SPIN. Sumário

Matrizes de Pauli: $\hat{\sigma}_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\hat{\sigma}_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$, $\hat{\sigma}_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

3 observáveis (matrizes hermíticas). Como a matriz $\hat{\sigma}_z$ é diagonal, os seus valores próprios são +1 e -1 e os respetivos vetores próprios são $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Vejamos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = +1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = -1\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

mesmo vetor mesmo vetor

Ou seja, as matrizes são a representação dos operadores $\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z$ na base dos vetores próprios de $\hat{\sigma}_z$.

Usando kets, em vez de matrizes, temos:

$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \to |+1\rangle \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \to |-1\rangle$

$\hat{\sigma}_x |+1\rangle = |-1\rangle \qquad \hat{\sigma}_x |-1\rangle = |+1\rangle$

$\hat{\sigma}_y |+1\rangle = i|-1\rangle \qquad \hat{\sigma}_y |-1\rangle = -i|+1\rangle$

$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \to a|+1\rangle + b|-1\rangle$

$\hat{\sigma}_z |+1\rangle = |+1\rangle \qquad \hat{\sigma}_z |-1\rangle = -|-1\rangle$

Valores/vetores próprios de $\hat{\sigma}_x$:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 = 1; \quad \lambda_1 = +1, \ \lambda_2 = -1$$

$\hat{\sigma}_x |\lambda_1\rangle = |\lambda_1\rangle \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \Rightarrow a = b \quad |\lambda_1\rangle = a\left(|+1\rangle + |-1\rangle\right)$

$\hat{\sigma}_x |\lambda_2\rangle = -|\lambda_2\rangle \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \Rightarrow c = -d \quad |\lambda_2\rangle = c\left(|+1\rangle - |-1\rangle\right)$

normalização: $\langle\lambda_1|\lambda_1\rangle = a^*\left(\langle+1| + \langle-1|\right) a\left(|+1\rangle + |-1\rangle\right)$

$$= |a|^2\left(\underbrace{\langle+1|+1\rangle}_{1} + \underbrace{\langle+1|-1\rangle}_{0} + \underbrace{\langle-1|+1\rangle}_{0} + \underbrace{\langle-1|-1\rangle}_{1}\right)$$

$$= 2|a|^2$$

$\langle\lambda_1|\lambda_2\rangle = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow |\lambda_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+1\rangle + |-1\rangle\right) \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

de forma semelhante, $|\lambda_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+1\rangle - |-1\rangle\right) \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

COMBINAÇÃO DE DOIS SPINS

Spin 1: $\hat{\sigma}_{1,z}|+1\rangle = |+1\rangle$, $\hat{\sigma}_{1,z}|-1\rangle = -|-1\rangle$ ($|+1\rangle$ e $|-1\rangle$: estados próprios do $\hat{\sigma}_{1,z}$)

$\hat{\sigma}_{1,x}|+1\rangle = |-1\rangle$, $\hat{\sigma}_{1,x}|-1\rangle = |+1\rangle$

$\hat{\sigma}_{1,y}|+1\rangle = i|-1\rangle$, $\hat{\sigma}_{1,y}|-1\rangle = -i|+1\rangle$

Estado geral do sistema 1: $|\psi\rangle = \psi_1|+1\rangle + \psi_{-1}|-1\rangle$

Spin 2: $\hat{\sigma}_{2,z}|+1\rangle = |+1\rangle$, $\hat{\sigma}_{2,z}|-1\rangle = -|-1\rangle$

$\hat{\sigma}_{2,x}|+1\rangle = |-1\rangle$, $\hat{\sigma}_{2,x}|-1\rangle = |+1\rangle$

$\hat{\sigma}_{2,y}|+1\rangle = i|-1\rangle$, $\hat{\sigma}_{2,y}|-1\rangle = -i|+1\rangle$

Estado geral do sistema 2: $|\varphi\rangle = \varphi_1|+1\rangle + \varphi_{-1}|-1\rangle$

<u>Estado combinado dos dois sistemas</u>:

$$|\psi,\varphi\rangle = |\psi\rangle \otimes |\varphi\rangle$$ (produto externo dos espaços vetoriais de $|\psi\rangle$ e $|\varphi\rangle$)

$$|\psi,\varphi\rangle = (\psi_1|+1\rangle + \psi_{-1}|-1\rangle) \otimes (\varphi_1|+1\rangle + \varphi_{-1}|-1\rangle)$$

$$= \psi_1\varphi_1|+1\rangle\otimes|+1\rangle + \psi_1\varphi_{-1}|+1\rangle\otimes|-1\rangle + \psi_{-1}\varphi_1|-1\rangle\otimes|+1\rangle + \psi_{-1}\varphi_{-1}|-1\rangle\otimes|-1\rangle$$

Ou, de forma abreviada,

$$|\psi,\varphi\rangle = \psi_1\varphi_1|+1,+1\rangle + \psi_1\varphi_{-1}|+1,-1\rangle + \psi_{-1}\varphi_1|-1,+1\rangle + \psi_{-1}\varphi_{-1}|-1,-1\rangle$$

$\{|+1,+1\rangle, |+1,-1\rangle, |-1,+1\rangle, |-1,-1\rangle\}$ é uma base ortonormal do espaço $|\psi\rangle\otimes|\varphi\rangle$.

$$\langle j,k|l,m\rangle = \delta_{jl}\delta_{km}$$

Observe-se que se $|\psi\rangle$ e $|\varphi\rangle$ estão normalizados,

$$\psi_{-1}^*\psi_{-1} + \psi_1^*\psi_1 = 1 \quad , \quad \varphi_{-1}^*\varphi_{-1} + \varphi_1^*\varphi_1 = 1$$

$$\Rightarrow \langle \psi,\varphi|\psi,\varphi\rangle = \left(\psi_1^*\varphi_1^*\langle +1,+1| + \psi_1^*\varphi_{-1}^*\langle +1,-1| + \psi_{-1}^*\varphi_1^*\langle -1,+1| + \psi_{-1}^*\varphi_{-1}^*\langle -1,-1|\right)$$

$$\left(\psi_1\varphi_1|+1,+1\rangle + \psi_1\varphi_{-1}|+1,-1\rangle + \psi_{-1}\varphi_1|-1,+1\rangle + \psi_{-1}\varphi_{-1}|-1,-1\rangle\right)$$

$$= \psi_1^*\psi_1\varphi_1^*\varphi_1 + \psi_1^*\psi_1\varphi_{-1}^*\varphi_{-1} + \psi_{-1}^*\psi_{-1}\varphi_1^*\varphi_1 + \psi_{-1}^*\psi_{-1}\varphi_{-1}^*\varphi_{-1}$$

$$= \psi_1^*\psi_1(\varphi_1^*\varphi_1 + \varphi_{-1}^*\varphi_{-1}) + \psi_{-1}^*\psi_{-1}(\varphi_1^*\varphi_1 + \varphi_{-1}^*\varphi_{-1})$$

$$= \psi_1^*\psi_1 + \psi_{-1}^*\psi_{-1} = 1$$

$\Rightarrow |\psi,\varphi\rangle$ também está normalizado.

ESTADOS ENTRELAÇADOS

Um estado geral no espaço gerado pela base $\{|j,k\rangle\}$ tem a forma:

$$|\phi\rangle = \phi_{1,1}|+1,+1\rangle + \phi_{1,-1}|+1,-1\rangle + \phi_{-1,1}|-1,+1\rangle + \phi_{-1,-1}|-1,-1\rangle$$

que nem sempre pode ser decomposto como $|\psi\rangle\otimes|\varphi\rangle$. Para que podesse ser escrito como $|\psi\rangle\otimes|\varphi\rangle$ seria necessário que:

$$\frac{\phi_{1,1}}{\phi_{1,-1}} = \frac{\phi_{-1,1}}{\phi_{-1,-1}}$$

Quando $\phi_{1,1}, \phi_{1,-1}, \phi_{-1,1}$ e $\phi_{-1,-1}$ não verificam essa condição, diz-se que $|\phi\rangle$ é um <u>estado entrelaçado</u>. Alguns exemplos são:

$$|S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+1,-1\rangle - |-1,+1\rangle\right)$$

$$|T_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+1,-1\rangle + |-1,+1\rangle\right)$$

$$|T_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+1,+1\rangle + |-1,-1\rangle\right)$$

$$|T_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+1,+1\rangle - |-1,-1\rangle\right)$$

(S quer dizer "singlet" e T "triplet", por razões que serão claras mais tarde.)

Quando o estado combinado é um estado entrelaçado, nada pode ser concluido acerca do estado de cada sistema 1 e 2 por separado.

Mas a medição do spin dum dos dois sistemas permite concluir como será o spin do outro sistema. Por exemplo, se o sistema combinado for $|s\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+1,-1\rangle - |-1,+1\rangle)$ e a medição de $\hat{\sigma}_{1z}$ dá o resultado $+1$, o estado colapsa para $|+1,-1\rangle$ e o spin $\hat{\sigma}_{2z}$ fica com valor -1.

Para calcular o valor esperado de alguns observáveis, usaremos os seguintes resultados:

$$\hat{\sigma}_{1z}|+1,+1\rangle = |+1,+1\rangle,\ \hat{\sigma}_{1z}|+1,-1\rangle = |+1,-1\rangle,\ \hat{\sigma}_{1z}|-1,+1\rangle = -|-1,+1\rangle,\ \hat{\sigma}_{1z}|-1,-1\rangle = -|-1,-1\rangle$$
$$\hat{\sigma}_{2z}|+1,+1\rangle = |+1,+1\rangle,\ \hat{\sigma}_{2z}|+1,-1\rangle = -|+1,-1\rangle,\ \hat{\sigma}_{2z}|-1,+1\rangle = |-1,+1\rangle,\ \hat{\sigma}_{2z}|-1,-1\rangle = -|-1,-1\rangle$$

$$\hat{\sigma}_{1x}|+1,+1\rangle = |-1,+1\rangle,\ \hat{\sigma}_{1x}|+1,-1\rangle = |-1,-1\rangle,\ \hat{\sigma}_{1x}|-1,+1\rangle = |+1,+1\rangle,\ \hat{\sigma}_{1x}|-1,-1\rangle = |+1,-1\rangle$$
$$\hat{\sigma}_{2x}|+1,+1\rangle = |+1,-1\rangle,\ \hat{\sigma}_{2x}|+1,-1\rangle = |+1,+1\rangle,\ \hat{\sigma}_{2x}|-1,+1\rangle = |-1,-1\rangle,\ \hat{\sigma}_{2x}|-1,-1\rangle = |-1,+1\rangle$$

$$\hat{\sigma}_{1y}|+1,+1\rangle = i|-1,+1\rangle,\ \hat{\sigma}_{1y}|+1,-1\rangle = i|-1,-1\rangle,\ \hat{\sigma}_{1y}|-1,+1\rangle = -i|+1,+1\rangle,\ \hat{\sigma}_{1y}|-1,-1\rangle = -i|+1,-1\rangle$$
$$\hat{\sigma}_{2y}|+1,+1\rangle = i|+1,-1\rangle,\ \hat{\sigma}_{2y}|+1,-1\rangle = -i|+1,+1\rangle,\ \hat{\sigma}_{2y}|-1,+1\rangle = i|-1,-1\rangle,\ \hat{\sigma}_{2y}|-1,-1\rangle = -i|-1,+1\rangle$$

Um produto como $\hat{\sigma}_{1y}|+1,-1\rangle$ é realmente a forma abreviada de escrever $(\hat{\sigma}_{1y}\otimes\hat{1})(|+1\rangle\otimes|-1\rangle) = \hat{\sigma}_{1y}|+1\rangle\otimes\hat{1}|-1\rangle = i|-1\rangle\otimes|-1\rangle = i|-1,-1\rangle$

O valor esperado de um dos operadores $\hat{\sigma}_n$ num estado combinado $|j,k\rangle$ é o mesmo do que no estado de um dos spins. Por exemplo:

$$\langle +1,-1|\hat{\sigma}_{1y}|+1,-1\rangle = \langle +1|\hat{\sigma}_{1y}|+1\rangle\langle -1|\hat{1}|-1\rangle = \langle +1|(i|-1\rangle) = i\langle +1|-1\rangle = 0$$

Como vimos, no caso de um único spin, em qualquer direção n: $(\langle\hat{\sigma}_n\rangle = 1)$

$$\langle\hat{\sigma}_x\rangle^2 + \langle\hat{\sigma}_y\rangle^2 + \langle\hat{\sigma}_z\rangle^2 = 1$$

o que mostra que os valores esperados das 3 componentes $\hat{\sigma}_x$, $\hat{\sigma}_y$ e $\hat{\sigma}_z$ não podem ser todos nulos.

No entanto, isso já não acontece no estado entrelaçado

$$|s\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+1,-1\rangle - |-1,+1\rangle)$$

Vejamos: $\hat{O}_{1z}|s\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+1,-1\rangle + |-1,+1\rangle\right)$

$$\Rightarrow \langle s|\hat{O}_{1z}|s\rangle = \frac{1}{2}\left(\langle +1,-1| - \langle -1,+1|\right)\left(|+1,-1\rangle + |-1,+1\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\langle +1,-1|+1,-1\rangle - \langle -1,+1|-1,+1\rangle\right) = \frac{1}{2}(1-1) = 0$$

$$\hat{O}_{1x}|s\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|-1,-1\rangle - |+1,+1\rangle\right)$$

$$\Rightarrow \langle s|\hat{O}_{1x}|s\rangle = \frac{1}{2}\left(\langle +1,-1| - \langle -1,+1|\right)\left(|-1,-1\rangle - |+1,+1\rangle\right) = 0$$

$$\hat{O}_{1y}|s\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(i|-1,-1\rangle + i|+1,+1\rangle\right)$$

$$\Rightarrow \langle s|\hat{O}_{1x}|s\rangle = \frac{i}{2}\left(\langle +1,-1| - \langle -1,+1|\right)\left(|-1,-1\rangle - |+1,+1\rangle\right) = 0$$

$$\Rightarrow \langle \hat{O}_{1x}\rangle^2 + \langle \hat{O}_{1y}\rangle^2 + \langle \hat{O}_{1z}\rangle^2 = 0$$

Se o estado é $|s\rangle$, o resultado de qualquer medição de $\hat{O}_{1x}$, $\hat{O}_{1y}$ e $\hat{O}_{1z}$ tem igual probabilidade de dar +1 ou −1. O mesmo acontece com $\hat{O}_{2x}$, $\hat{O}_{2y}$ e $\hat{O}_{2z}$.

OBSERVÁVEIS DO SISTEMA COMBINADO

Como os observáveis $\hat{O}_1$ são independentes de $\hat{O}_2$, comutam entre si e podem ser medidos simultaneamente.

Observaveis que não comutam não podem ser medidos sem que essas medições interferam entre elas.

Por exemplo, $\hat{O}_{1z}$ e $\hat{O}_{2z}$ podem ser medidos simultaneamente sem interferência. Para determinar o resultado que poderá dar essa medição, quando o estado é, por exemplo, $|s\rangle$, vamos primeiro calcular:

$$\hat{O}_{1z}\hat{O}_{2z}|s\rangle = \hat{O}_{1z}\hat{O}_{2z}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+1,-1\rangle - |-1,+1\rangle\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-|+1,-1\rangle + |-1,+1\rangle\right)$$

$$= -|s\rangle$$

Como tal, $|s\rangle$ é estado próprio de $\hat{\sigma}_{1z}\hat{\sigma}_{2z}$, com valor próprio -1, e o valor esperado de $\hat{\sigma}_{1z}\hat{\sigma}_{2z}$ é:

$$\langle s|\,\hat{\sigma}_{1z}\hat{\sigma}_{2z}\,|s\rangle = -\langle s|s\rangle = -1$$

Ou seja, a medição de $\hat{\sigma}_{1z}$ e $\hat{\sigma}_{2z}$ dará $+1$ ou menos -1 com a mesma probabilidade, mas os sinais obtidos para $\hat{\sigma}_{1z}$ e $\hat{\sigma}_{2z}$ serão sempre opostos. Isto já podia ser previsto pela própria definição de $|s\rangle$. O que é surpreendente é que o mesmo acontece com $\hat{\sigma}_{1x}, \hat{\sigma}_{2x}$ e $\hat{\sigma}_{1y}\hat{\sigma}_{2y}$:

$$\langle s|\hat{\sigma}_{1x}\hat{\sigma}_{2x}|s\rangle = -1 \qquad \text{(conferir!)}$$

$$\langle s|\hat{\sigma}_{1y}\hat{\sigma}_{2y}|s\rangle = -1$$

O resultado da medição do spin de 1, em qualquer direção, permite prever que o resultado da medição do spin de 2 nessa direção conduzirá ao valor oposto.

Esse facto é aproveitado em criptografia quântica e em "teleportação" (envio de informação entre locais longínquos).

REPRESENTAÇÃO MATRICIAL

se $|\psi\rangle \to \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_{-1} \end{bmatrix}$ e $|\varphi\rangle \to \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_{-1} \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \quad |\psi,\varphi\rangle = |\psi\rangle \otimes |\varphi\rangle \to \begin{bmatrix} \psi_1\varphi_1 \\ \psi_1\varphi_{-1} \\ \psi_{-1}\varphi_1 \\ \psi_{-1}\varphi_{-1} \end{bmatrix}$$

em geral,

$$\phi_{1,1}|+1,+1\rangle + \phi_{1,-1}|+1,-1\rangle + \phi_{-1,1}|-1,+1\rangle + \phi_{-1,-1}|-1,-1\rangle \to \begin{bmatrix} \phi_{1,1} \\ \phi_{1,-1} \\ \phi_{-1,1} \\ \phi_{-1,-1} \end{bmatrix}$$

E a representação matricial dos operadores obtém-se com o produto externo entre matrizes:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} & A_{11}B_{12} & A_{12}B_{11} & A_{12}B_{12} \\ A_{11}B_{21} & A_{11}B_{22} & A_{12}B_{21} & A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} & A_{21}B_{12} & A_{22}B_{11} & A_{22}B_{12} \\ A_{21}B_{21} & A_{21}B_{22} & A_{22}B_{21} & A_{22}B_{22} \end{bmatrix}$$

Por exemplo,

$$\hat{\sigma}_{1x}\,\hat{\sigma}_{2y} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$