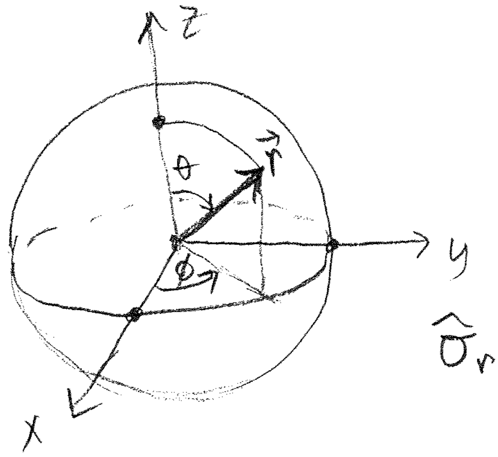
SPIN NUMA DIREÇÃO QUALQUER



$|\vec{r}|=1 \Rightarrow \vec{r}$ define a direção

$$\vec{r} = \sin\theta\cos\phi\,\hat{\imath} + \sin\theta\sin\phi\,\hat{\jmath} + \cos\theta\,\hat{k}$$

$$0 \le \theta \le \pi\,, \quad 0 \le \phi < 2\pi$$

$$\vec{\sigma} = \hat{\sigma}_x\hat{\imath} + \hat{\sigma}_y\hat{\jmath} + \hat{\sigma}_z\hat{k}$$

$$\hat{\sigma}_r = \vec{\sigma}\cdot\vec{r} = \sin\theta\cos\phi\,\hat{\sigma}_x + \sin\theta\sin\phi\,\hat{\sigma}_y + \cos\theta\,\hat{\sigma}_z$$

$$\hat{\sigma}_r = \begin{bmatrix} 0 & \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\cos\phi & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -i\sin\theta\sin\phi \\ i\sin\theta\sin\phi & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 \\ 0 & -\cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta e^{-i\phi} \\ \sin\theta e^{i\phi} & -\cos\theta \end{bmatrix}$$

Valores próprios

$$\begin{vmatrix} \cos\theta-\lambda & \sin\theta e^{-i\phi} \\ \sin\theta e^{i\phi} & -\cos\theta-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 - \cos^2\theta - \sin^2\theta = 0$$

$$\lambda = \pm 1$$

Vetores próprios de $\lambda = 1$

$|r_1\rangle = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ mas como $|x|^2+|y|^2=1$, usaremos:

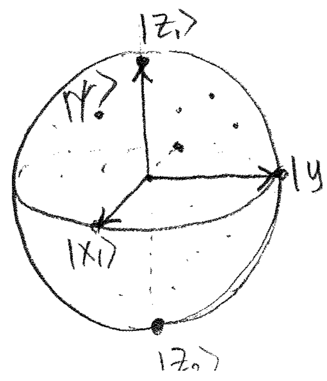
$$\Rightarrow |r_1\rangle = \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha\, e^{i\beta} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} \cos\theta-1 & \sin\theta e^{-i\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha\, e^{i\beta} \end{bmatrix} = 0$$

$$\sin\alpha \sin\theta\, e^{i(\beta-\phi)} = \cos\alpha(1-\cos\theta) \quad \Rightarrow \beta = \phi$$

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1-\cos^2(\theta/2)+\sin^2(\theta/2)}{2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)} = \frac{\sin(\theta/2)}{\cos(\theta/2)}$$

$$|r_1\rangle = \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2)e^{i\phi} \end{bmatrix} \qquad |r_2\rangle = \begin{bmatrix} \sin(\theta/2) \\ -\cos(\theta/2)e^{i\phi} \end{bmatrix}$$

Esfera de Bloch:
(raio = 1)



cada ponto na superfície da esfera é um ket $|\psi\rangle$ do espaço gerado por $\{|z_1\rangle, |z_2\rangle\}$ (e todos os ket $e^{i\alpha}|\psi\rangle$)

$$|\psi\rangle = \cos\left(\tfrac{\theta}{2}\right)|z_1\rangle + e^{i\phi}\sin\left(\tfrac{\theta}{2}\right)|z_2\rangle$$

kets em postos diametralmente opostos são ortogonais.

VALOR MÉDIO DE UM OBSERVÁVEL

Se o estado do sistema for $|\psi\rangle$, o valor médio (ou valor esperado) do observável $\hat{\Omega}$, com valores próprios λ_j, é:

$$\langle\hat{\Omega}\rangle = \sum_{j=1}^{n} P_j \lambda_j$$

$$\begin{cases} |\psi\rangle = \sum_{j=1}^{n} \psi_j |\lambda_j\rangle \\ \langle\psi| = \sum_{i=1}^{n} \psi_i^* \langle\lambda_i| \end{cases} \implies \langle\psi|\hat{\Omega}|\psi\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \psi_i^*\psi_j \langle\lambda_i|\hat{\Omega}|\lambda_j\rangle = \sum_{j=1}^{n} \psi_j^*\psi_j\lambda_j$$

$$= \sum_{j=1}^{n} P_j\lambda_j$$

$$\implies \langle\hat{\Omega}\rangle = \langle\psi|\hat{\Omega}|\psi\rangle$$

Valores esperados do spin

Se o estado for o vetor próprio $|r_1\rangle$ do spin na direção $\sin\theta\cos\phi\,\hat{\imath} + \sin\theta\sin\phi\,\hat{\jmath} + \cos\theta\,\hat{k}$, com valor próprio $+1$,

$$\langle r_1|\hat{\sigma}_z|r_1\rangle = \begin{bmatrix}\cos\frac{\theta}{2} & e^{-i\phi}\sin\frac{\theta}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\frac{\theta}{2}\\ e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}\end{bmatrix} = \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2} = \cos\theta$$

$$\langle r_1|\hat{\sigma}_x|r_1\rangle = \begin{bmatrix}\cos\frac{\theta}{2} & e^{-i\phi}\sin\frac{\theta}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\frac{\theta}{2}\\ e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}\end{bmatrix} = e^{i\phi}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} + e^{-i\phi}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}$$

$$= \frac{e^{i\phi}}{2}\sin\theta + \frac{e^{-i\phi}}{2}\sin\theta = \sin\theta\cos\phi$$

$$\langle r_1|\hat{\sigma}_y|r_1\rangle = \begin{bmatrix}\cos\frac{\theta}{2} & e^{-i\phi}\sin\frac{\theta}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\frac{\theta}{2}\\ e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}\end{bmatrix} = -ie^{i\phi}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} + ie^{-i\phi}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}$$

$$= -\frac{ie^{i\phi}}{2}\sin\theta + \frac{ie^{-i\phi}}{2}\sin\theta = \sin\theta\sin\phi$$

$$\langle\hat{\sigma}_x\rangle^2 + \langle\hat{\sigma}_y\rangle^2 + \langle\hat{\sigma}_z\rangle^2 = \sin^2\theta\cos^2\theta + \sin^2\theta\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

Se o estado fosse $|r_2\rangle$, com valor próprio -1, o resultado seria,

$$\langle\hat{\sigma}_z\rangle = -\cos\theta,\quad \langle\hat{\sigma}_x\rangle = -\sin\theta\cos\phi,\quad \langle\hat{\sigma}_y\rangle = -\sin\theta\sin\phi$$

$$\langle\hat{\sigma}_x\rangle^2 + \langle\hat{\sigma}_y\rangle^2 + \langle\hat{\sigma}_z\rangle^2 = 1$$

SUMÁRIO DE MECÂNICA ANALÍTICA (Clássica)

O estado de uma partícula que se desloca na direção x é (x, p), em que p é a quantidade de movimento, $p = m\frac{dx}{dt}$

Se o sistema for conservativo, a força resultante na partícula é $F = -\frac{dU}{dx}$ (U = energia potencial)

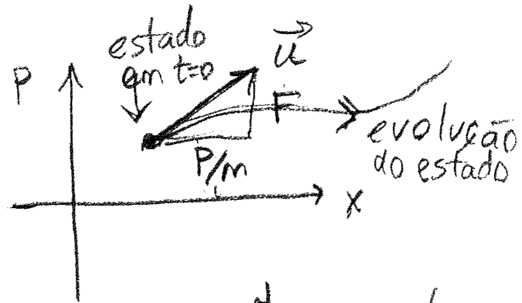
A equação de movimento é:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F$$

é mais conveniente escrever:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{p}{m} \\ \frac{dp}{dt} = F \end{cases}$$

Consideramos sistemas autónomos, em que F depende do estado (x,p) mas não de t.



O espaço de fase é o plano xp em que cada ponto é um possível estado.

Em cada ponto existe um vetor $\vec{u}$ (velocidade de fase) com componentes $(\frac{p}{m}, F)$. Se o estado inicial for (x_0, p_0), após um intervalo dt o estado será

$$(x_0, p_0) + (dx, dp) = (x_0, p_0) + \left(\frac{dx}{dt}dt, \frac{dp}{dt}dt\right) = (x_0, p_0) + \left(\frac{p}{m}, F\right)dt$$

$\Rightarrow$ $\vec{u}$ é o deslocamento do estado, no espaço de fase, por unidade de tempo.

<u>Função hamiltoniana</u>

$$H(x,p) = \frac{p^2}{2m} + U(x) \quad \text{(energia mecânica. } U = -\textstyle\int F\,dx)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{p}{m} = \frac{\partial H}{\partial p} \\ F = -\frac{\partial H}{\partial x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} \end{cases} \quad \text{equações de Hamilton}$$

Qualquer variável dinâmica do sistema, $F(x,p)$ tem derivada igual a:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial p}\frac{dp}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial H}{\partial x}$$

esta última expressão escreve-se $\{F, H\}$ e chama-se <u>parênteses de Poisson</u>.

Os parênteses de duas variáveis quaisquer são:

$$\{F,G\} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial p} - \frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial G}{\partial x}$$

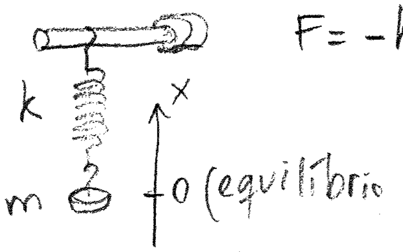
e a derivada de qualquer variável dinâmica é igual aos seus parênteses com a função Hamiltoniana:

$$\boxed{\frac{dF}{dt} = \{F, H\}}$$

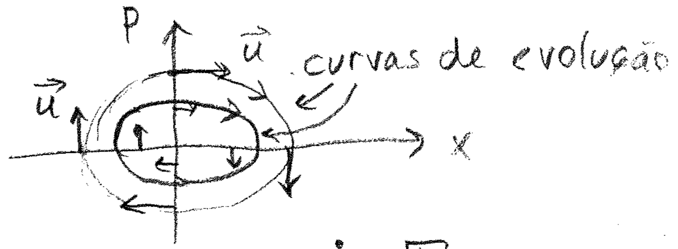
As equações de Hamiton são dois casos particulares dessa equação:

$$\frac{dx}{dt} = \{x, H\} = \frac{\partial H}{\partial p} \qquad \frac{dp}{dt} = \{p, H\} = -\frac{\partial H}{\partial x} \qquad \left(\frac{\partial x}{\partial p} = 0 = \frac{\partial p}{\partial x}\right)$$

Exemplo. Massa m suspensa de uma mola elástica com constante k.

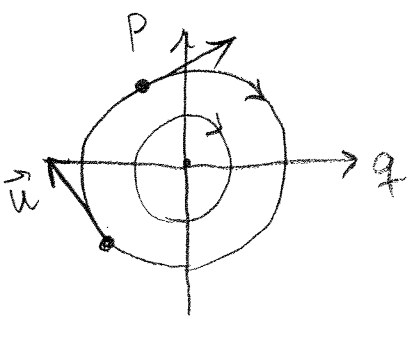


$F = -kx \quad \Rightarrow \vec{u} = \left(\frac{p}{m}, -kx\right)$



Mudança de variável $q = \sqrt{mk}\,x \quad \Longrightarrow \begin{cases} \dot{q} = \sqrt{\frac{k}{m}}\,p \\ \dot{p} = -\sqrt{\frac{k}{m}}\,q \end{cases}$

$\vec{u} = (\omega p, -\omega q)\ ,\ \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$



No plano de fase, o estado realiza movimento circular uniforme com velocidade angular ω constante: $\begin{cases} q = q_{máx}\cos\omega t \\ p = -q_{máx}\sin\omega t \end{cases}$

$q_{máx} = \sqrt{mk}\,A = m\omega A \Rightarrow \begin{cases} x = A\cos\omega t \\ p = -m\omega A\sin\omega t \end{cases}$

Conclusão: Existe uma função $H(x,p)$ (energia) que se conserva e a evolução temporal de qualquer variável dinâmica é dada pelos parênteses de Poisson dessa variável com H.

Dois estados diferentes nunca chegam a ser iguais (nem para $t>0$ nem para $t<0$). Se chegassem a ser iguais existiria um ponto onde $\vec{u}$ teria 2 valores diferentes, que não é possível.