U.PORTO
FEUP FACULDADE DE ENGENHARIA
UNIVERSIDADE DO PORTO

Introdução à Mecânica Quântica

1º semestre, 2025/2026. Docente: Jaime Villate

26 de novembro de 2025

Nome: ______________________________

Duração: 90 minutos. Com consulta de formulário e uso de qualquer tipo de calculadora, sem ligação a redes. Ter consigo um telemóvel ou smart watch, mesmo que estejam desligados, será motivo de anulação do exame.

1. (Cotação: 40%) O operador: $\hat{\Omega} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

Tem valores próprios $\Omega_1 = 6$, $\Omega_2 = 2$ e $\Omega_3 = 1$, e os respetivos vetores próprios normalizados são:

$$|\Omega_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad |\Omega_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad |\Omega_3\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se o estado do sistema for: $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \\ -2 \end{bmatrix}$

(a) Diga quais serão os possíveis valores medidos para $\hat{\Omega}$ e as suas probabilidades.
(b) Calcule o valor esperado de $\hat{\Omega}$.

2. (Cotação: 20%) Demonstre a identidade de Jacobi para operadores:

$$[\hat{\Omega}, [\hat{\Lambda}, \hat{\Gamma}]] + [\hat{\Lambda}, [\hat{\Gamma}, \hat{\Omega}]] + [\hat{\Gamma}, [\hat{\Omega}, \hat{\Lambda}]] = \hat{0}$$

3. (Cotação: 40%) O estado de um sistema, em função dos vetores próprios de $\hat{\sigma}_z$, é:

$$|\Psi\rangle = \frac{(3 - \mathrm{i}\,4)}{13}\,|z_+\rangle + \frac{12}{13}\,|z_-\rangle$$

Lembrando que os vetores próprios de $\hat{\sigma}_y$ são:

$$|y_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|z_+\rangle + \mathrm{i}\,|z_-\rangle\right) \qquad |y_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|z_+\rangle - \mathrm{i}\,|z_-\rangle\right)$$

(a) Determine as probabilidades de obter 1 ou -1 quando $\hat{\sigma}_y$ for medido.
(b) Se a medição de $\hat{\sigma}_y$ dá o valor -1, qual será o estado do sistema imediatamente após essa medição?