U.PORTO
FEUP FACULDADE DE ENGENHARIA
UNIVERSIDADE DO PORTO

Introdução à Mecânica Quântica

1º semestre, 2025/2026. Docente: Jaime Villate

3 de dezembro de 2025

**Nome:** ______________________________

**Duração: 90 minutos. Com consulta de formulário e uso de qualquer tipo de calculadora, sem ligação a redes. Ter consigo um telemóvel ou smart watch, mesmo que estejam desligados, será motivo de anulação do exame.**

**1.** (Cotação: 60%) O operador associado a um observável $\hat{\Omega}$ tem dois valores próprios $\Omega_1 = -2$ e $\Omega_2 = 12$. Na base dos vetores próprios desse operador, os kets $|\Psi\rangle$ e $|\Phi\rangle$ são:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{7}}\left((2+\mathrm{i})|\Omega_1\rangle + (1-\mathrm{i})|\Omega_2\rangle\right) \qquad |\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{14}}\left((2-\mathrm{i})|\Omega_1\rangle + 3\,|\Omega_2\rangle\right)$$

($a$) Calcule o produto interno entre $|\Psi\rangle$ e $|\Phi\rangle$.

($b$) Quais serão as probabilidades de medir $\hat{\Omega}$ igual a $-2$ ou 12 quando o estado do sistema for $|\Psi\rangle$?

($c$) Determine o valor esperado de $\hat{\Omega}$ quando o sistema estiver no estado $|\Psi\rangle$.

($d$) Em qual dos dois estados, $|\Psi\rangle$ ou $|\Phi\rangle$, será mais provável obter o resultado $-2$ quando $\hat{\Omega}$ for medido?

($e$) Se o estado do sistema for $|\Phi\rangle$ e o resultado da medição de $\hat{\Omega}$ for 12, qual será o estado do sistema imediatamente após essa medição?

**2.** (Cotação: 40%) O estado combinado de dois sistemas com spin é:

$$|\Psi,\Phi\rangle = \frac{1}{6}\left(2\,|z_+,z_+\rangle + (2+\mathrm{i}\,4)|z_+,z_-\rangle + (1+\mathrm{i})|z_-,z_+\rangle + (-1+\mathrm{i}\,3)|z_-,z_-\rangle\right)$$

Encontre os estados $|\Psi\rangle$ e $|\Phi\rangle$ de cada um dos sistemas.

## Resolução

**1**. (*a*) $\langle\Psi| = \dfrac{1}{\sqrt{7}}\left((2-\mathrm{i})\langle\Omega_1| + (1+\mathrm{i})\langle\Omega_2|\right)$

$$\langle\Psi|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{98}}\Big((2-\mathrm{i})^2\langle\Omega_1|\Omega_1\rangle + 3(2-\mathrm{i})\langle\Omega_1|\Omega_2\rangle + (1+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})\langle\Omega_2|\Omega_1\rangle + 3(1+\mathrm{i})\langle\Omega_2|\Omega_2\rangle\Big)$$

$$= \frac{1}{7\sqrt{2}}\left(3 - \mathrm{i}\,4 + 3 + \mathrm{i}\,3\right) = \frac{\sqrt{2}}{14}(6-\mathrm{i})$$

(*b*) $\mathrm{P}(-2) = |\langle\Omega_1|\Psi\rangle|^2 = \left|\dfrac{1}{\sqrt{7}}(2+\mathrm{i})\right|^2 = \dfrac{1}{7}(2^2+1^2) = \dfrac{5}{7}$

$\mathrm{P}(12) = |\langle\Omega_2|\Psi\rangle|^2 = \left|\dfrac{1}{\sqrt{7}}(1-\mathrm{i})\right|^2 = \dfrac{1}{7}(1^2+1^2) = \dfrac{2}{7}$

(*c*) $\langle\hat{\Omega}\rangle = \dfrac{5}{7}(-2) + \dfrac{2}{7}(12) = 2$

(*d*) $\mathrm{P}(-2) = |\langle\Omega_1|\Phi\rangle|^2 = \left|\dfrac{1}{\sqrt{14}}(2-\mathrm{i})\right|^2 = \dfrac{1}{14}(2^2+1^2) = \dfrac{5}{14}$

Como é menor que 5/7, então é mais provável no estado $|\Psi\rangle$.

(*e*) O estado ficará igual a $|\Omega_2\rangle$.

**2**. Comparando com a expressão do produto externo de dois kets, temos:

$$\Psi_+\Phi_+ = \frac{2}{6} \qquad \Psi_+\Phi_- = \frac{2+\mathrm{i}\,4}{6} \qquad \Psi_-\Phi_+ = \frac{1+\mathrm{i}}{6} \qquad \Psi_-\Phi_- = \frac{-1+\mathrm{i}\,3}{6}$$

E confirma-se que:

$$\frac{\Psi_-}{\Psi_+} = \frac{\Psi_-\Phi_+}{\Psi_+\Phi_+} = \frac{\Psi_-\Phi_-}{\Psi_+\Phi_-} = \frac{1+\mathrm{i}}{2} \qquad \frac{\Phi_-}{\Phi_+} = \frac{\Psi_+\Phi_-}{\Psi_+\Phi_+} = \frac{\Psi_-\Phi_-}{\Psi_-\Phi_+} = 1+\mathrm{i}\,2$$

Que implica,

$$\Psi_- = \frac{1+\mathrm{i}}{2}\Psi_+ \qquad |\Psi_-|^2 = \frac{1}{2}|\Psi_+|^2 \qquad \Phi_- = (1+\mathrm{i}\,2)\Phi_+ \qquad |\Psi_-|^2 = 5|\Psi_+|^2$$

Como a norma de $|\Psi,\Phi\rangle$ é 1, as normas de $|\Psi\rangle$ e $|\Phi\rangle$ também deverão ser 1, para que o seu produto externo seja igual a $|\Psi,\Phi\rangle$. Como tal,

$$|\Psi_+|^2 + |\Psi_-|^2 = \frac{3}{2}|\Psi_+|^2 = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad |\Psi_+| = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$|\Phi_+|^2 + |\Phi_-|^2 = 6|\Phi_+|^2 = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad |\Phi_+| = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

e podemos escolher:

$$\Psi_+ = \sqrt{\frac{2}{3}} \qquad \Psi_- = \frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{6}} \qquad \Phi_+ = \frac{1}{\sqrt{6}} \qquad \Phi_- = \frac{1+\mathrm{i}\,2}{\sqrt{6}}$$

que conduz a:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(2\,|z_+\rangle + (1+\mathrm{i})\,|z_-\rangle\right) \qquad |\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(|z_+\rangle + (1+\mathrm{i}\,2)\,|z_-\rangle\right)$$