DINÂMICA

Jaime Villate, 1999.
Universidade do Porto, Faculdade de Engenharia.

Segunda parte da disciplina "Mecânica pura e aplicada", leccionada nas licenciaturas de Engenharia Química e Engenharia Informática e Computação.

Estes apontamentos são apenas os sumários que escrevi para preparar as aulas. Poderão servir como guia de estudo, mas não dispensam a consulta da bibliografia, especialmente para resolver problemas, que é a melhor forma de aprender mecânica.

BIBLIOGRAFIA

1. J.L. Meriam e L.G. Kraige. *Engineering Mechanics, vol. 2: Dynamics*. Quarta edição, John Willey & Sons, 1998
2. F.P. Beer e E.R. Johnston. *Vector Mechanics for Engineers, vol. 2: Dynamics*. Sexta edição, McGraw-Hill, 1996.

Aula 13, 16/4/1999

DINÂMICA

estudo do movimento

① observação do movimento $\longrightarrow$ obtenção das forças que o produzem.

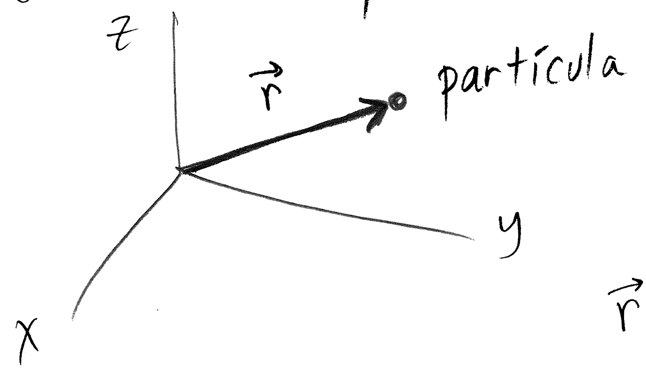
ex:

descoberta de Neptuno a partir da observação do movimento de Urano

② A partir das forças, prever o movimento.

Cinemática: caracterização do movimento, sem considerar as suas causas

cinemática das partículas



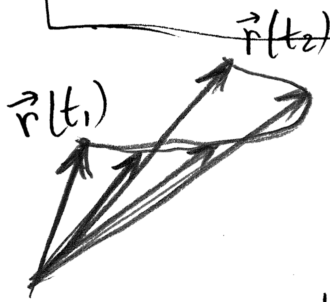
$$\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$$

vector de posição

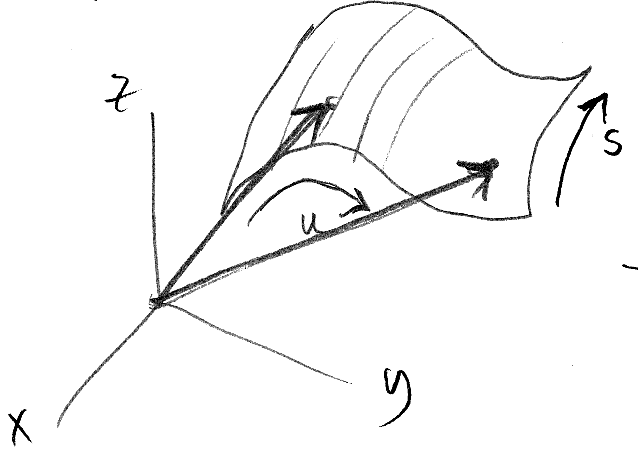
$\vec{r}$ é função contínua do tempo

$$\vec{r}(t) = x(t)\,\hat{\imath} + y(t)\,\hat{\jmath} + z(t)\,\hat{k}$$

$\vec{r}(t)$ | define a equação paramétrica de uma curva (trajectória)
$t_1 \le t \le t_2$



Sistemas com dois graus de liberdade



partícula sobre uma superfície:

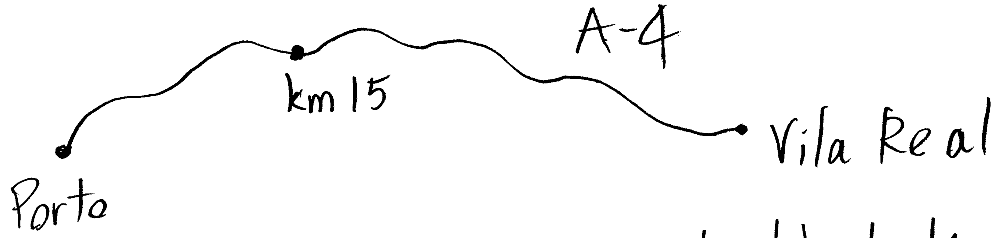
$\rightarrow \quad \vec{r} = \vec{f}(u, s)$ (equação da superfí

coordenadas paramé tricas da superfí

u e s dependem de t

dois graus de liberdade: $u(t)$, $s(t)$

Sistemas com um grau de liberdade

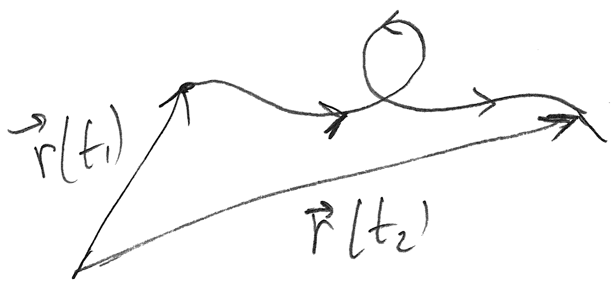


um grau de liberdade $\rightarrow$ s = deslocamento a partir da origem

$s(t)$

$\vec{r} = \vec{f}(s)$ (equação da trajectór

No caso mais geral, é preciso 3 graus de liberdade $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ para determinar o movimento. No entanto se admitirmos que a trajectória é conhecida, e quisermos caracterizar o mov. ao longo dessa trajectória, teremos um grau de liberdade! :



s = deslocamento escalar (ao longo da trajectória) = comprimento de arco a partir de uma origem

velocidade escalar média (entre t_1 e t_2) $= \bar{v} = \dfrac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad \left(\text{em } \frac{m}{s} \text{ ou } \frac{km}{h}, \text{ etc}\right)$$

velocidade escalar instantânea: $v = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$

$$= \frac{ds}{dt}$$

Aceleração escalar média:

$$\bar{a} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$ (aumento da velocidade instantânea por unid. de tempo)

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad \left(\text{em } \frac{m}{s^2}, \frac{km}{h^2}, \text{ etc...}\right)$$

Aula 14, 21 de Abril de 1999

Equações de movimento (em uma dimensão)

$$\boxed{\begin{cases} v = \dfrac{ds}{dt} \\[2ex] a = \dfrac{dv}{dt} \end{cases}}$$

outra equação útil:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = v\frac{dv}{ds}$$

$$\boxed{a = v\frac{dv}{ds}}$$

Resolução das equações de movimento

Exemplos:

1. $s = 3t^3 - t^2 \rightarrow v = 6t^2 - 2t \rightarrow a = 12t - 2$

2. $v = 3t^2 + 5t \longrightarrow a = 6t + 5$

$$\frac{ds}{dt} = 3t^2 + 5t \rightarrow \int_{s_0}^{s} ds = \int_{t_0}^{t} (3t^2 + 5t)\,dt$$

$$\boxed{s - s_0 = t^3 - t_0^3 + \frac{5}{2}(t^2 - t_0^2)}$$

3. $a = 7t$

$$\rightarrow \int_{v_0}^{v} dv = \int_{t_0}^{t} (7t)\, dt \Rightarrow v = v_0 + \frac{7}{2}(t^2 - t_0^2)$$

$$\rightarrow s = s_0 + \int_{t_0}^{t} \left[v_0 + \frac{7}{2}(t^2 - t_0^2) \right] dt = s_0 + v_0 \Delta t + \frac{7}{6}(t^3 - t_0^3) - \frac{7}{2} t_0^2 \Delta t$$

---

(4) $a = 15 - s^2 \quad \rightarrow \quad \int_{s_0}^{s} (15 - s^2)\, ds = \int_{v_0}^{v} v\, dv$

$$15(s - s_0) - \frac{1}{3}(s^3 - s_0^3) = \frac{1}{2}(v^2 - v_0^2)$$

$$\rightarrow v = f(s) \quad \rightarrow \quad \frac{ds}{f(s)} = dt$$

---

(5) $a = 3v \quad \rightarrow \quad \frac{dv}{3v} = dt \quad \rightarrow \quad v = v_0 e^{3(t - t_0)}$

$$s = s_0 + \int_{t_0}^{t} v_0 e^{3(t - t_0)}\, dt$$

outro método: $3v = v \frac{dv}{ds} \quad \rightarrow \quad ds = \frac{dv}{3}$

Movimento uniforme: $v = \text{constante} \quad a = \frac{dv}{dt} = 0$

$$\rightarrow \boxed{\Delta s = v\, \Delta t} \quad \boxed{v = \bar{v}}$$

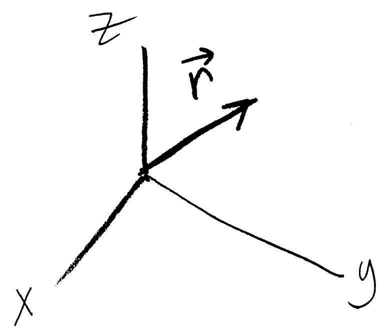
Movimento uniformemente acelerado: $a = \text{constante}$

$\Rightarrow \Delta v = a \Delta t \ (a = \bar{a}) \qquad v_0 + a \Delta t = \frac{ds}{dt} \qquad \boxed{\Delta s = v_0 \Delta t + \frac{a}{2}(t^2 - t_0^2)}$

$$a = v \frac{dv}{ds} \Rightarrow a \Delta s = \frac{1}{2}(v^2 - v_0^2) \Rightarrow \boxed{v^2 = v_0^2 + 2 a \Delta s}$$

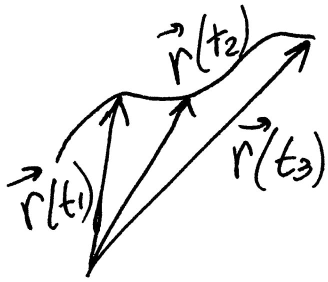
Aula 15, 23/4/1999

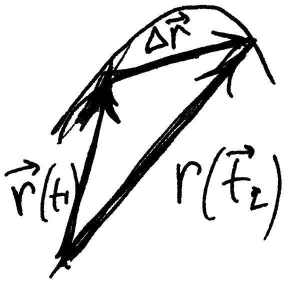
MOVIMENTO EM 3 DIMENSÕES



$\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$ = vector posição

$\vec{r}$ é função do tempo





deslocamento (no intervalo $[t_1, t_2]$) $= \Delta\vec{r} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)$

Velocidade instantânea

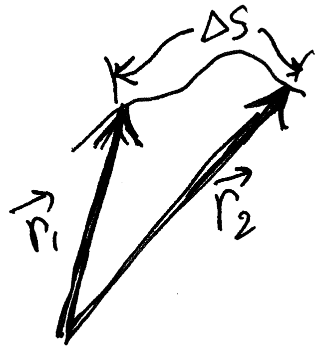
$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$ (derivada do vector $\vec{r}$)

$$\Delta\vec{r} = \Delta x\hat{\imath} + \Delta y\hat{\jmath} + \Delta z\hat{k}$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\hat{\imath} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\hat{\jmath} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\hat{k}\right) = \frac{dx}{dt}\hat{\imath} + \frac{dy}{dt}\hat{\jmath} + \frac{dz}{dt}\hat{k}$$

$$\boxed{\vec{v} = \dot{x}\hat{\imath} + \dot{y}\hat{\jmath} + \dot{z}\hat{k}}$$

Módulo da velocidade



$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

se $\Delta t \to 0 \Rightarrow \Delta s \to |\Delta\vec{r}|$

$$\Rightarrow v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t} = \left|\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\right|$$

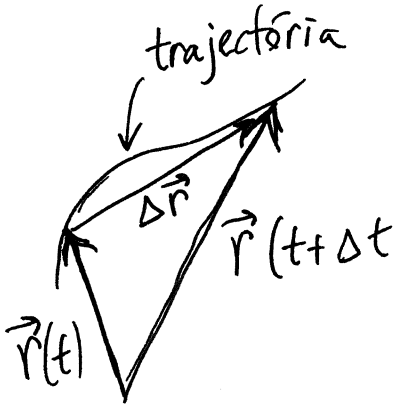
$$|\vec{v}| = v = \dot{s}$$

Aceleração instantânea

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta v_x}{\Delta t}\hat{\imath} + \frac{\Delta v_y}{\Delta t}\hat{\jmath} + \frac{\Delta v_z}{\Delta t}\hat{k} \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{a} = \dot{v}_x \hat{\imath} + \dot{v}_y \hat{\jmath} + \dot{v}_z \hat{k} = \ddot{x}\hat{\imath} + \ddot{y}\hat{\jmath} + \ddot{z}\hat{k}}$$

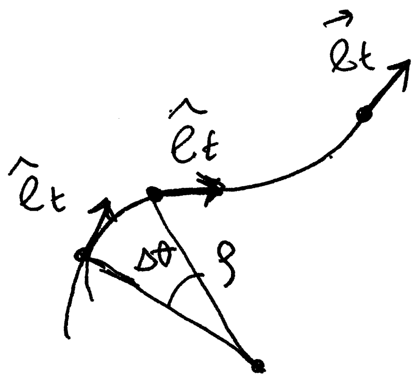
Coordenadas normal e tangencial



no limite $\Delta t \to 0$, o vector deslocamento, $\Delta\vec{r}$, é tangente à trajectória no ponto $\vec{r}(t)$.

$$\Rightarrow \boxed{\vec{v} = v\,\hat{e}_t}$$

onde $\hat{e}_t$ é o VERSOR TANGENTE à trajectória



$\Delta s \approx$ arco de círculo com raio ρ e ângulo $\Delta\theta$

$$\Rightarrow \Delta s \approx \rho\,\Delta\theta$$

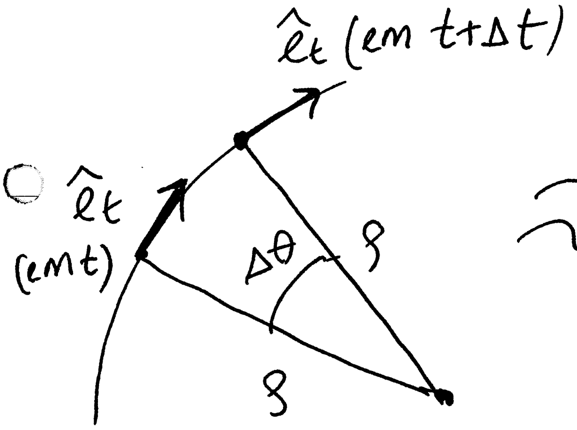
serão iguais no limite $\Delta t \to 0$

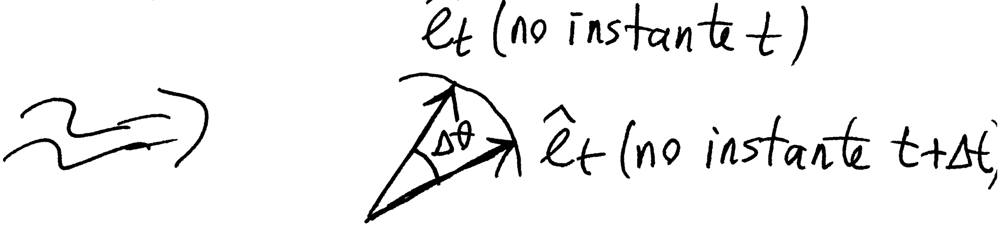
$$\Rightarrow \dot{s} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \rho \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \rho \frac{d\theta}{dt}$$

$\dot{\theta} = \dfrac{d\theta}{dt}$ = velocidade angular

ρ = raio de curvatura, no instante t.

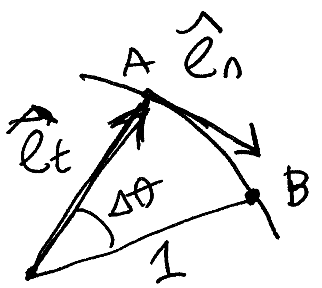
$$\Rightarrow \boxed{v = \dot{s} = \rho\dot{\theta}} \qquad \vec{v} = \rho\dot{\theta}\,\hat{e}_t$$





em função de t, o módulo de $\hat{e}_t$ permanece constante (igual a 1) mas a sua direcção roda um ângulo $\Delta\theta$. ($\Delta\hat{e}_t$ perpendicular a $\hat{e}_t$)

$$\frac{d\hat{e}_t}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \hat{e}_t}{\Delta t}$$



$\hat{e}_n$ = versor normal, perpendicular a $\hat{e}_t$

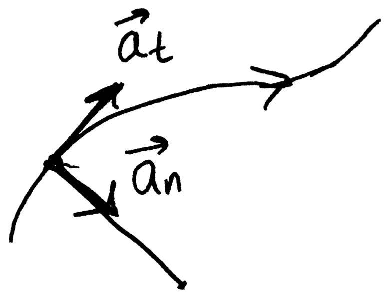
arco AB $= 1 \times \Delta\theta = \Delta\theta$

$$\Rightarrow \Delta\vec{e}_t \approx \Delta\theta\, \hat{e}_n$$

$$\Rightarrow \frac{d\hat{e}_t}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta\, \hat{e}_n}{\Delta t} = \dot{\theta}\, \hat{e}_n \qquad \left(\dot{\theta} = \frac{v}{\rho} = \text{velocid. angular}\right)$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\hat{e}_t) = \frac{dv}{dt}\hat{e}_t + v\frac{d\hat{e}_t}{dt}$$

$$= \dot{v}\,\hat{e}_t + v(\dot{\theta}\,\hat{e}_n)$$



$$\Rightarrow \boxed{\vec{a} = \dot{v}\,\hat{e}_t + \frac{v^2}{\rho}\hat{e}_n}$$

aceleração tangencial $\vec{a}_t$

aceleração normal $\vec{a}_n$

Aula 16 — 28 de Abril de 1999

Exemplo. A posição de uma partícula em função do tempo é $\vec{r} = 5t\hat{\imath} + \frac{3}{2}t^2\hat{\jmath} + 2(1-t^2)\hat{k}$ (r em cm, t em s) calcule:

ⓐ A aceleração

ⓑ O deslocamento entre $t=0$ e $t=1$

ⓒ a distância percorrida entre $t=0$ e $t=1$

ⓓ O raio de curvatura da trajectória, em $t=1$

ⓐ $\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = 3\hat{\jmath} - 4\hat{k}$ (constante

ⓑ $\vec{r}(0) = 2\hat{k}$ $\qquad \vec{r}(1) = 5\hat{\imath} + \frac{3}{2}\hat{\jmath}$

$\rightarrow \Delta\vec{r} = \vec{r}(1) - \vec{r}(0) = 5\hat{\imath} + \frac{3}{2}\hat{\jmath} - 2\hat{k}$

$|\Delta\vec{r}| = 5{,}59$ cm

ⓒ $v = \dfrac{ds}{dt}$ $\qquad \vec{v} = \dot{\vec{r}} = 5\hat{\imath} + 3t\hat{\jmath} - 4t\hat{k}$

$\rightarrow v = \sqrt{25 + 9t^2 + 16t^2} = 5\sqrt{1+t^2}$

$\rightarrow \displaystyle\int_0^d ds = \int_0^1 5\sqrt{1+t^2}\,dt = 5{,}74$

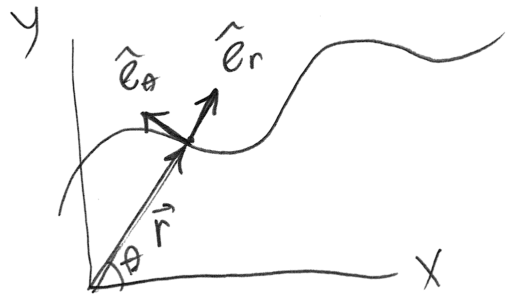
ⓓ $a_n = \dfrac{v^2}{\rho}$ $\qquad a^2 = a_n^2 + a_t^2$ $\qquad a(0) = \sqrt{9+16} = 5$

$a_t = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{5 \cdot \cancel{2}t}{\cancel{2}\sqrt{1+t^2}}$ $\rightarrow a_t(0) = \dfrac{5}{\sqrt{2}}$

$$\rightarrow a_n = \sqrt{25 - \frac{25}{2}} = \sqrt{\frac{25}{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{(5\sqrt{2})^2}{5/\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(50)}{5} = 10\sqrt{2} = 14,14 \text{ cm}$$

Coordenadas polares



$$\hat{e}_r = \cos\theta\,\hat{\imath} + \sin\theta\,\hat{\jmath}$$

$$\hat{e}_\theta = -\sin\theta\,\hat{\imath} + \cos\theta\,\hat{\jmath}$$

$$(\hat{e}_r \cdot \hat{e}_\theta = 0)$$

$$\dot{\hat{e}}_r = -\dot{\theta}\sin\theta\,\hat{\imath} + \dot{\theta}\cos\theta\,\hat{\jmath} \Longrightarrow \boxed{\dot{\hat{e}}_r = \dot{\theta}\,\hat{e}_\theta}$$

$$\dot{\hat{e}}_\theta = -\dot{\theta}\cos\theta\,\hat{\imath} - \dot{\theta}\sin\theta\,\hat{\jmath} \Longrightarrow \boxed{\dot{\hat{e}}_\theta = -\dot{\theta}\,\hat{e}_r}$$

$$\boxed{\vec{r} = r\hat{e}_r}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{e}_r + r\frac{d\hat{e}_r}{dt} = \dot{r}\hat{e}_r + r(\dot{\theta}\hat{e}_\theta)$$

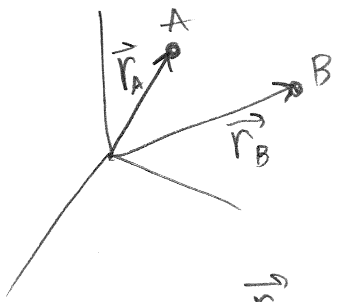
$$\rightarrow \boxed{\vec{v} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\dot{r}}{dt}\hat{e}_r + \dot{r}\frac{d\hat{e}_r}{dt} + \frac{dr}{dt}\dot{\theta}\hat{e}_\theta + r\frac{d\dot{\theta}}{dt}\hat{e}_\theta + r\dot{\theta}\frac{d\hat{e}_\theta}{dt} = \ddot{r}\hat{e}_r + \dot{r}\dot{\theta}\hat{e}_\theta + \dot{r}\dot{\theta}\hat{e}_\theta + r\ddot{\theta}\hat{e}_\theta - r\dot{\theta}^2\hat{e}_r$$

$$\rightarrow \boxed{\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{e}_\theta}$$

Aula 17, 30 de Abril

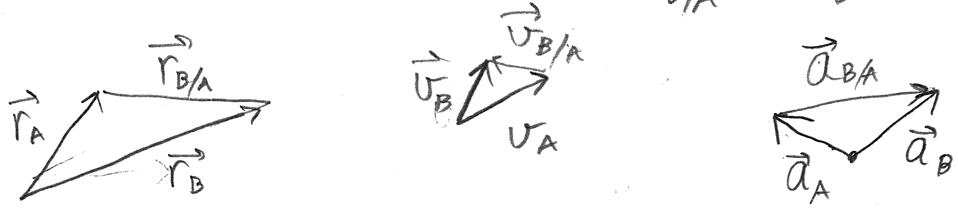
Movimento relativa em 3 dimensões.



$$\vec{r}_{B/A} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$$

$$\rightarrow \vec{v}_{B/A} = \vec{v}_B - \vec{v}_A$$

$$\vec{a}_{B/A} = \vec{a}_B - \vec{a}_A$$



DINÂMICA DAS PARTÍCULAS

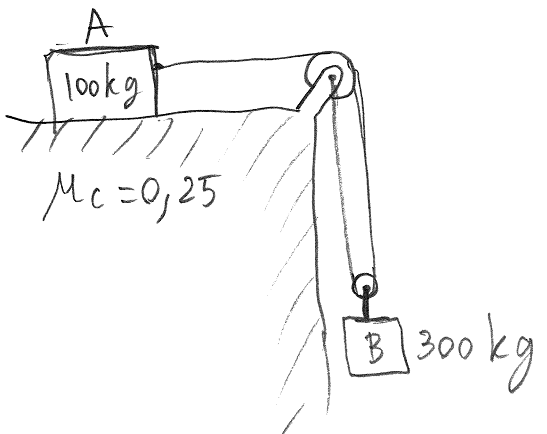
força equivalente

2ª lei de Newton : $\boxed{\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}}$

válida se $m \to kg$, $a \to \frac{m}{s^2}$, $F \to N$

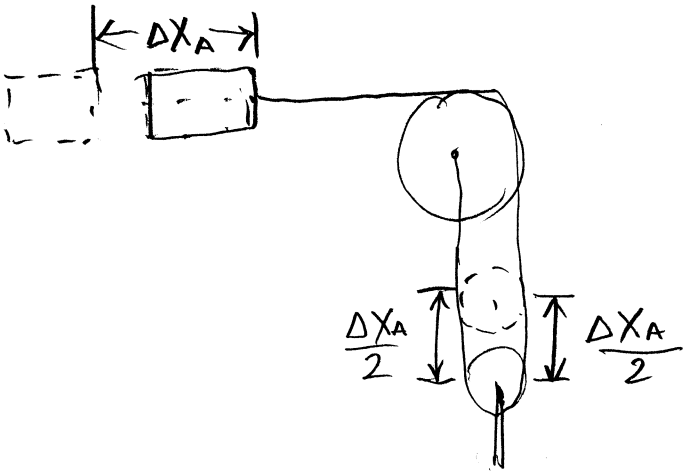
$\Rightarrow$ 1N = peso de um objecto com $m = \frac{1}{9{,}81}$ kg ≈ 100 gramas

Exemplo 1:



Calcule as acelerações dos dois blocos e a tensão nos cabos, desprezando o atrito nos eixos das roldanas e a massa delas.

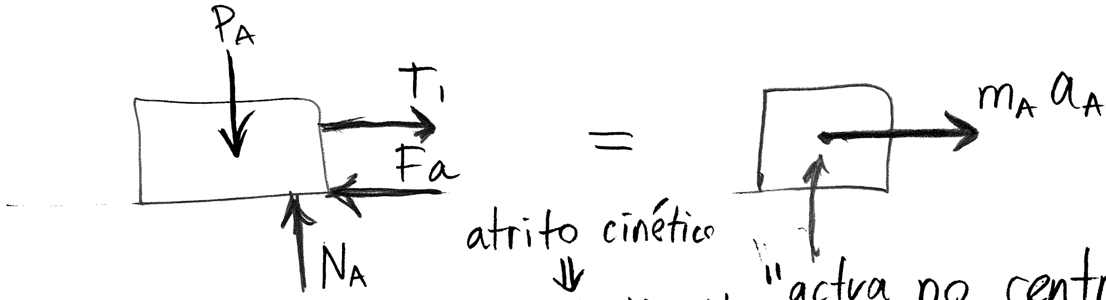
cinemática



$\rightarrow \Delta X_B = \frac{\Delta X_A}{2}$

$\rightarrow \begin{cases} v_B = \frac{v_A}{2} \\ a_B = \frac{a_A}{2} \end{cases}$

Diagrama de corpo livre para o bloco A



atrito cinético

$\Downarrow$

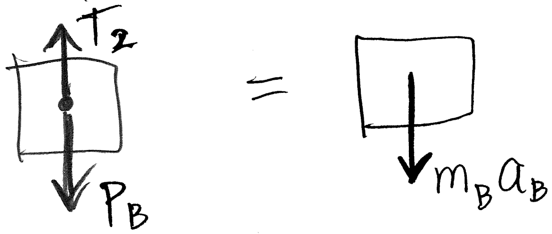
$F_a = \mu_c N_A = \frac{N_A}{4}$

"actua no centro de massa"

$\begin{cases} N_A = 980N & (g=9.8) \\ T_1 = \frac{980}{4} + 100\, a_A \end{cases}$

(2ª de Newton válida para o movimento do centro de massa)

Bloco B



$\rightarrow P_B - T_2 = m_B a_B = \frac{m_B}{2}$

$\rightarrow 2940 - T_2 = 150\, a_A$

Roldana móvel

$(m \approx 0)$

$\rightarrow T_2 = 2T_1$

$$\rightarrow \begin{cases} 2940 - 2T_1 = 150\, a_A \\ T_1 = \frac{980}{4} + 100\, a_A \end{cases}$$

$$\rightarrow 2940 - 490 - 200 a_A = 150\, a_A$$

$$a_A = \frac{2450}{350}\ \frac{m}{s^2} = 7{,}0\ \frac{m}{s^2}$$

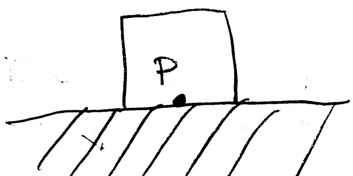
$$\rightarrow a_B = 3{,}50\ \frac{m}{s^2}$$

$$T_1 = 945\ N \quad \rightarrow T_2 = 1890\ N$$

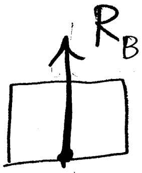
Foi admitido que a tensão em qualquer ponto do fio era igual (T_1). Quando a massa das roldanas não for desprezável e o atrito nos eixos das roldanas também não for desprezável, a tensão no fio, nos dois lados da roldana, já não é igual e a sua diferença deverá ser suficiente para contrariar o atrito no eixo e fazer acelerar a roldana. Esse estudo mais complexo só poderá ser feito mais para a frente, quando estudarmos a dinâmica da rotação dos corpos rígidos.

TERCEIRA LEI DE NEWTON

lei da acção e reacção

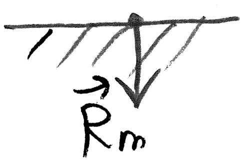


bloco:



$\vec{R}_B$ = reacção normal da mesa sobre o bloco

mesa:



reacção normal do bloco sobre a mesa

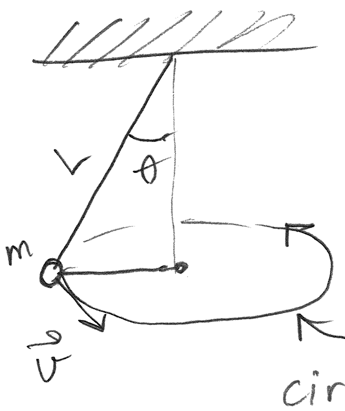
$\vec{R}_m$

$$\vec{R}_B = -\vec{R}_m \quad \text{(forças de acção e reacção)}$$

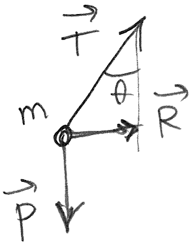
Aula 18, 12 de Maio

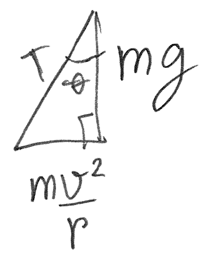
Exemplo 2 . Pêndulo cônico

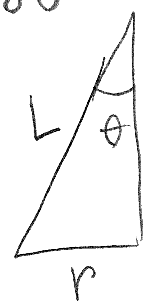
Calcule o módulo da velocidade e o período de oscilação, em função de L e de θ.



movimento circular uniforme com velocidade de módulo v







$$\frac{v^2}{gr} = \frac{r}{\sqrt{L^2 - r^2}}$$

$$r = L\sin\theta \rightarrow v^2 = \frac{g\,(L^2\sin^2\theta)}{\sqrt{L^2 - L^2\sin^2\theta}}$$

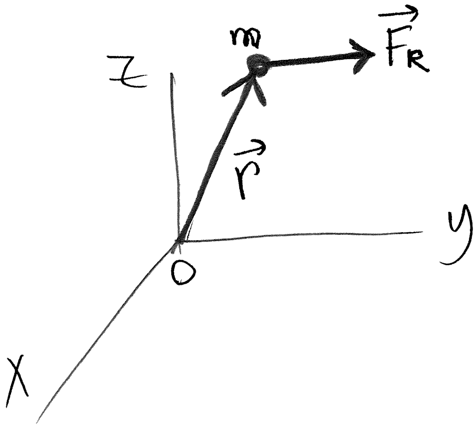
$$v = \sin\theta\sqrt{\frac{gL}{\cos\theta}}$$

$$v = \frac{2\pi r}{T} \rightarrow T = \frac{2\pi L\sin\theta}{v} = 2\pi\sqrt{\frac{L\cos\theta}{g}}$$

pequenas oscilações: $\theta \approx 0 \rightarrow \cos\theta \approx 1$

$$\rightarrow \boxed{T \approx 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}}$$

Momento angular



$$\vec{M}_O(\vec{F}_R) = \vec{r} \times \vec{F}_R = \vec{r} \times \left(m \frac{d\vec{v}}{dt}\right)$$

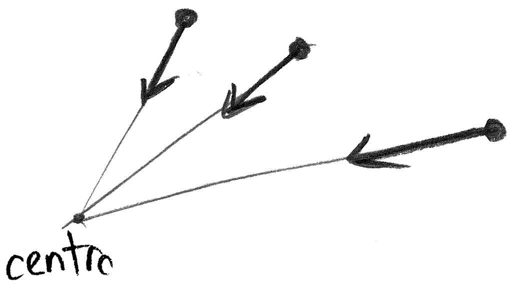
$$= m\left[\vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt} + \underbrace{\vec{v} \times \vec{v}}_{= \text{zero}}\right]$$

$$= m \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{v})$$

$$\rightarrow \quad \vec{M}_O(\vec{F}_R) = \frac{d}{dt}(m\vec{r} \times \vec{v})$$

$\vec{H}_O = m(\vec{r} \times \vec{v})$ designa-se MOMENTO ANGULAR em relação à origem O.

Forças centrais



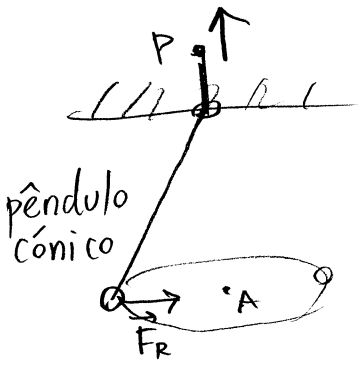
$$\boxed{\vec{F} = f(r)\,\hat{e}_r}$$

exemplos: força gravitaci
força electrostátic

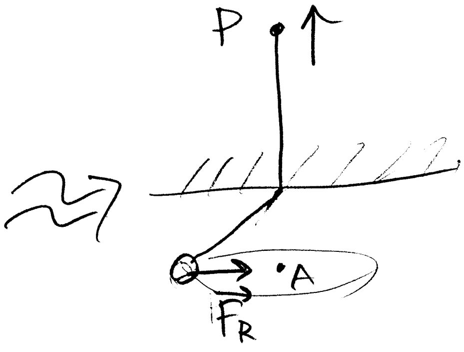
$$\rightarrow \vec{r} \times \vec{F} = (r\hat{e}_r) \times (f(r)\hat{e}_r) = r f(r) \underbrace{(\hat{e}_r \times \hat{e}_r)}_{= \vec{0}}$$

→ Se a força resultante for uma força central, ⟹ H_O permanece constante

Exemplos:



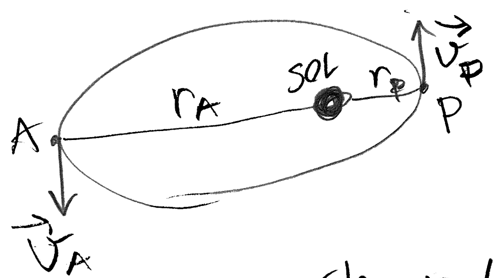
$H_A = m r_1 v_1$



$H_A = m r_2 v_2$

$\Rightarrow \quad r_1 v_1 = r_2 v_2$

órbitas planetárias:



no periélio P (ponto mais próximo do Sol) e no afélio A (ponto mais afastado do Sol)

a velocidade é perpendicular a recta que passa pelo Sol e pelo planeta

$$\Rightarrow \begin{cases} H_A = r_A v_A \\ H_P = r_P v_P \end{cases}$$

por conservação do momento angular,

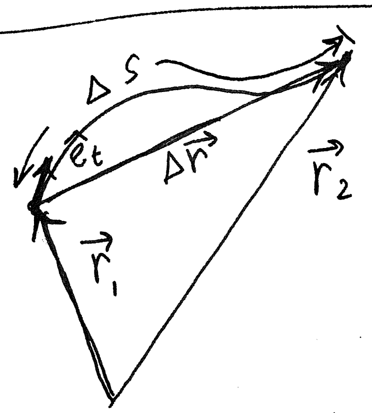
$$r_A v_A = r_P v_P$$

Aula 19, 14/5/1999

Equações escalares do movimento

$$\left.\begin{aligned} v &= \frac{ds}{dt} \\ a_t &= \frac{dv}{dt} \\ a_t &= \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} \rightarrow \quad a_t\, ds = v\, dv \end{aligned}\right\}$$

válidas para qualquer movimento curvilíneo em 3 dimensões



$|\Delta\vec{r}| \neq \Delta s$ e $\Delta\vec{r}$ não é na direção $\hat{e}_t$

no entanto, no limite $\Delta t \rightarrow 0$

$$\boxed{d\vec{r} = ds\, \hat{e}_t}$$

(deslocamento vectorial infinitesimal)

$$a_t\, ds = v\, dv \quad \rightarrow \quad m a_t\, ds = m v\, dv$$

$$\int_{s_1}^{s_2} F_t\, ds = \int_{v_1}^{v_2} m v\, dv$$

$$\rightarrow \quad \boxed{\int_{s_1}^{s_2} F_t\, ds = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2}$$

$U_{12} \equiv \int_{s_1}^{s_2} F_t\, ds \equiv$ trabalho da força $\vec{F}$ desde s_1 até s_2.

$T = \frac{1}{2} m v^2 \equiv$ energia cinética

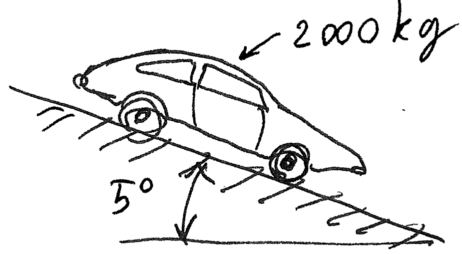
Teorema do trabalho e a energia cinética

$$\boxed{U_{12} = T_2 - T_1}$$

Unidades de trabalho e energia

(um Joule) $1\,J = 1\,N\cdot m = 1\,\frac{kg\cdot m^2}{s^2}$

Exemplo:

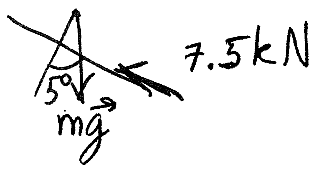


O condutor trava quando a velocidade é 90 km/h a força produzida (da estrada sobre os pneus) é constante, igual a 7.5 kN. Calcule a distância percorrida até o carro parar.

$v_1 = 90\,\frac{km}{h} = 25\,\frac{m}{s} \quad \rightarrow \quad T_1 = \frac{1}{2}(2000)(25)^2 = 625\,kJ$

$v_2 = 0 \quad \rightarrow \quad T_2 = 0$

$$U_{12} = T_2 - T_1 = -625\,kJ$$



$$F_t = (2000 \times 9.81 \times \text{sen}\,5° - 7.5\times 10^3)\,N$$
$$= (1.71 - 7.5)\,kN = -5.79\,kN$$

$$U_{12} = \int_0^d F_t\,ds = -5.79\,d = -625$$

$$\rightarrow d = \frac{625}{5.79}\,m = 107.9\,m$$

$$\begin{cases} d\vec r = ds\,\hat e_t & \text{(coordenadas tangencial e normal)} \\ d\vec r = dx\,\hat\imath + dy\,\hat\jmath + dz\,\hat k & \text{(coord. cartesianas)} \\ d\vec r = dr\,\hat e_r + r\,d\theta\,\hat e_\theta & \text{(coord. polares)} \end{cases}$$

$= x\hat\imath + y\hat\jmath + z\hat k$

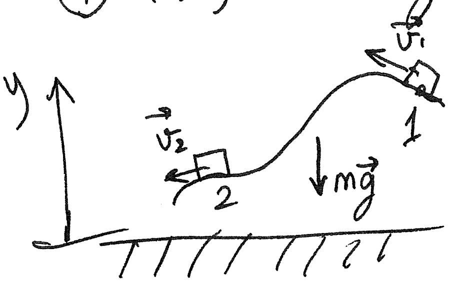
$= r\hat e_r$

$$F_t\,ds = (F_t\,\hat e_t)\cdot(ds\,\hat e_t) = (F_t\,\hat e_t + F_n\,\hat e_n)\cdot(ds\,\hat e_t)$$
$$= \vec F \cdot d\vec r$$

$$\rightarrow \boxed{U_{12} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}}$$

Forças conservativas

① Força da gravidade (peso)



$$\vec{P} = -mg\,\hat{j}$$

$$\rightarrow \vec{P} \cdot d\vec{r} = -mg\,dy$$

$$\rightarrow U_{12} = \int_1^2 \vec{P} \cdot d\vec{r} = -mg \int_1^2 dy = mg y_1 - mg y_2$$

definimos: $V \equiv mgy$ = energia potencial gravitacional

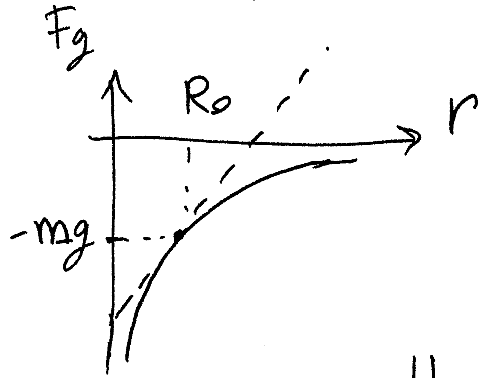
$$\rightarrow U_{12} = V_1 - V_2 \qquad \boxed{U_{12} = -\Delta V}$$

② Força gravitacional $\quad r \simeq R_0$ (raio da Terra)

$\rightarrow P \simeq mg$

em geral, para qualquer r,

$$\vec{F}_g = -G\frac{M_0 m}{r^2}\hat{e}_r = -\frac{mgR_0^2}{r^2}\hat{e}_r$$

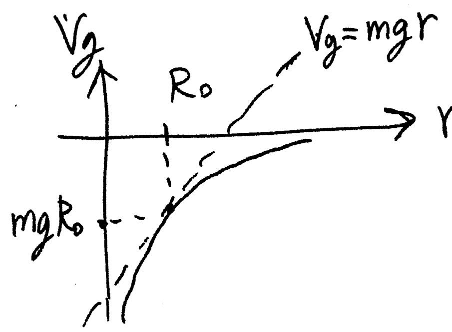


$$\vec{F}_g \cdot d\vec{r} = -\frac{mgR_0^2}{r^2}\hat{e}_r \cdot (dr\,\hat{e}_r + r\,d\theta\,\hat{e}_\theta)$$

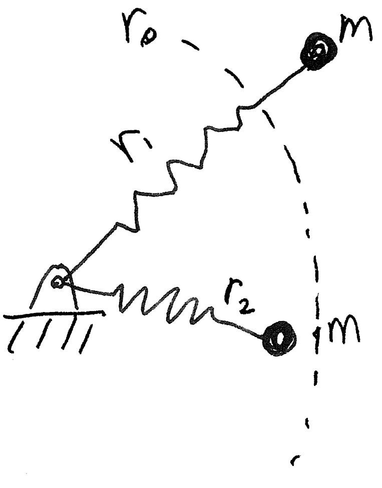
$$= -mgR_0^2\frac{dr}{r^2}$$

$$U_{12} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}_g \cdot d\vec{r} = \frac{mgR_0^2}{r}\Bigg|_{r_1}^{r_2} = \frac{mgR_0^2}{r_2} - \frac{mgR_0^2}{r_1}$$

$$\boxed{V_g \equiv -\frac{mgR_0^2}{r_1}} \quad \rightarrow U_{12} = V_{g_1} - V_{g_2}$$



③ Forças estáticas



r_0 = compri. da mola (normal)

$|\vec{F}| = k(r - r_0)$ lei de Hooke

$$\boxed{\vec{F} = -k(r - r_0)\hat{e}_r}$$

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = -k(r - r_0)\,dr$$

$$U_{12} = -\int_{r_1}^{r_2} k(r-r_0)\,dr = -k\int_{r_1-r_0}^{r_2-r_0} u\,du = \frac{k}{2}(r_1-r_0)^2 - \frac{k}{2}(r_2-r_0)^2$$

$$\boxed{V_e = \frac{1}{2}k(r-r_0)^2}$$ (sempre positiva)

em geral qq. força central é conservativa:

$$\int_1^2 \vec{F}_{cons.}\cdot d\vec{r} = V_1 - V_2$$

forças dissipativas: exemplo: atrito

$$U_{12} = T_2 - T_1$$

$$\int_1^2 \vec{F}_{cons}\cdot d\vec{r} + \int \vec{F}_{diss}\cdot d\vec{r} = T_2 - T_1$$

$$V_1 - V_2 + \int \vec{F}_{diss}\cdot d\vec{r} = T_2 - T_1$$

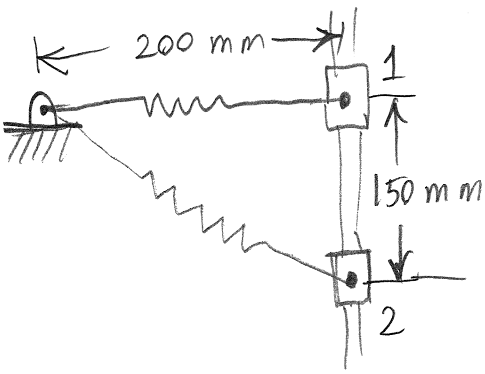
$$\boxed{\int \vec{F}_{diss}\cdot d\vec{r} = E_2 - E_1}$$

Conservação da energia mecânica

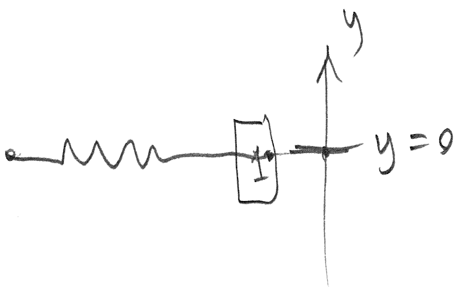
se $\vec{F}_{diss} = 0 \quad \rightarrow \quad E_2 = E_1$

19 de Maio/99

Aula 20



Um cursor de 10 kg desliza sem atrito ao longo de uma haste vertical. A mola que está ligada ao cursor tem uma constante de rigidez de 500 N/m e um comprimento de 100 mm, na posição não deformada. Se o cursor for libertado do repouso na posição 1, determine a sua velocidade depois de se mover 150 mm para a posição 2.



a Força elástica e o pese são conservativas $\longrightarrow$ $Em_1 = Em_2$

energia mecânica em 1.

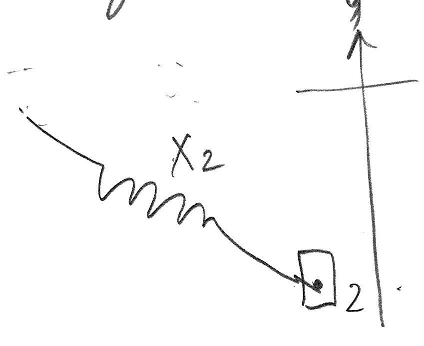
$v_1 = 0 \longrightarrow T_1 = 0$

$y_1 = 0 \longrightarrow V_g = 0$

X_1 = alongamento da mola $= 0,1$ m

$\rightarrow V_e = \frac{1}{2} 500 (0,1)^2 = 2,5 \text{ J} = Em_1$

Energia mecânica em 2: $T_2 = \frac{1}{2} 10 v_2^2$



$V_g = -10 * 9,81 \cdot 0,15 = -14,72 \text{ J}$

$V_e = \frac{1}{2} 500 (0,15)^2 = 5,63 \text{ J}$

$\rightarrow Em_2 = 5 v_2^2 - 9,09$

$$\rightarrow \quad 5v_2^2 - 9{,}09 = 2{,}5 \qquad v_2 = 1{,}522\ \frac{m}{s}$$

Impulso.

2ª equação de movimento: $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$

$$\rightarrow \quad \vec{F}_R = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$m\int_{\vec{v}_1}^{\vec{v}_2} d\vec{v} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_R\, dt$$

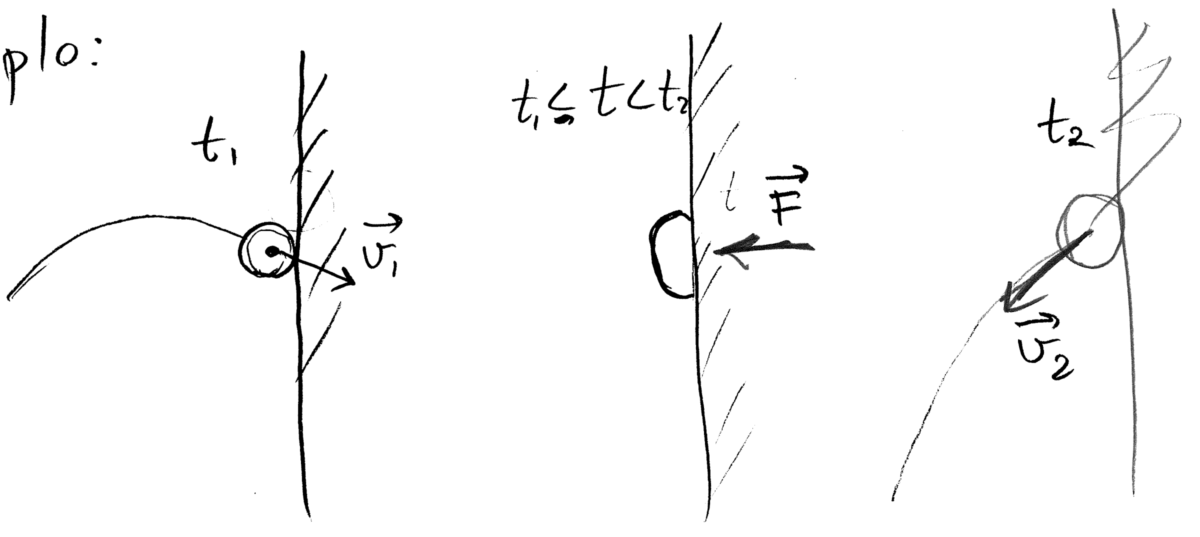
$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_R\, dt = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1}$$

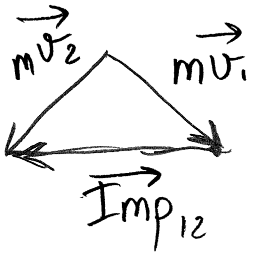
quantidade de movimento $= m\vec{v}$

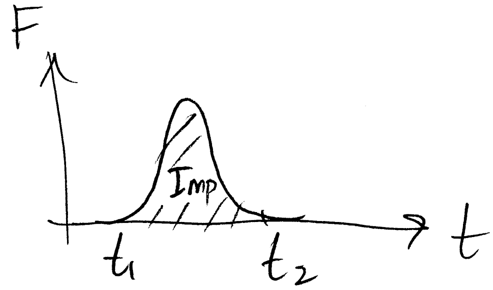
impulso $= \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_R\, dt = \overrightarrow{Imp}_{12}$

→ O impulso de uma força durante um intervalo de tempo é igual ao aumento da quantidade de movimento nesse intervalo.

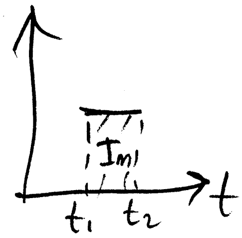
Exemplo:



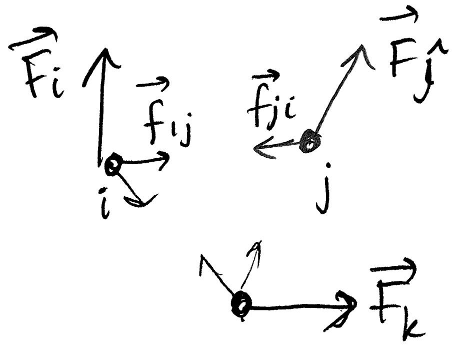




força média



Sistemas de partículas



$\vec{F}_i$ = força externa sobre a partícula i

$\vec{f}_{ij}$ = força de i sobre j (interna)

3ª lei de Newton : $\vec{f}_{ij} = -\vec{f}_{ji}$ (acção e reacção)

$$\sum_{j=1}^{n} \vec{f}_{ij} + \vec{F}_i = m_i \vec{a}_i$$

$$\rightarrow \sum_{i=1}^{n} \left[\vec{F}_i + \cancelto{0}{\sum_{j=1}^{n} \vec{f}_{ij}} \right] = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{a}_i$$

$$\rightarrow \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{a}_i = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i$$

$$\boxed{\vec{L} = \sum m_i \vec{v}_i}$$

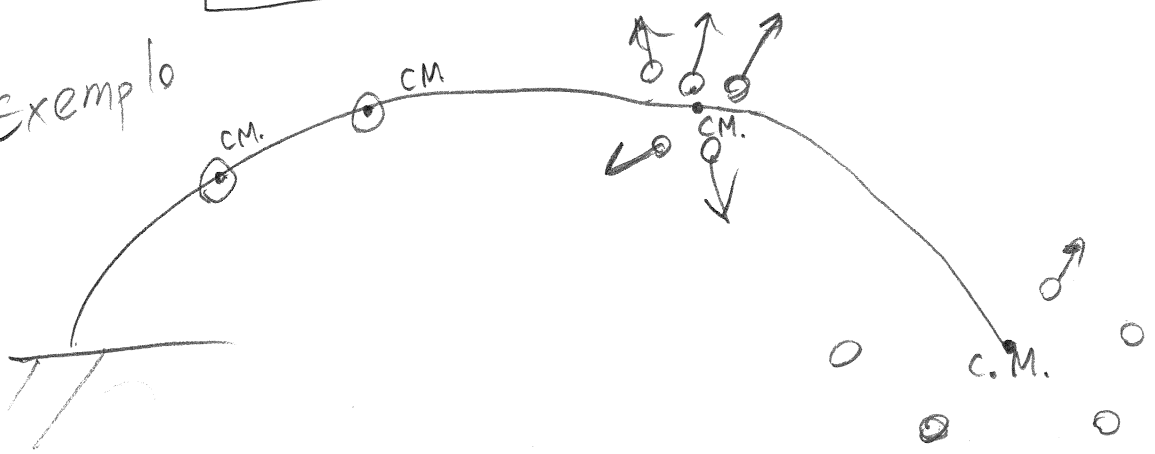
quantidade movimento

$$\vec{L} = \sum m_i \vec{v}_i = \frac{d}{dt} \sum m_i \vec{r}_i = \frac{d}{dt} M \vec{r}_{CM}$$

$$= M \vec{v}_{CM}$$

$$\rightarrow \quad \boxed{\sum \vec{F}_i = M \vec{a}_{CM}}$$

Exemplo

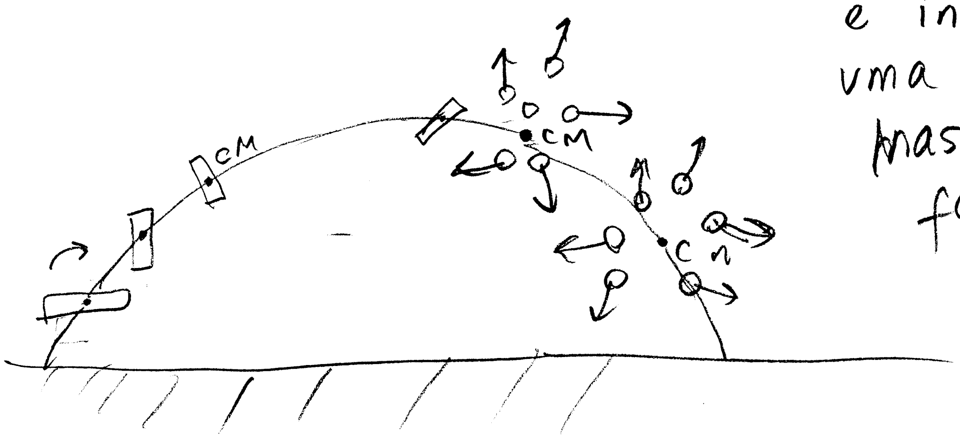


Aula 21

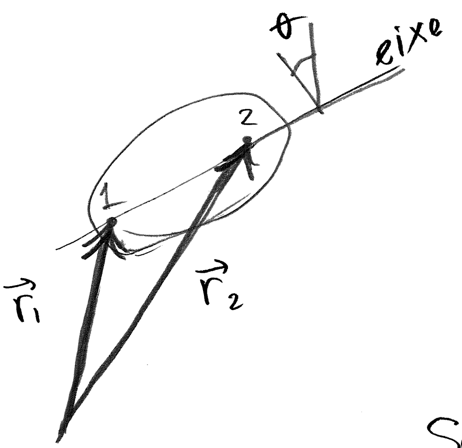
21 de Maio/99

$$\sum \vec{F}_{ext} = M \vec{a}_{CM}$$

o movimento do CM é indêntico ao de uma partícula de massa M, sob a força $\sum \vec{F}_{ext}$



MOVIMENTO DOS CORPOS RÍGIDOS



a posição de um corpo rígido fica determinada a partir da posição de dois pontos $(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ e de um ângulo de rotação sobre o eixo que passa pelos dois pontos

Sete variáveis: $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \theta$

e uma relação entre elas:

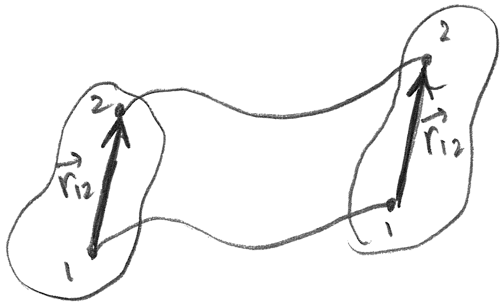
$$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2} = \text{constante}$$

$\rightarrow$ 6 graus de liberdade.

Movimento do C.M. $\longrightarrow$ 3 graus de liberdade

Mais 3 graus de liberdade que têm a ver com rotações do corpo rígido.

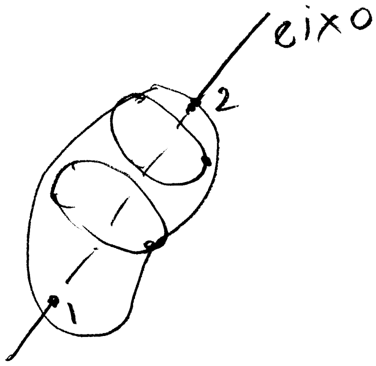
① Translação.



$\vec{r}_{12}$ com direcção e sentido constantes
(para quaisquer dois pontos 1 e 2)

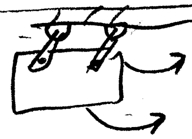
mov. de 1 = mov. de 2 = mov. do C.M

② Rotação em torno de um eixo fixo

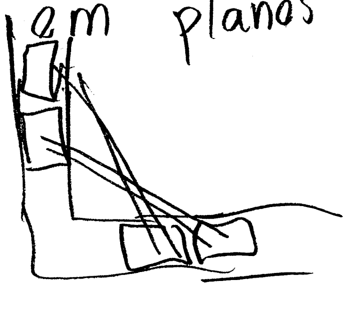


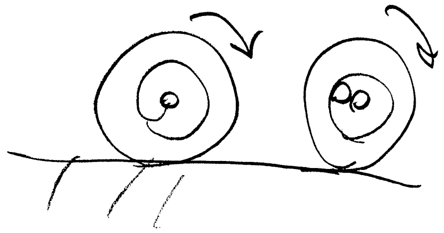
$\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$ fixos → 1 grau de liberdade (ângulo de rotação)

Não confundir com translação curvilínea



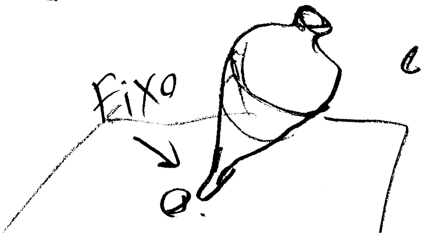
③ Movimento plano geral.
«Todas as partículas do corpo se movem em planos paralelos»





→ Sobreposição de rotação em torno de eixo fixo + translação do eixo

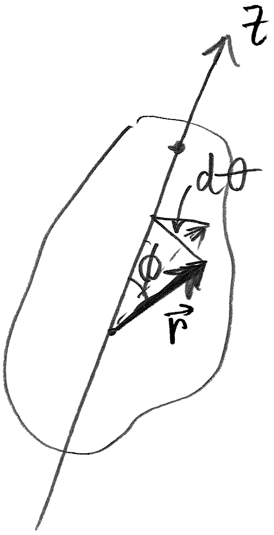
④ Movimento em torno de um ponto fixo



exemplo: um pião

⑤ Movimento geral. Outros mais complicados

ROTAÇÃO EM TORNO A UM EIXO FIXO



$$ds = r \sin\phi \, d\theta \qquad (R \equiv r\sin\phi)$$

$$v = \frac{ds}{dt} = r\sin\phi\,\dot{\theta}$$

$$\boxed{\vec{\omega} = \dot{\theta}\hat{k}} = \text{velocidade } \boxed{\text{vector}} \text{ angular}$$

$\rightarrow v = \omega r \sin\phi$, perpendicular a $\vec{\omega}$ e a $\vec{r}$

$$\rightarrow \boxed{\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r}}$$

também: $v = \omega R$

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times\vec{v}$$

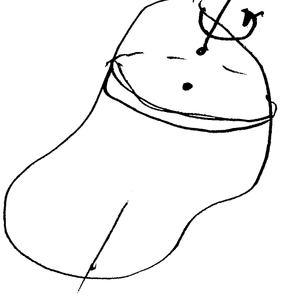
$\vec{\alpha} \equiv \dot{\vec{\omega}}$ = aceleração angular

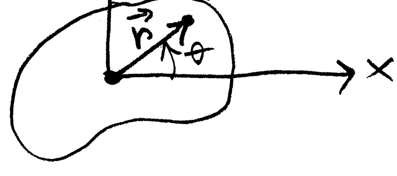
$\vec{\alpha} = \ddot{\theta}\hat{k}$

$$\rightarrow \boxed{\vec{a} = \underbrace{\vec{\alpha}\times\vec{r}}_{\text{tangencial}} + \underbrace{\vec{\omega}\times\vec{v}}_{\text{centrípeta}}}$$

(é um caso particular das coordenadas cilíndricas com $\dot{R}=0$ e $\dot{z}=0$)

Rotação de uma placa representativa





$$v = \omega r$$

$$\begin{cases} a_t = a_\theta = \alpha r \\ a_n = -a_r = \omega v = \omega^2 r = \frac{v^2}{r} \end{cases}$$

Equações de movimento

$$\begin{cases} \omega = \dfrac{d\theta}{dt} \\ \alpha = \dfrac{d\omega}{dt} \\ \alpha = \omega \dfrac{d\omega}{d\theta} \end{cases}$$

(três variáveis dependentes (θ, ω, α) e uma independente: t)

Casos particulares

① Rotação uniforme

$\alpha = 0 \rightarrow \omega = \text{constante}$, $\omega = \dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}$

$$\boxed{\theta = \theta_0 + \omega \Delta t}$$

② Rotação uniformemente acelerada

$\alpha = \text{constante} \rightarrow \alpha = \dfrac{\Delta\omega}{\Delta t}$

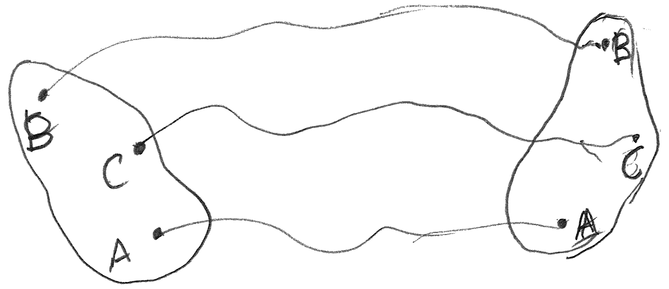
$$\boxed{\omega = \omega_0 + \alpha \Delta t}$$

$$\boxed{\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha \Delta t^2}$$

$$\boxed{\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)}$$

Aula 22

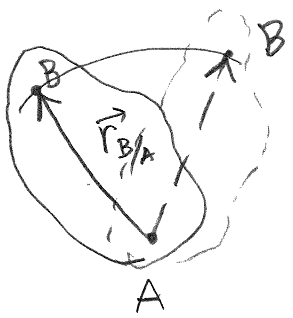
MOVIMENTO PLANO GERAL



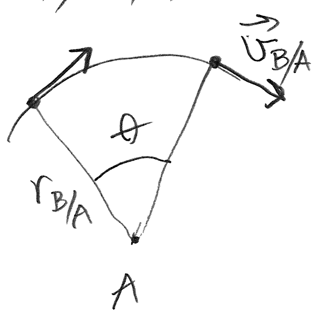
$$\vec{r}_B(t) = \vec{r}_{B/A}(t) + \vec{r}_A(t)$$

$$\rightarrow \vec{v}_B = \vec{v}_{B/A} + \vec{v}_A$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_{B/A} + \vec{a}_A$$



$\vec{r}_{B/A}, \vec{v}_{B/A}, \vec{a}_{B/A} \leftarrow$ rotação em torno dum eixo fixo em A

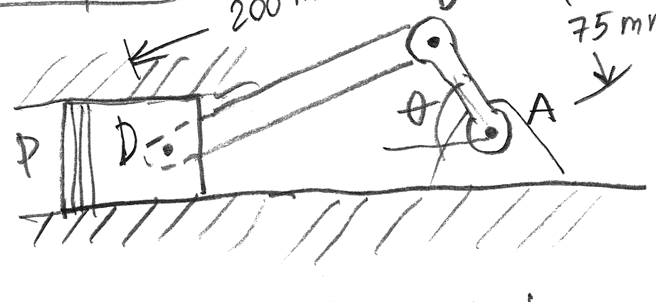


$\vec{v}_{B/A}$ é perpendicular a $\vec{r}_{B/A}$, e:

$$\begin{cases} v_{B/A} = \omega\, r_{B/A} \\ a_n = \omega^2 r_{B/A} \\ a_t = \alpha\, r_{B/A} \end{cases}$$

$$\boxed{\omega \text{ é independente da escolha do eixo (em A, B, C, etc)}}$$

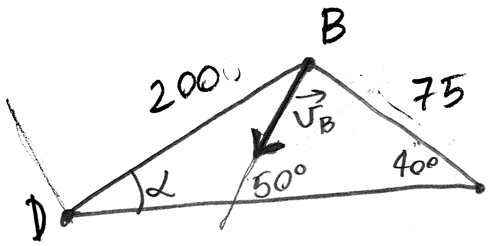
Exemplo:



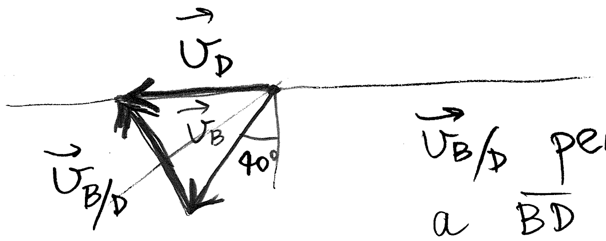
No sistema biela-manivela mostrado, a manivela AB roda com uma velocidade angular constante de 2000 rpm no sentido anti-horário.

Quando $\theta = 40°$, determine (a) a velocidade angular da biela BD (b) a velocidade do pistão P.

$$v_B = \overline{AB}\,\omega_m = (0{,}075\ m)\left(\frac{2000 \cdot 2\pi}{60}\ \frac{1}{s}\right) = 15{,}71\ \frac{m}{s}$$



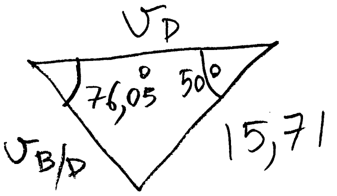
$$\vec{v}_D = \vec{v}_B + \vec{v}_{B/D}$$



$\vec{v}_{B/D}$ perpendicula[r] a $\overline{BD}$ e $\vec{v}_D$ hor[i]zontal.

$$\omega_b = \frac{v_{B/D}}{\overline{BD}}$$

$$\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{75 \sin 40°}{200}\right) = 13{,}95°$$

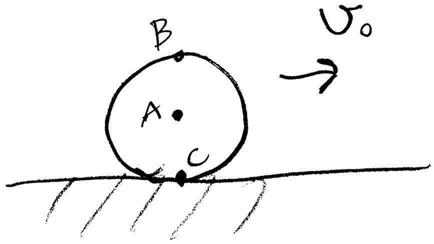


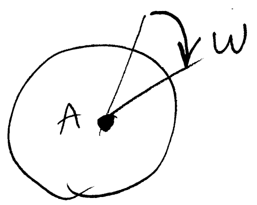
$$\rightarrow\ v_{B/D} = \left(\frac{15{,}71}{\sin 76{,}05}\right)\sin 50° = 12{,}40\ \frac{m}{s}$$

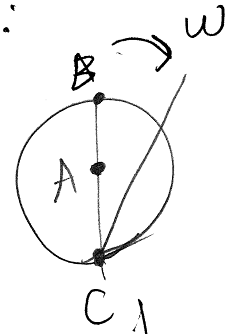
$$\rightarrow\ \omega_b = 62\ s^{-1}$$

$$v_P = v_D = \left(\frac{15{,}71}{\sin 76{,}05}\right)\sin(180-50-76{,}05) = 13{,}09\ \frac{m}{s}$$

Eixo instantâneo de rotação:







$v_A = v_0$

$v_B = v_0 + R\omega$

$v_C = v_0 - R\omega$

Se o cilindro não derrapar,

$v_C = 0 \rightarrow \omega = \frac{v_0}{\ }$

se não derrapar

$v_C = 0$

$v_C = 0$

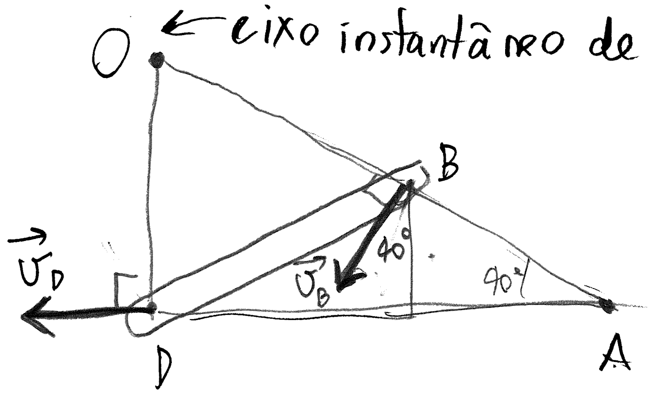
$v_A = R\omega = v_{[0]}$

$v_B = 2R\omega = 2[\ldots]$

→ Rotação sem tran[...]

$\rightarrow$ C = eixo instantâneo de rotação

Exemplo da biela-manivela
sistema



$$\begin{cases} \omega_b = \dfrac{v_B}{\overline{OB}} \\ v_D = \overline{OD}\,\omega_b \end{cases}$$

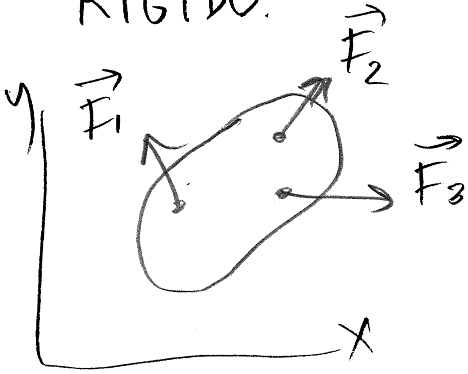
$$\overline{AD} = 75 \cos 40° + 200 \cos 13{,}95°$$

$$\overline{OA} = \frac{\overline{AD}}{\cos 40°}$$

Aula 23

28-Maio-99

DINÂMICA DO MOVIMENTO PLANO DUM CORPO RÍGIDO.



Se o movimento for sobre o plano xy, a força resultante em z deverá ser nula $\rightarrow$ podemos ignorar as componentes z e admitir um sistema de forças co-planares

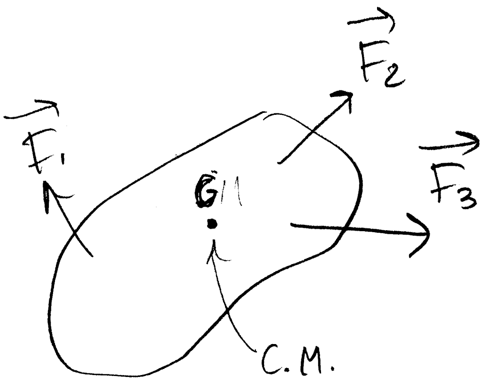
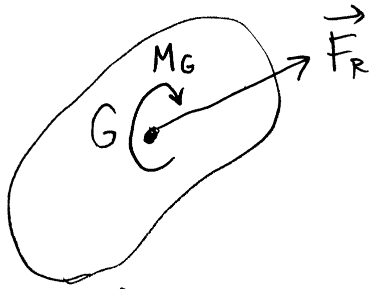


Diagrama de corpo livre

$\equiv$



sistema força-binário equivalente

Como vimos, para sistemas de partículas:

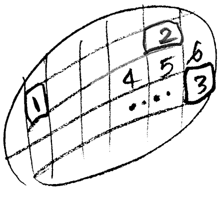
$$\vec{F}_R = m\,\vec{a}_G$$

o momento resultante em relação a um ponto P calcula-se assim:

$$\sum_{j=1}^{3} \vec{M}_P(\vec{F}_j) = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_P(\vec{F}_i + \vec{f}_i) = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times (\vec{F}_i + \vec{f}_i) = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i (\vec{r}_i \times \dot{\vec{v}}_i)$$

$$= \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i (\vec{r}_i \times \vec{v}_i$$

forças internas (produzem momento total nulo)



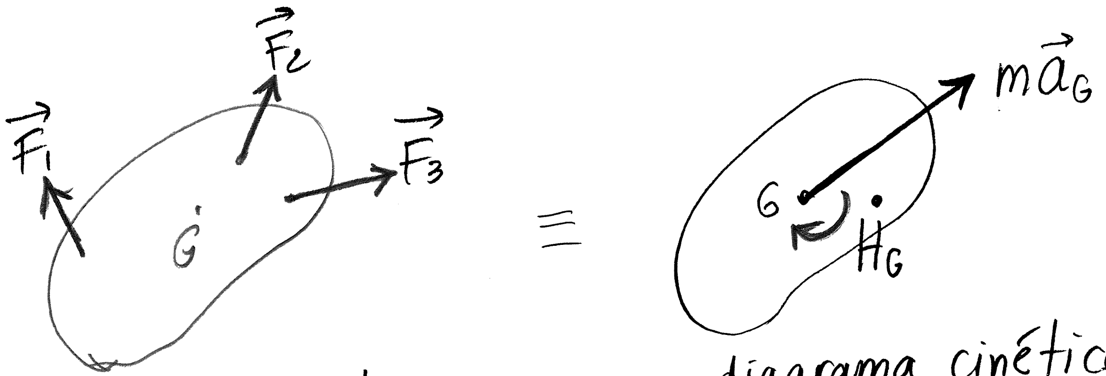
$$\rightarrow \vec{H}_P = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i (\vec{r}_i \times \vec{v}_i)$$

(momento angular total

no caso do movimento plano $\vec{r}_i \times \vec{v}_i$ é sempre na direcção z

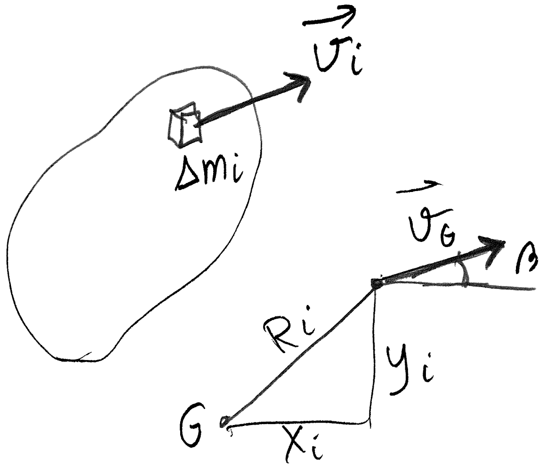
$$\rightarrow \quad M_G = \dot{H}_G$$

$$\left(H_G = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i R_i v_i \operatorname{sen} \theta_i \right)$$

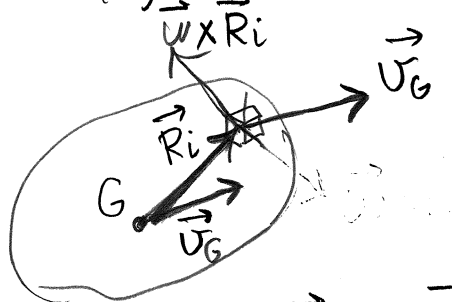


diag. de corpo livre

diagrama cinético



em relação a G:



$$\vec{v}_i = \vec{v}_G + \vec{\omega} \times \vec{R}_i$$

$$|\vec{R}_i \times \vec{v}_i| = R_i(\omega R_i) + x_i v_G \sin\beta - y_i v_G \cos\beta$$

$$\rightarrow \quad H_G = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i \left[\omega R_i^2 + x_i v_G \sin\beta - y_i v_G \cos\beta \right]$$

$$= \omega \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i R_i^2 + v_G \sin\beta \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i x_i - \left(\sum_{i=1}^{n} \Delta m_i y_i \right) v_G \cos\beta$$

$$= \omega \bar{I} + v_G \sin\beta \, m \bar{x} - v_G \cos\beta \, m \bar{y}$$

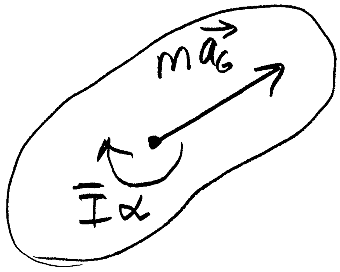
como a origem está em G $\rightarrow \bar{x} = \bar{y} = 0$

$\rightarrow \boxed{H_G = \bar{I}\omega}$

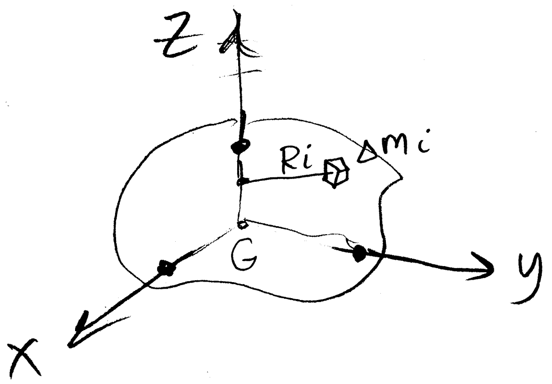
onde $\bar{I} = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i R_i^2$ = momento de inércia relativo a o centro de massa.

$\rightarrow \boxed{\dot{H}_G = \bar{I}\alpha}$

Diagrama cinético



Cálculo do momento de inércia

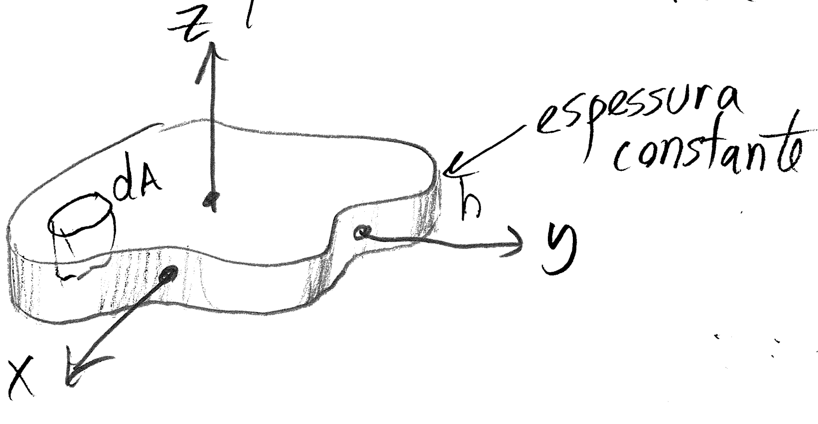


Ri distância até o eixo dos

$$I = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} R_i^2 \Delta m_i$$

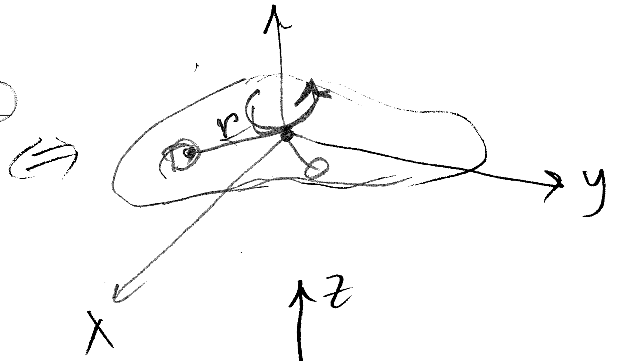
$$\boxed{I = \int (x^2+y^2)\,dm}$$ relativo ao eixo.

Sólidos planos com densidade e espessura constantes



$$dm = \rho\, dV$$
$$= \rho h\, dV$$

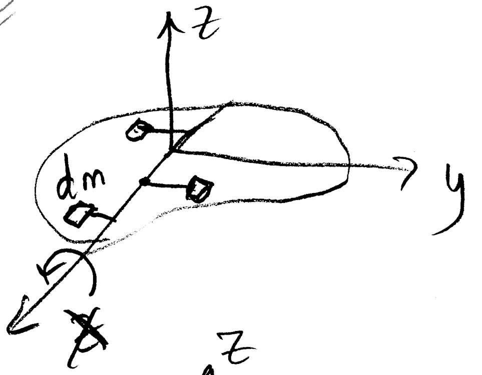
Placas finas



$$I_0 = h\rho \iint (x^2+y^2)\, dA$$

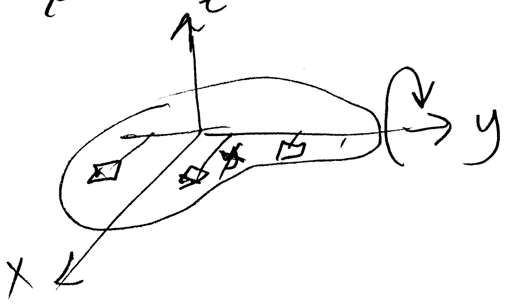
momento de inércia polar

massa superficial



$$I_x = h\rho \iint y^2\, dA$$

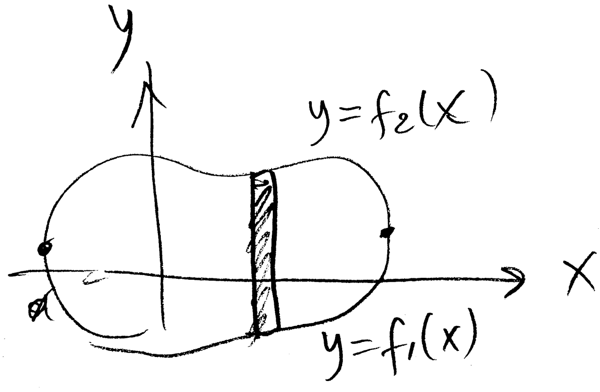
de igual forma



$$I_y = h\rho \iint x^2\, dA$$

$$\rightarrow \boxed{I_z = I_x + I_y}$$

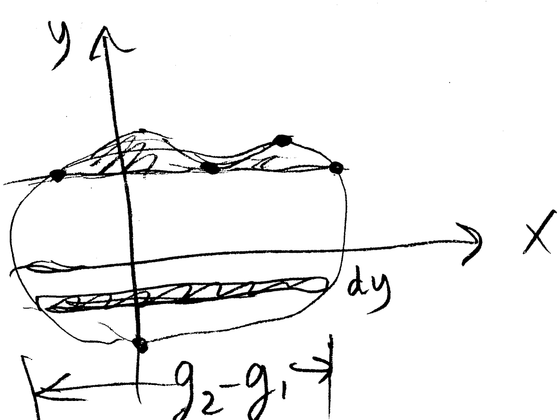
I_y :



$$I_y = h\rho \int_{x_0}^{x_f} [f_2(x) - f_1(x)]\, x^2\, dx$$

$$h\rho = \frac{m}{A} = \frac{m}{\int_{x_0}^{x_f} (f_2 - f_1)\, x^2\, dx}$$

I_x



$$I_x = h\rho \int_{y_0}^{y_f} [g_2(y) - g_1(y)]\, y^2\, dy$$

$$h\rho = \frac{m}{A} = \frac{m}{\int_{y_0}^{y_f} (g_2 - g_1)\, y^2\, dy}$$

$$\rightarrow I_x = m k_x^2 \leftarrow \frac{\int (g_2 - g_1)\, y^2\, dy}{A}$$

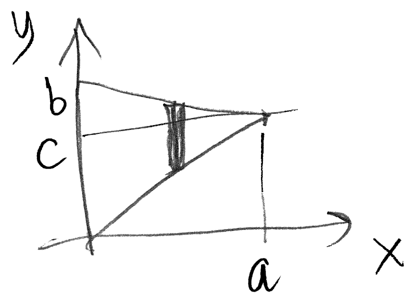
k_x = raio de giração

momento polar : $I_o = m k^2$

$$(k^2 = k_x^2 + k_y^2)$$

Exemplo.

Calcule o raio de giração de um triângulo com base b e altura a, em relação à base



$$f_2 = b - \left(\frac{b-c}{a}\right)x$$

$$f_1 = \frac{c}{a}x$$

$$f_2 - f_1 = b - \left(\frac{b}{a}\right)x$$

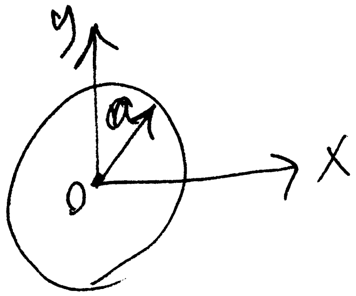
$$k_y^2 = \frac{2}{ab}\int_0^a \left[bx^2 - \left(\frac{b}{a}\right)x^3\right]dx = \frac{2}{ab}\left[\frac{a^3b}{3} - \frac{a^3b}{4}\right]$$

$$= \frac{a^2}{6} \quad \rightarrow \quad \boxed{k_y = \frac{a}{\sqrt{6}}}$$

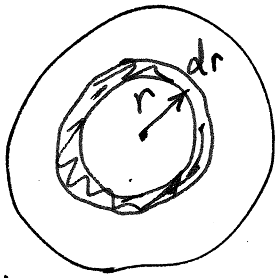
Aula 24

2 de Junho/99

Exemplo 2. Calcule k_x, k_y e k_z para um disco de raio a, sobre o plano xy, com centro na origem



cálculo de k_z



$$k_z^2 = \frac{\iint r^2\, dA}{A}$$

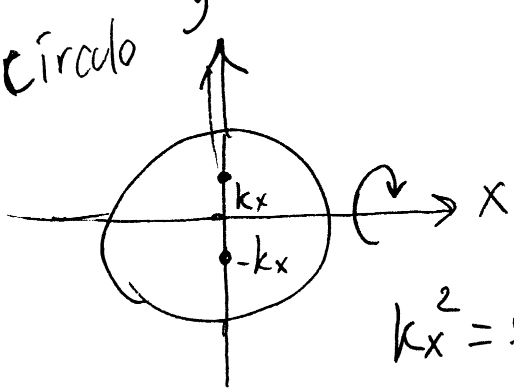
$$dA = 2\pi r\, dr$$

$$\rightarrow k_z^2 = \frac{1}{\cancel{\pi} a^2}\int_0^a 2\cancel{\pi} r^3\, dr = \frac{a^4}{2a^2} = \frac{a^2}{2} \qquad \boxed{k_z = \frac{a}{\sqrt{2}}}$$

$$k_z^2 = k_x^2 + k_y^2 \qquad \text{mas } k_x = k_y$$

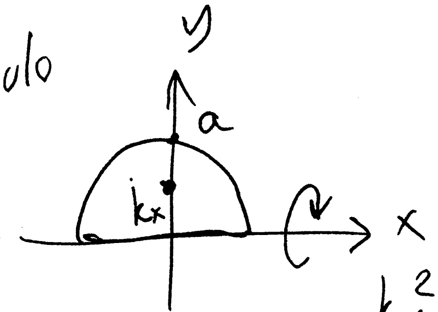
$$\rightarrow k_x^2 = k_y^2 = \frac{1}{2}k_z^2 = \frac{a^2}{4} \rightarrow \boxed{k_x = k_y = \frac{a}{2}}$$

círculo



$$k_x^2 = \frac{a^2}{4}$$

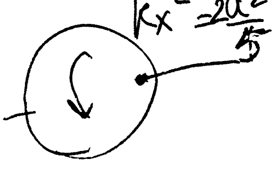
semicírculo



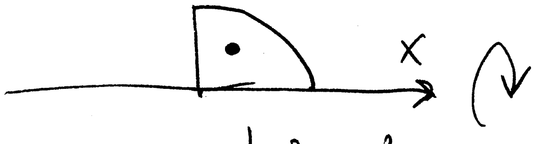
$$k_x^2 = \frac{a^2}{4}$$

mas

esfera

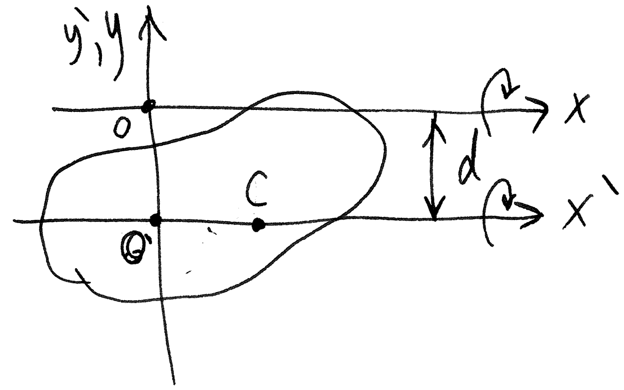


$$k_x^2 = \frac{2a^2}{5}$$



$$k_x^2 = \frac{a^2}{4}$$

Teorema dos eixos paralelos



G = centroide

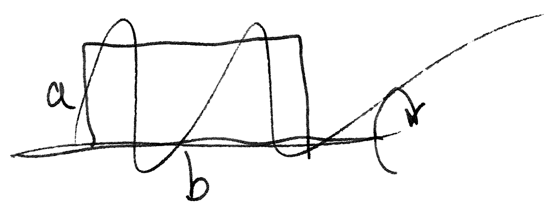
$$k_x^2 = \frac{1}{A}\int y^2\, dA$$

$$\to k_x^2 = \frac{1}{A}\int (y'-d)^2\, dA = \frac{1}{A}\Big[\int y'^2\, dA - 2d\int y'\, dA + d^2\int dA$$

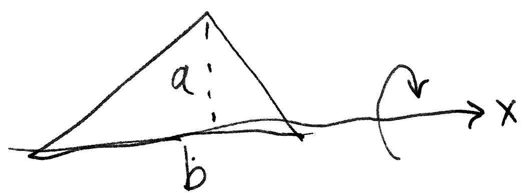
$$= \bar{k}_x^2 - 2d\,\underbrace{\bar{y}'}_{0} + d^2 = \bar{k}_x^2 + d^2$$

$$\to \boxed{k_x^2 = \bar{k}_x^2 + d^2}$$

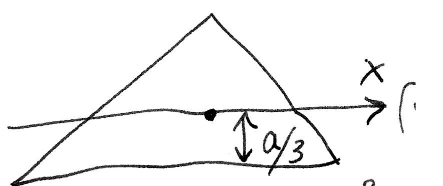
Exemplos



$\equiv$

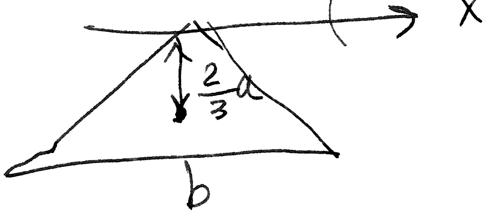


$$k_x^2 = \frac{a^2}{6} \Rightarrow$$



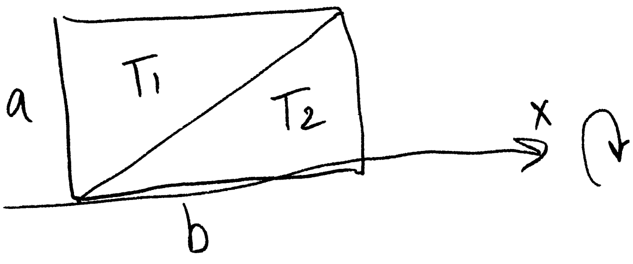
$$k_x^2 = \frac{a^2}{6} - \frac{a^2}{9} = \ldots$$

$\to$



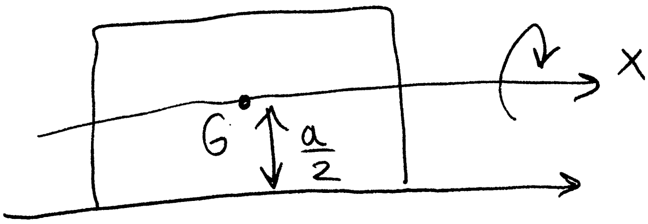
$$k_x^2 = \frac{a^2}{18} + \frac{4}{9}a^2 = \frac{a^2}{2}$$

$$k^2 = \frac{A_1 k_1^2 + A_2 k_2^2}{A}$$

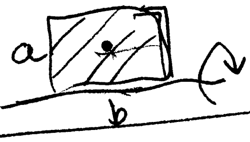
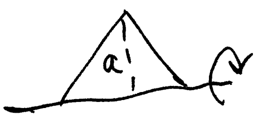


$$k_x^2 = \frac{1}{ab}\left[\int_{T_1} y^2\,dA + \int_{T_2} y^2\,dA\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{a^2}{6} + \frac{a^2}{2}\right] = \frac{a^2}{3}$$

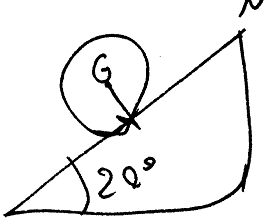


$$\rightarrow \bar{k}_x^2 = \frac{a^2}{3} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{12}$$

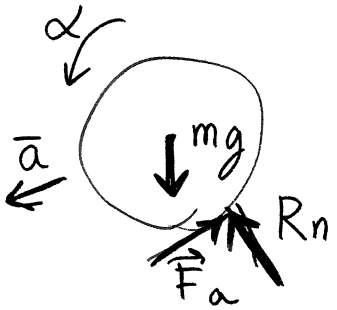
	d	k^2
	$\frac{4}{3}\frac{r}{\pi}$	$\frac{r^2}{4}$
	$\frac{a}{2}$	$\frac{a^2}{3}$
	$\frac{a}{3}$	$\frac{a^2}{6}$

Exemplo:

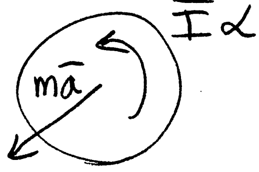
Um tubo metálico de 150 mm de raio roda sobre um plano inclinado. a partir do repouso. Calcule α e o tempo necessário para descer 3 m sobre o plano.



$\mu_s = 0{,}15$
$\mu_k = 0{,}12$

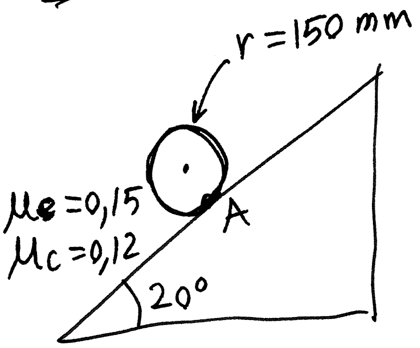


$\equiv$

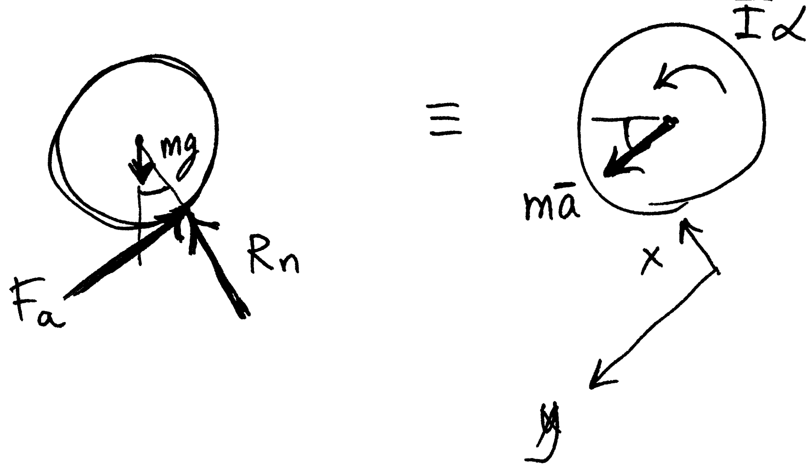


$$\bar{k}^2 = r^2 \rightarrow \bar{I} = mr^2$$

Aula 25 9 de Junho/99



Calculo de α.



$$\begin{cases} \sum F_x : -mg\cos 20^\circ + R_n = 0 \\ \sum F_y : mg\sin 20^\circ - F_a = m\bar{a} \\ \sum M_A : rmg\sin 20^\circ = rm\bar{a} + mr^2\alpha \end{cases}$$

Duas possibilidades
1. atrito estático $\rightarrow v_A = 0 \rightarrow \bar{a} = \alpha r$
   $\rightarrow |F_a| \le \mu_e R_n$
2. atrito cinético $\rightarrow v_A \neq 0$, $\bar{a} \neq \alpha r$
   $F_a = \mu_c R_n$

1. $\bar{a} = \alpha r$

$$\rightarrow \quad r\cancel{m}g\sin 20^\circ = r^2\cancel{m}\alpha + \cancel{m}r^2\alpha$$

$$\rightarrow \quad \alpha = \left(\frac{1}{2r}\right) g\sin 20^\circ = 11{,}18 \ \frac{\text{rad}}{s^2}$$

conferir que $|F_a| \le \mu_e R_n$

$$R_n = mg\cos 20^\circ = 9{,}22\,m \qquad \mu_e R_n = 1{,}38\,m$$

$$F_a = -m\alpha r + mg\sin 20° = mg\left[-\frac{1}{2} + 1\right]\sin 20° =$$

$$= +m\,\bar{a} = m\,\frac{g\sin 20°}{2} = 1{,}68\,m$$

$\longrightarrow$ $F_a > \mu_e R_n$ (o cilindro derrapa)

(2) $F_a = \mu_c R_n$

$$\rightarrow \begin{cases} \cancel{m}g\sin 20° - \cancel{m}g\cos 20°(0{,}12) = \cancel{m}\bar{a} \\ \cancel{r}\cancel{m}g\sin 20° = \cancel{r}\cancel{m}\bar{a} + \cancel{m}r^{\cancel{2}}\alpha \end{cases}$$

$$\rightarrow \bar{a} = (\sin 20° - 0{,}12\cos 20°)\,g$$

$$\alpha = 0{,}12\cos 20°\left(\frac{g}{r}\right) = 7{,}37\ \frac{rad}{s^2}$$