rangle + |C\rangle) = (|A\rangle + |B\rangle) + |C\rangle$

ⓑ Comutatividade: $|A\rangle + |B\rangle = |B\rangle + |A\rangle$

ⓒ Existe um ket $|0\rangle$ tal que: $|A\rangle + |0\rangle = |A\rangle$

ⓓ Para cada ket $|A\rangle$ existe outro ket $|-A\rangle$ tal que: $|A\rangle + |-A\rangle =$

ⓔ Associatividade do produto: $z(w|A\rangle) = (zw)|A\rangle$

ⓕ Distributividade da soma: $z(|A\rangle + |B\rangle) = z|A\rangle + z|B\rangle$

ⓖ Distributividade do produto: $(z+w)|A\rangle = z|A\rangle + w|A\rangle$

Algumas consequências

① $|0\rangle$ é único: Suponha que existe outro $|zero\rangle$, tal que $|A\rangle + |zero\rangle = |$
$\Rightarrow |0\rangle + |zero\rangle = |0\rangle \Rightarrow |zero\rangle = |0\rangle$

② $0|A\rangle = |0\rangle$: $0|A\rangle + z|A\rangle = (0+z)|A\rangle = z|A\rangle \Rightarrow 0|A\rangle = |0\rangle$

③ $z|0\rangle = |0\rangle$: $z|A\rangle + z|0\rangle = z(|A\rangle + |0\rangle) = z|A\rangle \Rightarrow z|0\rangle = |0\rangle$

④ $1|A\rangle = |A\rangle$: $z(1|A\rangle) = (z\times 1)|A\rangle = z|A\rangle \Rightarrow 1|A\rangle = |A\rangle$

⑤ $|-A\rangle$ é único, e igual a $(-1)|A\rangle$: $|A\rangle + (-1)|A\rangle = (1-1)|A\rangle = 0|A\rangle = |0\rangle$
$\Rightarrow |-A\rangle = (-1)|A\rangle$

PRODUTO INTERNO (tambem chamado escalar)

$$|A\rangle \cdot |B\rangle = z \quad \text{(número complexo)}$$

Com as propriedades:

ⓐ comutatividade: $|A\rangle \cdot |B\rangle = (|B\rangle \cdot |A\rangle)^*$

ⓑ distributividade: $|A\rangle \cdot (|B\rangle + |C\rangle) = |A\rangle \cdot |B\rangle + |A\rangle \cdot |C\rangle$

ⓒ $z(|A\rangle \cdot |B\rangle) = |A\rangle \cdot (z|B\rangle)$

ⓓ $|A\rangle \cdot |A\rangle \geq 0$ (real). $= 0$ unicamente se $|A\rangle = |0\rangle$

NORMA (magnitude, módulo) $\quad \left| |A\rangle \right| = \sqrt{|A\rangle \cdot |A\rangle}$

Kets perpendiculares: $\quad |A\rangle \cdot |B\rangle = 0 \quad (= |B\rangle \cdot |A\rangle)$
(ortogonais)

Note-se que:

① $(|A\rangle + |B\rangle) \cdot |C\rangle = \left(|C\rangle \cdot (|A\rangle + |B\rangle)\right)^* = (|C\rangle \cdot |A\rangle)^* + (|C\rangle \cdot |B\rangle)^*$

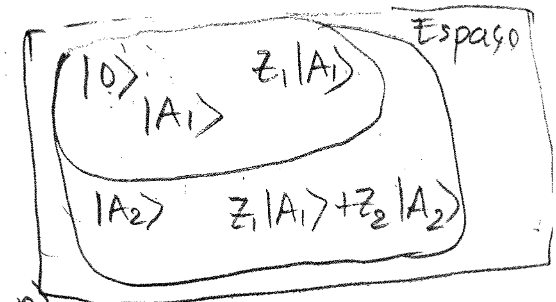
$$\Rightarrow \quad (|A\rangle + |B\rangle) \cdot |C\rangle = |A\rangle \cdot |C\rangle + |B\rangle \cdot |C\rangle$$

② $(z|A\rangle) \cdot |B\rangle = \left(|B\rangle \cdot (z|A\rangle)\right)^* = \left(z\,(|B\rangle \cdot |A\rangle)\right)^* = z^* (|B\rangle \cdot |A\rangle)^*$

$$\Rightarrow \quad (z|A\rangle) \cdot |B\rangle = z^* \left(|A\rangle \cdot |B\rangle\right)$$

Combinações lineares $\quad z_1|A_1\rangle + z_2|A_2\rangle + \dots + z_n|A_n\rangle \quad |A_i\rangle \neq |$

todos os possíveis números z_i geram um subespaço vetorial



Independência linear

$\sum_{i=1}^{n} z_i |A_i\rangle = |0\rangle$ implica $z_i = 0 \ (i = 1, \dots, n)$

caso contrário, $\{|A_i\rangle\}$ é linearmente dependente, ou seja, pelo menos um ket $|A_i\rangle$ está no subespaço gerado pelos outros $n-1$.

BASES

Um conjunto $\{|E_i\rangle\}$, linearmente independente, que gera todo o espaço (subespaço) vetorial, é uma base do espaço (subespaço).

Qualquer ket $|A\rangle$ no espaço (subespaço) pode ser escrito como combinação linear (única) dos elementos da base:

$$|A\rangle = z_1|E_1\rangle + z_2|E_2\rangle + \dots + z_n|E_n\rangle$$

É sempre possível construir uma base: escolhe-se um ket qualquer |E, um ket $|E_2\rangle$ que não esteja no subespaço $z_1|E_1\rangle$, um ket $|E_3\rangle$ que não esteja no subespaço $z_1|E_1\rangle + z_2|E_2\rangle$, etc, até quando $z_1|E_1\rangle + \dots + z_n|E_n\rangle$ seja todo o espaço

$$\boxed{\text{Dimensão do espaço (subespaço)} = n}$$

Qualquer base pode ser convertida em base ortonormal:
$\{|e_i\rangle\}$, com $|e_i\rangle\cdot|e_j\rangle = \delta_{ij}$ (1, se $i=j$, 0 se $i\neq j$)

Procedimento de Gram-Schmidt: $|e_1\rangle = \frac{|E_1\rangle}{||E_1\rangle|}$ $\left(|e_1\rangle\cdot|e_1\rangle = 1\right)$

$$|E_2\rangle_\perp = |E_2\rangle - (|e_1\rangle\cdot|E_2\rangle)|e_1\rangle \quad (|e_1\rangle\cdot|E_2\rangle_\perp = 0) \Rightarrow |e_2\rangle = \frac{|E_2\rangle_\perp}{||E_{2\perp}\rangle|} \quad \begin{pmatrix}|e_2\rangle\cdot|e_2\rangle = \\ |e_1\rangle\cdot|e_2\rangle = \end{pmatrix}$$

$$|E_3\rangle_\perp = |E_3\rangle - (|e_1\rangle\cdot|E_1\rangle)|e_1\rangle - (|e_2\rangle\cdot|E_2\rangle)|e_2\rangle, \quad |e_3\rangle = \frac{|E_3\rangle_\perp}{||E_{3\perp}\rangle|} \quad \ldots$$

COMPONENTES $\boxed{|A\rangle = \sum_{i=1}^{n} A_i|e_i\rangle}$ $|e_j\rangle\cdot|A\rangle = \sum_{i=1}^{n} A_i\delta_{ij} = A_j$

$$|A\rangle\cdot|B\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(A_i|e_i\rangle)\cdot(B_j|e_j\rangle) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_i^* B_j\delta_{ij} \Rightarrow \boxed{|A\rangle\cdot|B\rangle = \sum_{i=1}^{n} A_i^* B_j}$$

FUNÇÕES LINEARES. $|A\rangle \xrightarrow{F} z = F(|A\rangle)$

com a propriedade de linearidade:

$$F(u|A\rangle + v|B\rangle) = u\,F(|A\rangle) + v\,F(|B\rangle)$$

Se definirmos soma de funções e produto por número complexo

$F+G=H$, $H(|A\rangle) = F(|A\rangle) + G(|A\rangle)$; $zF = R$, $R(|A\rangle) = z(F(|A\rangle))$

corrobora-se que as funções são também um espaço vetorial.

Basta conhecer o efeito de F nos elementos da base ortonormal:

$F(|e_i\rangle) = F_i^*$ (n números complexos)

$$\Rightarrow F(|A\rangle) = \sum_{i=1}^{n} F(A_i|e_i\rangle) = \sum_{i=1} A_i F(|e_i\rangle) = \sum_{i=1} A_i F_i^*$$

$\boxed{F(|A\rangle) = \sum_{i=1} F_i^* A_i = |F\rangle\cdot|A\rangle}$ onde $|F\rangle = \sum_{i=1}^{n} F_i|e_i\rangle$

DUALIDADE.
Cada elemento F do espaço de funções (espaço dual) corresponde a um ket $|F\rangle$ e o efeito da função F e o produto interno com $|F\rangle$:

$$\boxed{F(|A\rangle) = |F\rangle\cdot|A\rangle}$$

Cada elemento B do <u>espaço dual</u>, correspondente ao ket $|B\rangle$, representa-se como um "bra" $\langle B|$. O efeito do operador num ket $|A\rangle$ é:

$$|B\rangle \cdot |A\rangle = \langle B|A\rangle = \sum_{i=1}^{n} B_i^* A_i \quad \text{(bracket)}$$

Base do espaço: $\{|e_i\rangle\}$ $\qquad A_i = |e_i\rangle \cdot |A\rangle = \langle e_i|A\rangle$

Base do dual: $\{\langle e_i|\}$

A cada ket, $|A\rangle = \sum_{i=1}^{n} A_i |e_i\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i|A\rangle |e_i\rangle$

corresponde um bra: $\langle A| = \sum_{i=1}^{n} A_i^* \langle e_i| = \sum_{i=1}^{n} \langle A|e_i\rangle \langle e_i|$

OPERADORES LINEARES

$|A\rangle \xmapsto{\hat{\Omega}} |B\rangle = \hat{\Omega}|A\rangle$ com a propriedade de linearidade

$$\hat{\Omega}(u|A\rangle + v|B\rangle) = u\hat{\Omega}|A\rangle + v\hat{\Omega}|B\rangle$$

Basta conhecer o efeito do operador na base $\{|e_i\rangle\}$

$$\hat{\Omega}|e_i\rangle = \sum_{j=1}^{n} \Omega_{ji} |e_j\rangle \quad (n^2 \text{ números complexos } \Omega_{ji})$$

$$\Rightarrow \hat{\Omega}|A\rangle = \sum_{i=1}^{n} \hat{\Omega}(A_i|e_i\rangle) = \boxed{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \Omega_{ji} A_i |e_j\rangle} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \Omega_{ji} \langle e_i|A\rangle |e_j\rangle$$

$$\hat{\Omega}|A\rangle = \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \Omega_{ji} |e_j\rangle\langle e_i|\right)|A\rangle$$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{\Omega} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \Omega_{ji} |e_j\rangle\langle e_i|} \qquad \left(\Omega_{ji} = \langle e_j|\hat{\Omega}|e_i\rangle\right)$$

Um caso particular é $\Omega_{ji} = \delta_{ij}$

$$\Rightarrow \hat{\Omega}|A\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} A_i |e_j\rangle = \sum_{i=1}^{n} A_i |e_i\rangle = |A\rangle \quad (\hat{\Omega} = \hat{1})$$

identidade

$$\hat{1} = \sum_{i}^{n} |e_i\rangle\langle e_i|$$

Cada operador $P_i = |e_i\rangle\langle e_i|$ projeta um ket na direção de $|e_i\rangle$ $\quad (P_i = A_i|e_i\rangle)$

$$|A\rangle = \hat{1}|A\rangle = \sum_{i=1}^{n} |e_i\rangle\langle e_i|A\rangle = \sum_{i=1}^{n} A_i |e_i\rangle$$

$$\langle A| = \langle A|\hat{1} = \sum_{i=1}^{n} \langle A|e_i\rangle\langle e_i| = \sum_{i=1}^{n} A_i^* \langle e_i|$$

No espaço dual, colocamos o operador à direita do bra.

$$\langle A|\hat{\Omega} = \langle A|\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \Omega_{ji}|e_j\rangle\langle e_i|\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \Omega_{ji} A_j^* \langle e_i|$$

$$\boxed{\langle A|\hat{\Omega}|B\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \Omega_{ji} A_j^* B_i}$$

Operador transposto conjugado.

$$\hat{\Omega}^\dagger = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \Omega_{ij}^* |e_j\rangle\langle e_i| \qquad \left(\langle e_j|\hat{\Omega}^\dagger|e_i\rangle = \Omega_{ij}^*\right)$$

O bra correspondente a $\Omega|A\rangle$ é $\langle A|\Omega^\dagger$

e $\langle A|\hat{\Omega}|B\rangle = \langle B|\hat{\Omega}^\dagger|A\rangle^*$ (conferir)

Operadores Hermíticos. $\hat{\Omega}^\dagger = \hat{\Omega}$ $\quad (\Omega_{ij}^* = \Omega_{ji})$ $\quad \langle A|\hat{\Omega}|B\rangle = \langle B|\hat{\Omega}|A\rangle^*$

REPRESENTAÇÃO MATRICIAL

$$|A\rangle \rightarrow \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} \qquad \langle A| \rightarrow \begin{bmatrix} A_1^* & A_2^* & \cdots & A_n^* \end{bmatrix}$$

$$\hat{\Omega} = \begin{bmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} & \cdots & \Omega_{1n} \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} & \cdots & \Omega_{2n} \\ \vdots & & & \\ \Omega_{n1} & \Omega_{n2} & \cdots & \Omega_{nn} \end{bmatrix} \qquad \langle A|B\rangle = \begin{bmatrix} A_1^* \cdots A_n^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_n \end{bmatrix} = A_1^* B_1 + \cdots + A_n^* B_n$$

VALORES/VETORES PRÓPRIOS: $\hat{\Omega}|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle \Rightarrow$ λ = valor próprio de $\hat{\Omega}$

$|\lambda\rangle$ = vetor próprio correspondente a λ