ESTÁTICA

Jaime Villate, 1999.
Universidade do Porto, Faculdade de Engenharia.

Primeira parte da disciplina "Mecânica pura e aplicada", leccionada nas Licenciaturas em Engenharia Química e Engenharia Informatica e Computação.

Estes apontamentos são apenas os sumários que escrevi para preparar as aulas. Poderão servir como guia de estudo, mas não dispensam a consulta da bibliografia, especialmente para resolver problemas, que é a melhor forma de aprender mecânica.

BIBLIOGRAFIA

1. J.L. Meriam e L.G. Kraige. *Engineering Mechanics, vol. 1: Statics*. Quarta edição, John Willey & Sons, 1998

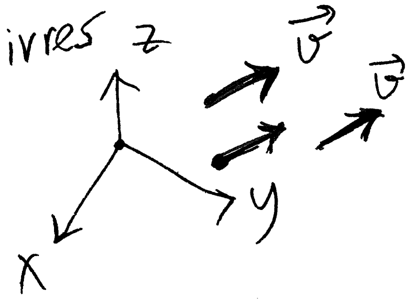
2. F.P. Beer e E.R. Johnston. *Vector Mechanics for Engineers, vol. 1: Statics*. Sexta edição, Mc Graw-Hill, 1996.

MECÂNICA

26/2/99, Aula 1

VECTORES

1) livres

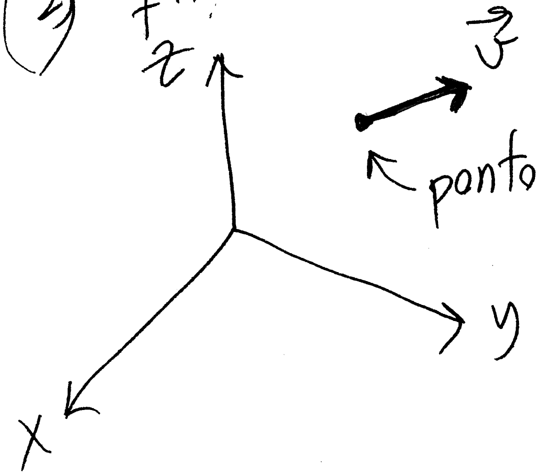


módulo + direcção + sentido

(v) ($\hat{v}$) $\vec{v} = v\hat{v}$

$\hat{v}$ (módulo unitário) = versor

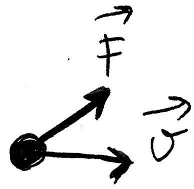
2) fixos



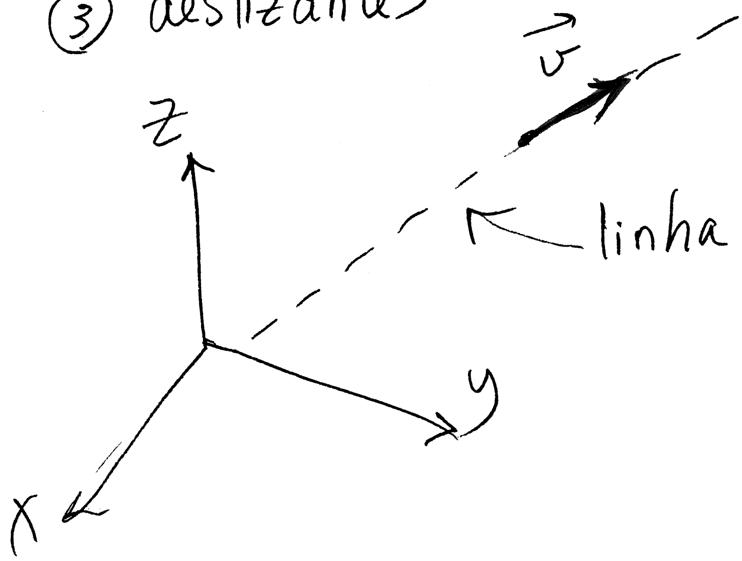
ponto de aplicação + módulo + versor

exemplos: - velocidade de uma partícula

- força sobre uma partícula



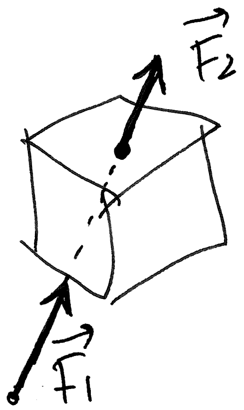
3) deslizantes



pode actuar em qualquer ponto da linha de acção.

linha de acção + módulo + sentido

exemplo: Forças sobre corpos rígidos



$F_1 = F_2$ e linha acção 1 = l. a. 2

$\Rightarrow \quad \vec{F}_1 \Leftrightarrow \vec{F}_2$

Forças

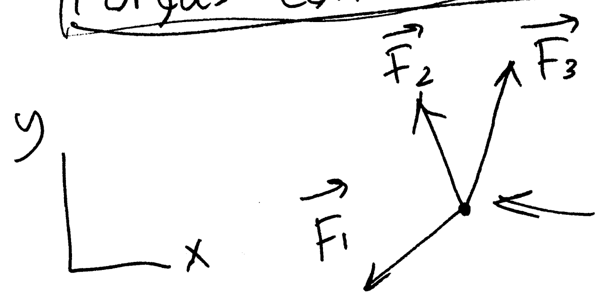
$\vec{F} = F\,\hat{F}$

Unidades de F (SI) = Newtons (N)

$m = 1\,kg \rightarrow P = 9{,}8\,N$

1 N = força que produz aceleração $a = 1\,\frac{m}{s^2}$ sobre uma massa de 1 Kg.

Forças concorrentes num plano

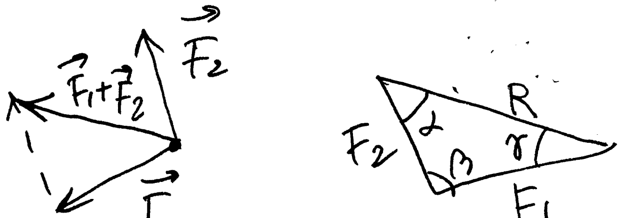


← o mesmo ponto de acção

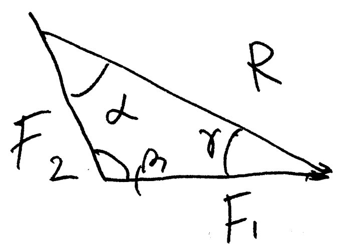
Aula 2 28 Fev

Soma de vectores concorrentes

$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$



propriedades { - comutativa
- associativa
- distributiva.



teorema do co-seno:

$$R^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2\cos\beta$$

$$F_1^2 = F_2^2 + R^2 - 2RF_2\cos\alpha$$

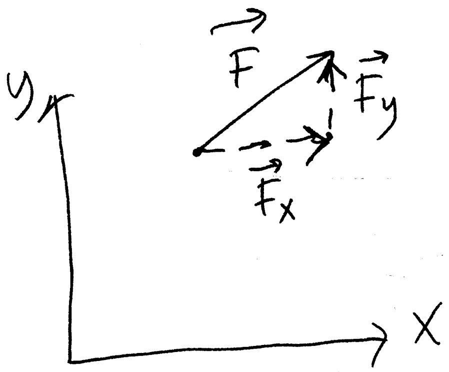
$$F_2^2 = F_1^2 + R^2 - 2RF_1\cos\gamma$$

teorema do seno:

$$\frac{R}{\text{sen}\,\beta} = \frac{F_1}{\sin\alpha} \qquad \frac{R}{\sin\beta} = \frac{F_2}{\sin\gamma} \qquad \frac{F_1}{\sin\alpha} = \frac{F_2}{\sin\gamma}$$

Componentes

Coordenadas ~~rectangulares~~ (cartesianas)



$$\vec{F} = \underbrace{\vec{F_x} + \vec{F_y}}_{\text{componentes cartesianas}}$$

componentes cartesianas ~~rectangulares~~

$\vec{F_x} = F_x\,\hat{\imath}$ ← versor na direcção positiva de $\hat{\imath}$

$\vec{F_y} = F_y\,\hat{\jmath}$ ← versor na direcção de $\hat{\jmath}$ (sentido positivo)

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$

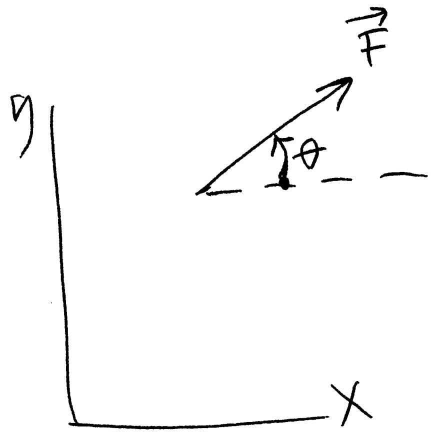
(F_x, F_y) = coordenadas cartesianas

Nota: F é sempre positivo, mas F_x, F_y podem ser negativas:

$$\vec{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} \qquad \begin{pmatrix} A_x > 0 \\ A_y < 0 \end{pmatrix}$$

SOMA USANDO COORD CARTESIANAS →

Coordenadas polares



(F, θ) = coordenadas polares

$F_x = F\cos\theta$

$F_y = F\sin\theta$

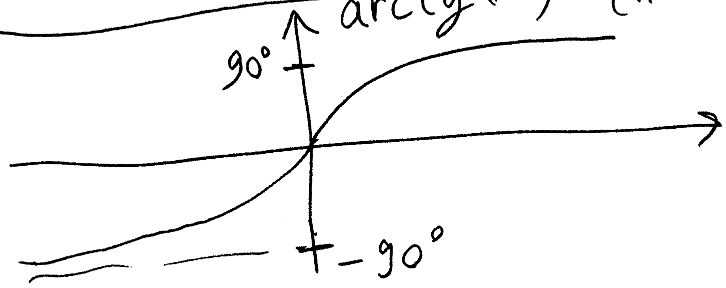
$\vec{F} = F\cos\theta\,\hat{\imath} + F\sin\theta\,\hat{\jmath}$

$= F\hat{F} \rightarrow \hat{F} = \cos\theta\,\hat{\imath} + \sin\theta\,\hat{\jmath}$

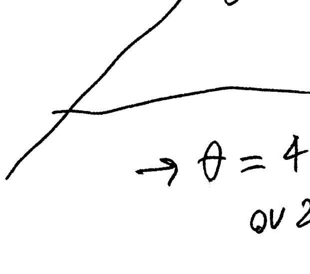
$\theta = \arctan\left(\frac{F_y}{F_x}\right)$

Nota: { tg θ define apenas a direcção e não o sentido
arctg(x) tem dois valores, mas
a calculadora dá apenas um deles

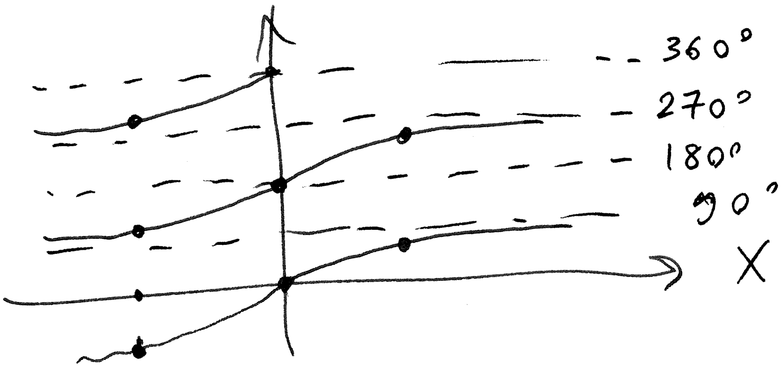
arctg(X) (na calculadora)



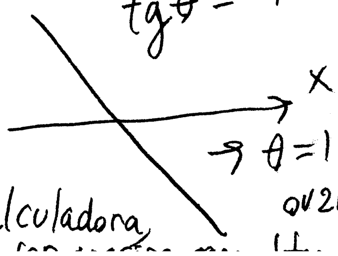
tg θ = 1



→ θ = 45°
ou 225°



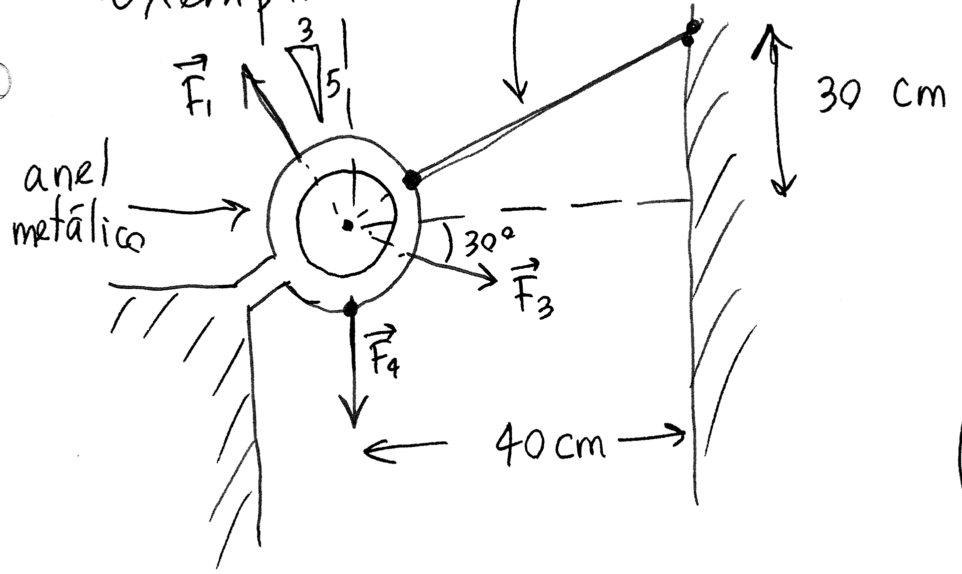
tgθ = -1

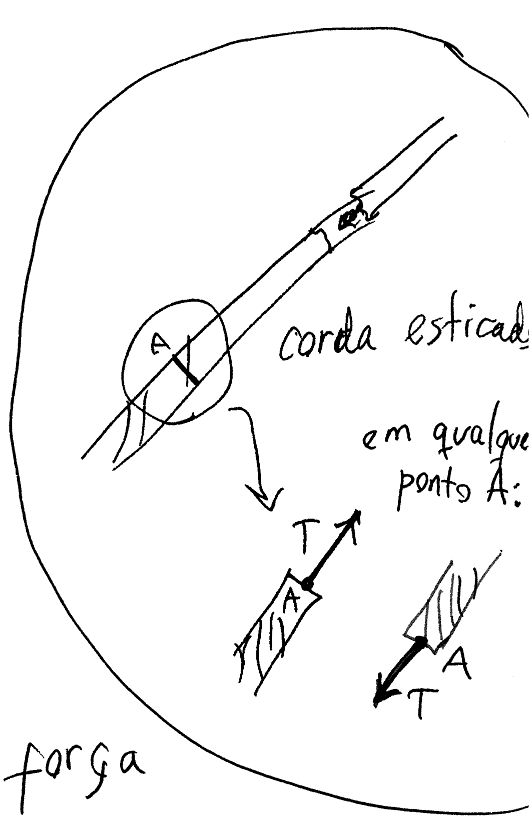


→ θ = 135°
ou 215°

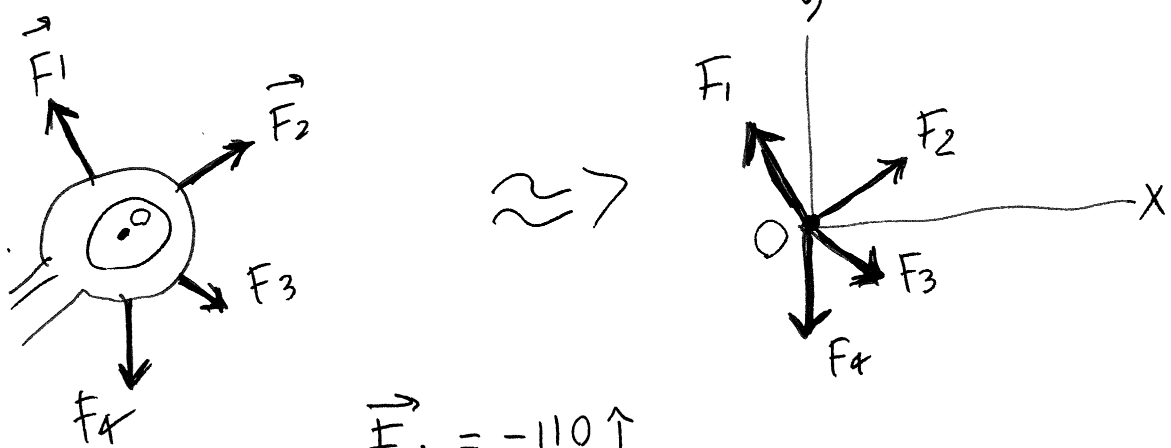
→ somar 180° à resposta da calculadora,

Exemplo





Sabendo que $F_1 = 60\,N$, $F_3 = 100\,N$ e $F_4 = 110\,N$, calcule a força resultante

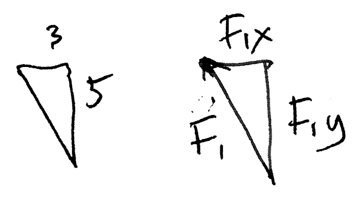


$$\vec{F}_4 = -110\,\hat{j}$$

$$\hat{F}_3 = \cos(-30°)\,\hat{\imath} + \sin(-30°)\,\hat{j} = 0{,}866\,\hat{\imath} - 0{,}5\,\hat{j}$$

$$\rightarrow \vec{F}_3 = 86{,}6\,\hat{\imath} - 50\,\hat{j}$$

$\vec{F}_1$

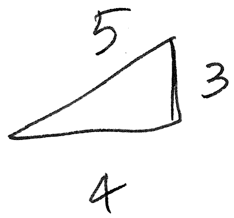


$$\frac{F_1}{\sqrt{3^2+5^2}} = \frac{F_{1x}}{3} = \frac{F_{1y}}{5}$$

$$\rightarrow F_{1x} = \frac{60 \times 3}{\sqrt{34}} \qquad F_{1y} = \frac{60 \times 5}{\sqrt{34}}$$

$$\vec{F}_1 = -30{,}9\,\hat{\imath} + 51{,}4\,\hat{j}$$

$\vec{F_2}$:



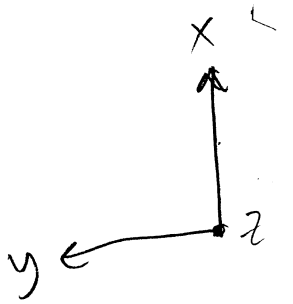
$$\frac{150}{5} = \frac{F_{2x}}{4} = \frac{F_{2y}}{3}$$

$$\rightarrow \vec{F_2} = 120\hat{i} + 90\hat{j}$$

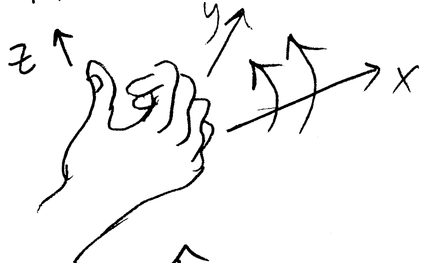
$$\rightarrow \boxed{\vec{R} = (175{,}7\hat{i} - 18{,}6\hat{j})\ N}$$

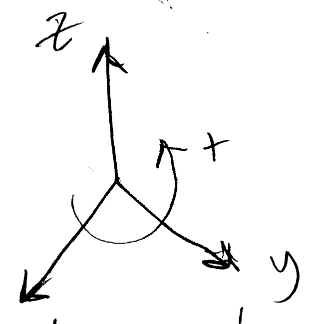
Aula 3, 3 de Março de 1999

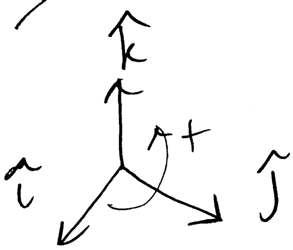
VECTORES EM 3 DIMENSÕES



regra da mão direita

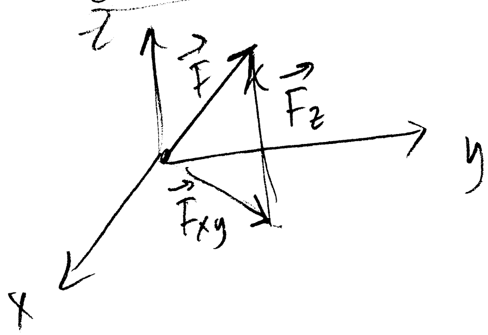






versores

Coordenadas cartesianas



$$\vec{F} = \vec{F}_{xy} + F_z \hat{k}$$

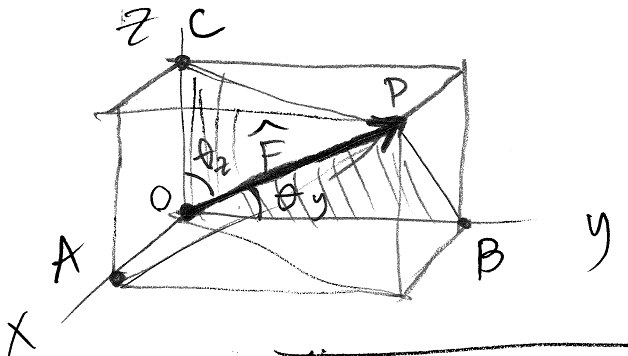
$$= F_x \hat{\imath} + F_y \hat{\jmath} + F_z \hat{k}$$

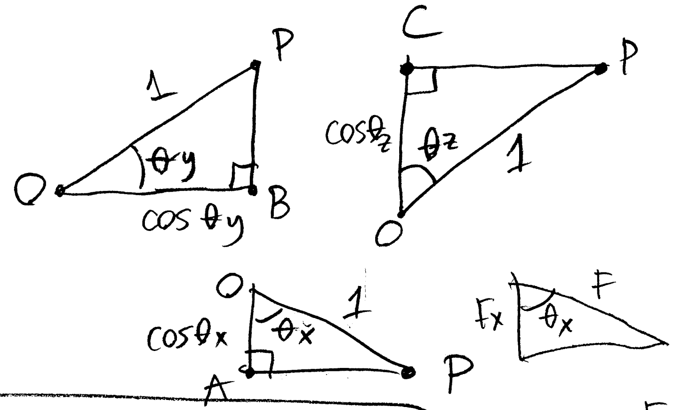
$$\rightarrow F^2 = F_{xy}^2 + F_z^2$$

$$\boxed{F^2 = F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

(teorema de Pitágoras em 3-D)

Versores





$$\cos\theta_x = \frac{F}{F_x}$$

$$\rightarrow \boxed{\hat{F} = \cos\theta_x \hat{\imath} + \cos\theta_y \hat{\jmath} + \cos\theta_z \hat{k}}$$

mas como $|\hat{F}| = 1$

$$\rightarrow \boxed{\cos^2\theta_x + \cos^2\theta_y + \cos^2\theta_z = 1}$$

caso particular: $\hat{F}$ no plano $xy \rightarrow \theta_z = 90°$

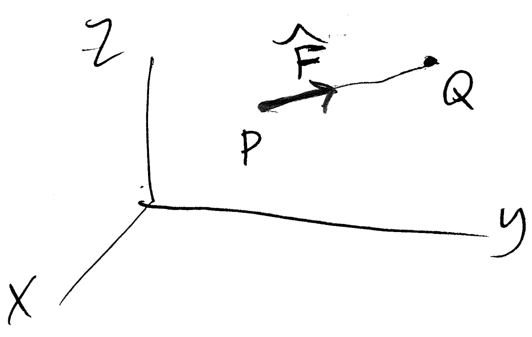
$\theta_y = 90° - \theta_x \quad \rightarrow \cos^2\theta_x + \cos^2(90° - \theta_x) = 1$

$\rightarrow \cos^2\theta_x + \sin^2\theta_x = 1$

conhecidos 2 dos ângulos $\theta_x, \theta_y, \theta_z$, pode calcular-se o terceiro.

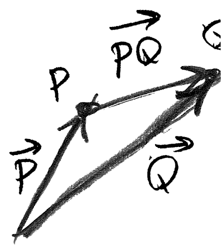
→ A direcção e sentido dum vector pode ser definida por meio de dois ângulos formados com 2 eixos

Outra forma de calcular versores é por meio de 2 pontos:



$P = (x_p, y_p, z_p)$
$Q = (x_q, y_q, z_q)$

$$\rightarrow \boxed{\overrightarrow{PQ} = \vec{Q} - \vec{P}}$$

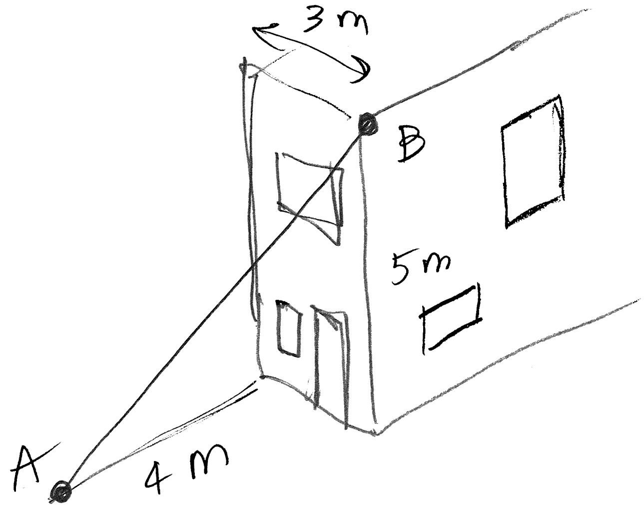


$$\overrightarrow{PQ} = (x_q - x_p)\hat{\imath} + (y_q - y_p)\hat{\jmath} + (z_q - z_p)\hat{k}$$

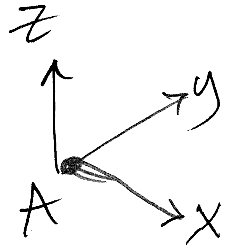
o versor $\hat{F}$ é igual a $\dfrac{\overrightarrow{PQ}}{PQ}$

$$\rightarrow \vec{F} = \frac{(x_q - x_p)\hat{\imath} + (y_q - y_p)\hat{\jmath} + (z_q - z_p)\hat{k}}{\sqrt{(x_q - x_p)^2 + (y_q - y_p)^2 + (z_q - z_p)^2}}$$

Exemplo:



A tensão na corda é $T = 100$ N.
Encontre $\vec{T}_B$ (da corda sobre o ponto B) e diga que ângulo forma a corda com a horizontal



$\rightarrow$ $A = (0,0,0)$

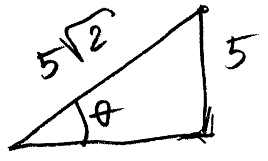
$B = (3,4,5)$ dist. em metros

$$\vec{AB} = 3\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} + 5\hat{k}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 5$$

$$\rightarrow \vec{T}_B = -T\,\widehat{AB} = -100\left(\frac{3\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} + 5\hat{k}}{5\sqrt{2}}\right)$$

$$= \frac{-60\hat{\imath} - 80\hat{\jmath} - 100\hat{k}}{\sqrt{2}}$$



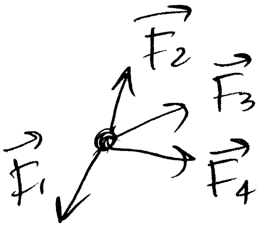
$$\sin\theta = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\rightarrow \boxed{\theta = 45°}$$

Aula 4   5/Mar/99

EQUILÍBRIO ESTÁTICO.

Lei da inércia (1ª lei de Newton)

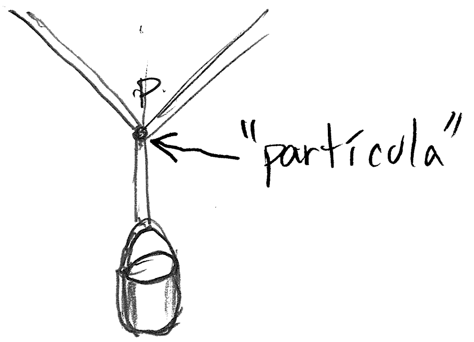


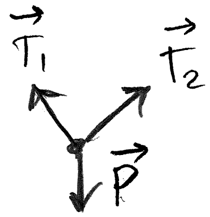
força resultante: $\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F_i}$

se a força resultante externa é nula, a partícula está em equilíbrio (em repouso ou mov. uniforme)

equilíbrio $\begin{cases} \text{estático (repouso)} \\ \text{dinâmico (mov. rectilíne com vel. uniforme)} \end{cases}$

Nota: esta lei é válida apenas para partículas (já veremos a sua generalização mais logo).





Condições de equilíbrio

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum F_z = 0 \end{cases}$$

3 equações escalares

$\Downarrow$

no máximo 3 variáveis escalar

Exemplo: O ponto A mantem-se afastado 1,2 m da parede, por meio de uma força horizontal, $\vec{F}$, perpendicular à paredo. Calcule o módulo de $\vec{F}$ e as tensões nos fios AB e AC.

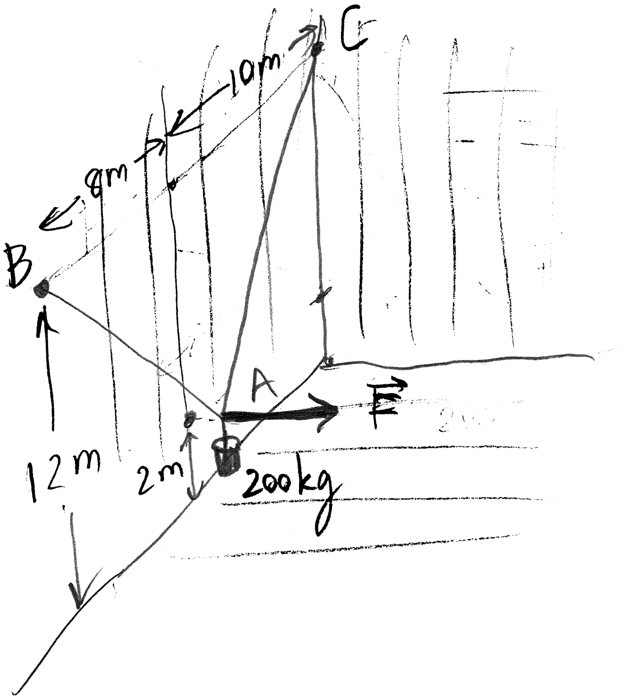
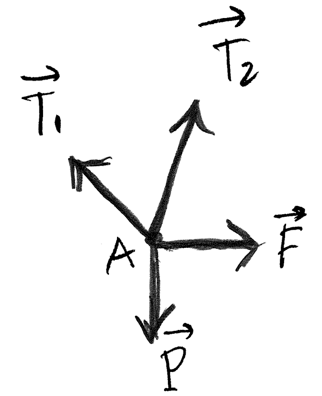


Diagrama de forças



$$\vec{T_1} + \vec{T_2} + \vec{P} + \vec{F} = \vec{0}$$

$$\vec{T_1} = \underbrace{T_{1x}\,\hat{\imath} + T_{2x}\,\hat{\jmath} + T_{2z}\,\hat{k}}_{3 \text{ incógnitas?}}$$

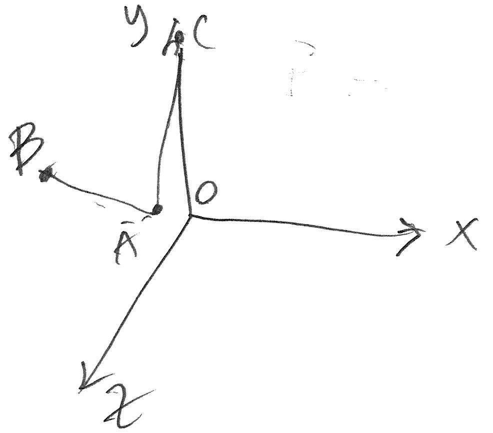
$\Downarrow$

não pois a direcção de $\vec{T_1}$ está definida

$$\vec{T_1} = T_1 \, \widehat{AB}$$

incógnita — conhecida

de igual forma, $\vec{T_2} = T_2 \widehat{AC}$ (uma incógnita T_2)



$\vec{F} = F\hat{\imath}$

$\vec{P} = -P\hat{\jmath}$

$P = 200\,kg \cdot 9{,}81\,\frac{m}{s^2} = 1962\,N$

$\vec{A} = 1{,}2\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 10\hat{k}$

$\vec{B} = 12\hat{\jmath} + 18\hat{k}$

$\vec{C} = 18\hat{k}$

$$\begin{cases} \vec{AB} = \vec{B} - \vec{A} = -1{,}2\hat{\imath} + 10\hat{\jmath} + 8\hat{k} \\ \vec{AC} = -1{,}2\hat{\imath} + 10\hat{\jmath} - 10\hat{k} \end{cases}$$

$AB = \sqrt{1{,}44 + 100 + 64} = \sqrt{165{,}4}$

$AC = \sqrt{1{,}44 + 100 + 100} = \sqrt{201{,}44}$

$\widehat{AB} = -0{,}0933\hat{\imath} + 0{,}778\hat{\jmath} + 0{,}622\hat{k}$

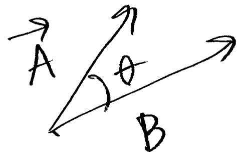
$\widehat{AC} = -0{,}0846\hat{\imath} + 0{,}705\hat{\jmath} - 0{,}705\hat{k}$

$\sum F_z = 0{,}622\,T_1 - 0{,}705\,T_2 = 0$

$\rightarrow T_2 = \frac{0{,}622}{0{,}705} T_1 = 0{,}882\,T_1$

$\sum F_y = 0{,}778T_1 + 0{,}705T_2 - 1620 = 0 \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} T_1 = 1157\,N \\ T_2 = 1021\,N \end{array}}$

Produto escalar

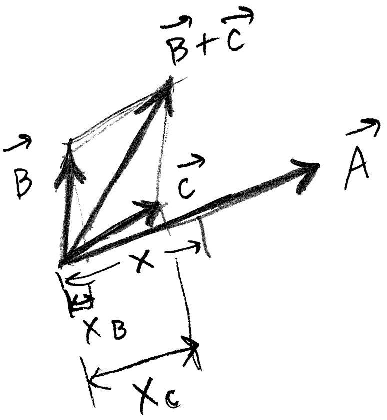


$\vec{A} \cdot \vec{B}$ = produto da prejecção de A sobre B e o módulo de B

$= AB \cos\theta$

① $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$

② $\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$



$\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = XA = (X_B + X_C) A$

$= X_B A + X_C A = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$

③ $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0 \iff \vec{A}$ perpendicular a $\vec{B}$

$\rightarrow \hat{\imath} \cdot \hat{\jmath} = \hat{\imath} \cdot \hat{k} = \hat{\jmath} \cdot \hat{k} = 0$

④ $\vec{A} \cdot \vec{A} = A^2 \rightarrow \hat{\imath} \cdot \hat{\imath} = \hat{\jmath} \cdot \hat{\jmath} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1$

⑤ produto em coord. cartesianas:

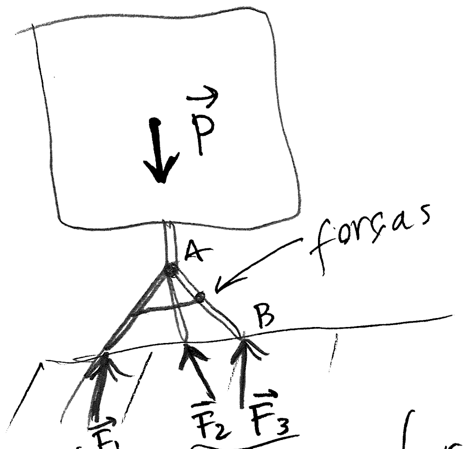
$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x \hat{\imath} \cdot \hat{\imath} + A_x B_y \hat{\imath} \cdot \hat{\jmath} + \ldots + A_z B_z \hat{k} \cdot \hat{k}$

$$\boxed{\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z}$$

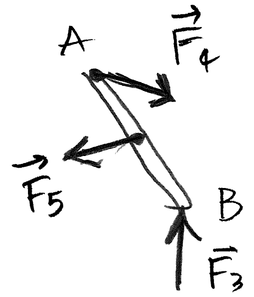
$$\rightarrow \theta = \arccos\left(\frac{A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z}{A\,B}\right)$$

Aula 5 — 10 de Março de 1995

FORÇAS SOBRE CORPOS RÍGIDOS



na barra AB por separado:



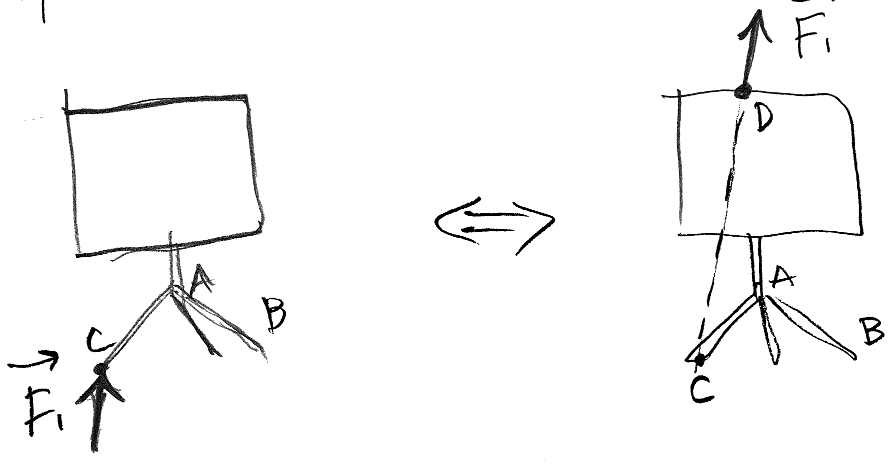
as forças $\vec{F_4}$ e $\vec{F_5}$ que eram internas no sistema completo, são agora externas

3 forças externas

Diagrama de corpo livre: forças externas

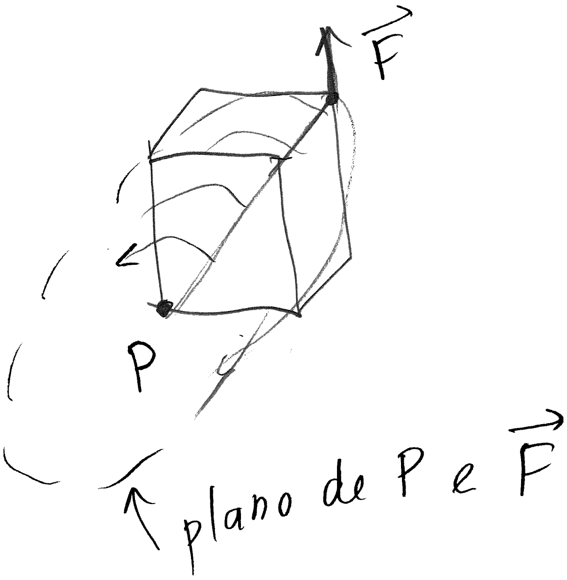
(as internas não têm nenhum efeito sobre o estado de mov. ou repouso)

princípio de transmissibilidade



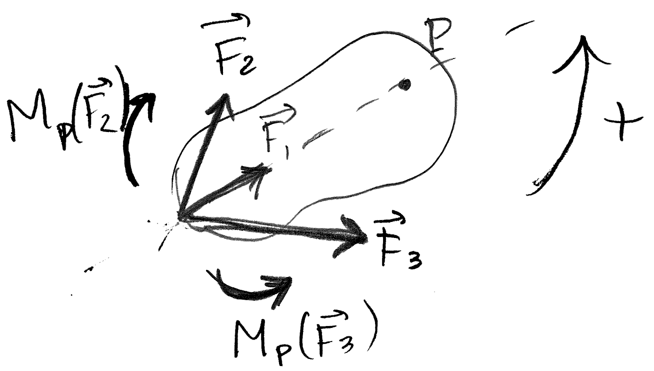
MOMENTO DE UMA FORÇA

tendência a produzir rotação



P = ponto de referência

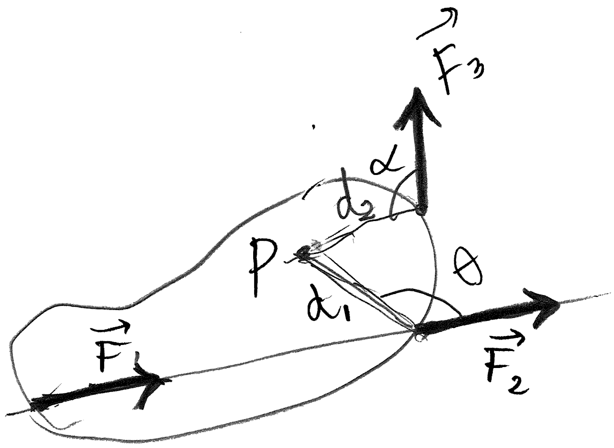
em relação a P, $\vec{F}$ faz rodar o cubo sobre o plano de P e $\vec{F}$



em relação a P, $\vec{F_1}$ não produz momento

$$M_P(\vec{F_1}) = 0$$

os momentos de $\vec{F_2}$ e $\vec{F_3}$ são opostos (um deles arbitra-se positivo e o outro negativo)



se $F_1 = F_2$

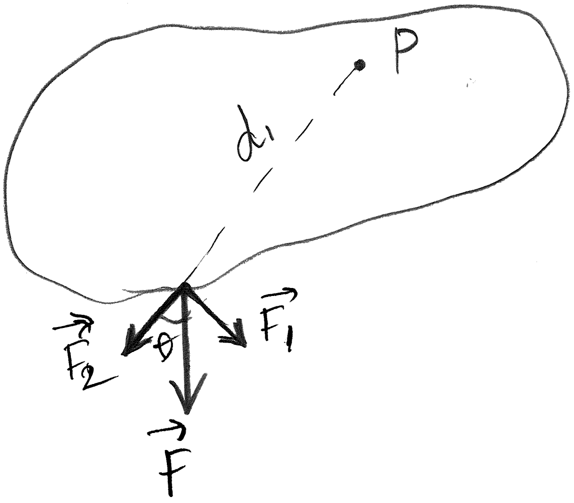
$$\Rightarrow M_P(F_1) = M_P(F_2)$$

se $\theta = \alpha$, $d_1 = d_2$, $F_2 = F_3$

$$\Rightarrow M_P(F_2) = M_P(F_3)$$

$\Rightarrow$ M depende de F, a distância d e o ângulo θ

Cálculo do momento

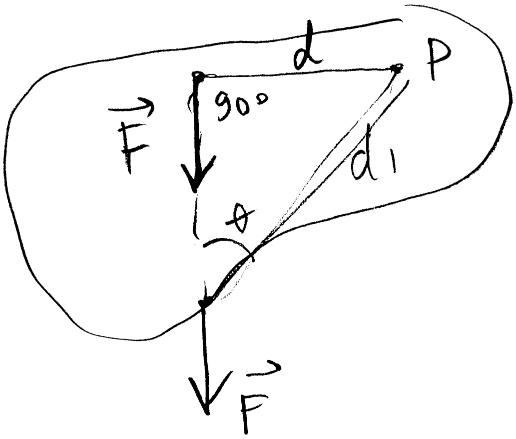


$$\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$$

$$\Rightarrow M_P(\vec{F}) = M_P(\vec{F_1}) + M_P(\vec{F_2})$$

$$M_P(\vec{F_2}) = 0$$

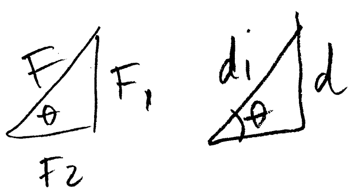
$$\Rightarrow M_P(\vec{F}) = M_P(\vec{F_1})$$



mas também temos que

momento$(F, d, 90°)$
$=$ momento$(F_1, d_1, 90°)$

relação entre F_1, F, d, d_1



$\rightarrow \dfrac{F}{F_1} = \dfrac{d_1}{d}$

$\rightarrow Fd = F_1 d_1$

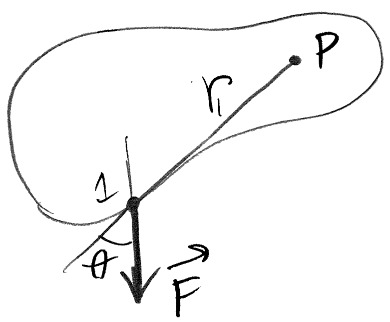
$\rightarrow$ definimos $\begin{cases} M_P(\vec{F}) = Fd \\ M_P(\vec{F_1}) = F_1 d_1 \end{cases}$

$M_P(\vec{F})$ = módulo de $\vec{F}$, vezes distância entre P e a linha de acção de $\vec{F}$

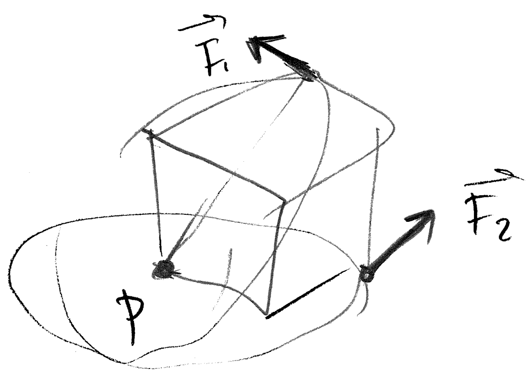
d = braço = dist. entre o ponto de referência e a linha de acção da força

unidades de $M = (N \cdot m)$

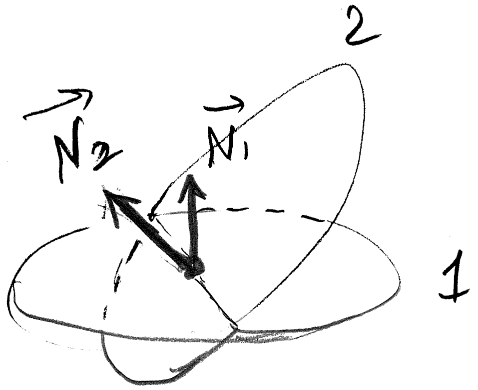
repare que $\boxed{d = d_1 \sin\theta}$



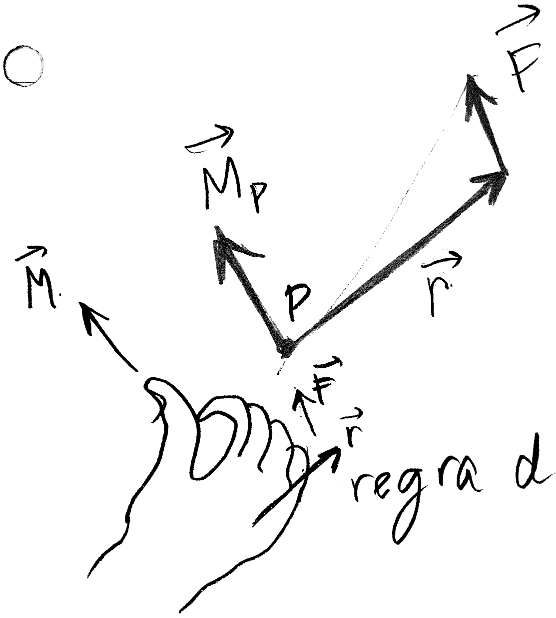
$\rightarrow \boxed{M_P(\vec{F}) = F r_1 \sin\theta}$



$\vec{F_1}$ e $\vec{F_2}$ produzem rotações em planos diferentes que passam por P. Para definir planos que passam por um ponto, basta saber um vector normal



assim, definiremos $M_P(\vec{F})$ como um vector, normal ao plano de rotação



$\vec{M}_P \perp \vec{r}$

$\vec{M}_P \perp \vec{F}$

regra da mão direita

definição: $\boxed{\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}}$

$|\vec{r} \times \vec{F}| = rF\sin\theta$

direcção e sentido de $\vec{r} \times \vec{F} \longrightarrow$ regra da mão direita

em geral, o produto vectorial de dois vetores quaisquer é $\vec{A} \times \vec{B}$

onde: $\left\{ \right.$ $|\vec{A} \times \vec{B}| = AB\sin(\measuredangle \text{ entre } \vec{A} \text{ e } \vec{B})$

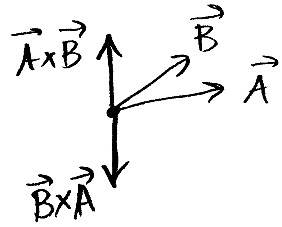
direcção de $\vec{A} \times \vec{B}$ = perpendicular ao plano de $\vec{A}$ e $\vec{B}$

sentido de $\vec{A} \times \vec{B}$ dado pela regra da mão direita, de $\vec{A}$ para $\vec{B}$

Aula 6, 12/Março/99

PROPRIEDADES DO PRODUTO VECTORIAL

① $\vec{A}\times\vec{B} = -\vec{B}\times\vec{A}$



② $\vec{A}\times\vec{A} = 0$

③ prop. distributiva: $\vec{A}\times(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\times\vec{B} + \vec{A}\times\vec{C}$

<u>teorema</u>: O momento de uma força (em relação a um pon[to]) é igual à soma dos momentos das suas componentes.

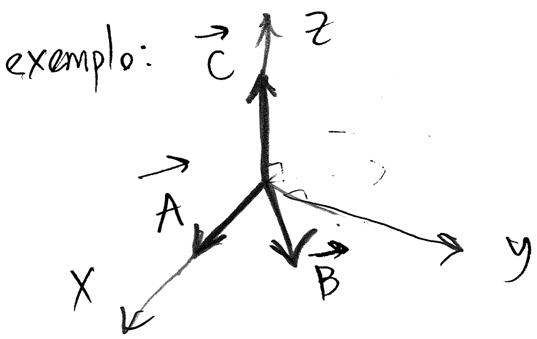
$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \longrightarrow \vec{M}_P(\vec{F}) = \vec{r}\times(\vec{F}_1+\vec{F}_2)$

$= \vec{r}\times\vec{F}_1 + \vec{r}\times\vec{F}_2 = \vec{M}_P(\vec{F}_1) + M_P(\vec{F}_2)$

④ O produto vectorial não é associativo:

$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) \neq (\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}$

exemplo:



se $\vec{C}\perp\vec{A}$ e $\vec{C}\perp\vec{B}$

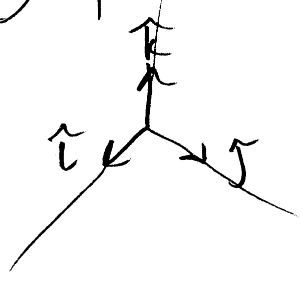
$\rightarrow (\vec{A}\times\vec{B})$ é paralelo a $\vec{C}$ e

$(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C} = 0$

no entanto $\vec{B}\times\vec{C}$ forma um ângulo θ com $\vec{A}$

e $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) \neq 0$

⑤ produto vectorial em coordenadas cartesianas



$\hat{\imath}\times\hat{\jmath} = \hat{k}$ $\hat{\jmath}\times\hat{\imath} = -\hat{k}$

$\hat{\jmath}\times\hat{k} = \hat{\imath}$ $\hat{k}\times\hat{\jmath} = -\hat{\imath}$

$\hat{k}\times\hat{\imath} = \hat{\jmath}$ $\hat{\imath}\times\hat{k} = -\hat{\jmath}$

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_x \hat{\imath} + A_y \hat{\jmath} + A_z \hat{k}) \times (B_x \hat{\imath} + B_y \hat{\jmath} + B_z \hat{k})$$

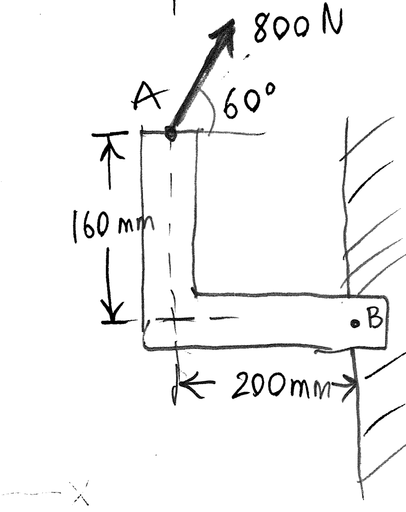
$$= A_x B_y \hat{k} - A_x B_z \hat{\jmath} + A_y B_z \hat{\imath} - A_y B_x \hat{k}$$

$$+ A_z B_x \hat{\jmath} - A_z B_y \hat{\imath}$$

$$= \begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix} \hat{\imath} - \begin{vmatrix} A_x & A_z \\ B_x & B_z \end{vmatrix} \hat{\jmath} + \begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix} \hat{k}$$

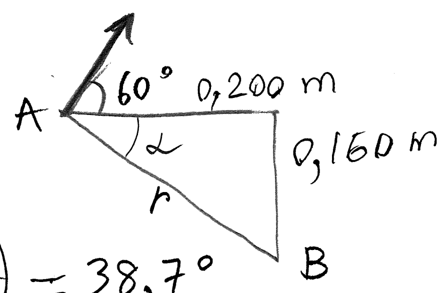
$$\boxed{\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}}$$

Exemplo



Calcule o momento da força de 800 N, em relação a B.

1º método.



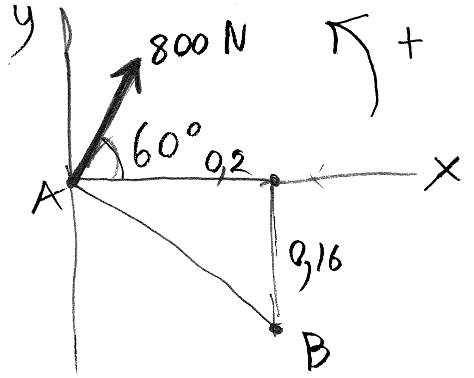
$$\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{0,16}{0,2}\right) = 38,7°$$

$$r = \sqrt{0,2^2 + 0,16^2} = 0,256 \text{ m}$$

$$M_B = (800 \text{ N})(0,256 \text{ m}) \sin(98,7) = 202 \text{ N} \cdot \text{m}$$

(no sentido horário)

2º método:



$F_x = 400\ N$

$F_y = 400\sqrt{3}\ N$

braço de F_x = dist. entre o eixo x e o ponto B = 0,16

braço de F_y = dist. entre o eixo y e B = 0,2

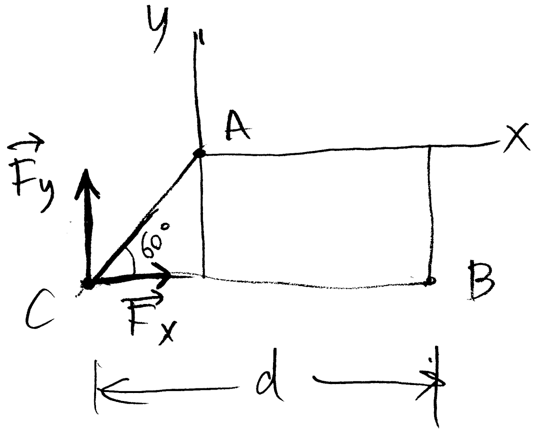
$$M_B(\vec{F}_x) = -400 \cdot 0{,}16\ (N \cdot m) = 64\ N \cdot m$$

$$M_B(\vec{F}_y) = -400\sqrt{3} \cdot 0{,}2\ (N \cdot m) = 139\ N \cdot m$$

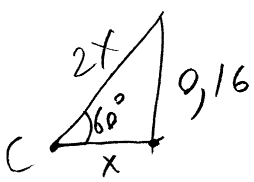
$$M_B(\vec{F}) = -203\ (N \cdot m)$$

ou, em forma vectorial, $M_B(\vec{F}) = -203\ \hat{k}\ (N \cdot m)$

3º método



$$M_B(\vec{F}) = -F_y\, d$$



$$0{,}16^2 = 4x^2 - x^2$$

$$x = \frac{0{,}16}{\sqrt{3}}$$

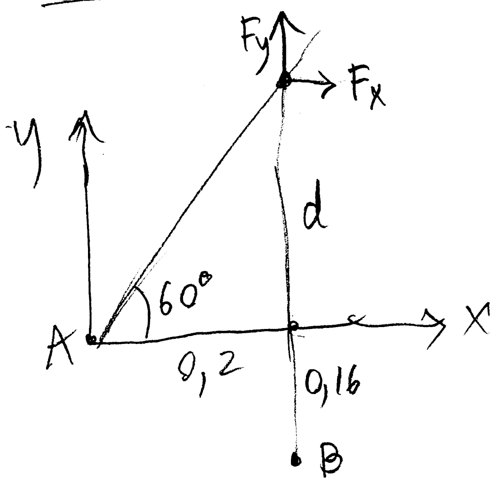
$$d = 0{,}2 + x$$

$$M_B(\vec{F}) = -400\sqrt{3}\left(0{,}2 + \frac{0{,}16}{\sqrt{3}}\right)$$

$$= -400\left(0{,}2\sqrt{3} + 0{,}16\right) = 20$$

$N \cdot$

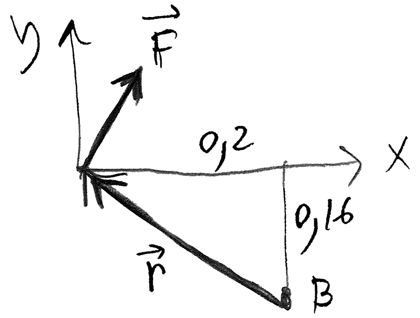
4º método



$$d = 0{,}2\sqrt{3}$$

$$M_B(\vec{F}) = M_B(\vec{F_x}) = -400(0{,}2\sqrt{3}+0{,}16)$$
$$= 203 \text{ N·m}$$

5º método



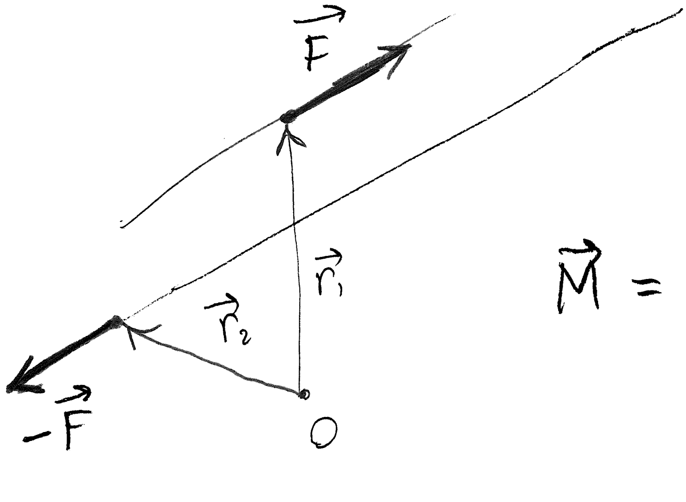
$$\vec{F} = 400\hat{\imath} + 400\sqrt{3}\,\hat{\jmath}$$
$$\vec{r} = -0{,}2\hat{\imath} + 0{,}16\,\hat{\jmath}$$

$$\vec{M}_B = \vec{r}\times\vec{F} = 400(-0{,}2\hat{\imath}+0{,}16\hat{\jmath})\times(\hat{\imath}+\sqrt{3}\hat{\jmath})$$
$$= 400(-0{,}2\sqrt{3}\,\hat{k} - 0{,}16\,\hat{k})$$
$$= -400(0{,}2\sqrt{3}+0{,}16)\,\hat{k} \quad (\text{N·m})$$

BINÁRIO

Duas forças com o mesmo modulo, linhas de acção paralelas, mas sentidos opostos

→ não produz deslocamento; apenas rotação

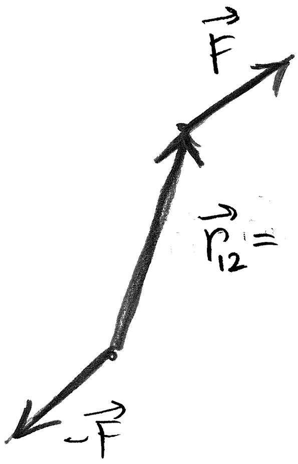


Momento total, em relação a O:

$$\vec{M} = \vec{M}_o(\vec{F}) + M_o(-\vec{F}) = \vec{r_1}\times\vec{F} - \vec{r_2}\times\vec{F}$$

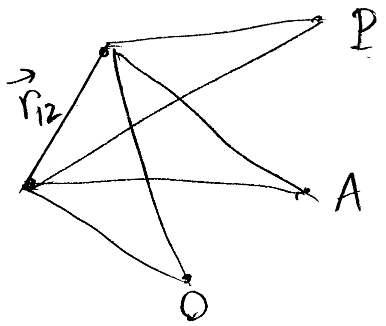
$$= (\vec{r_1}-\vec{r_2})\times\vec{F}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{M} = \vec{r_{12}}\times\vec{F}}$$

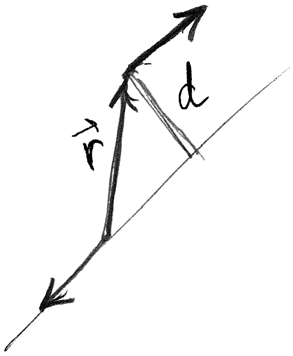


$\vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ = vector desde $-\vec{F}$ até $\vec{F}$.

$\vec{r}_{12}$ é independente do ponto de referência:



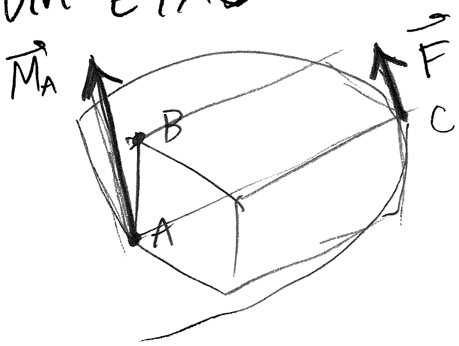
O momento de um binário é independente do ponto de referência. É um vector livre

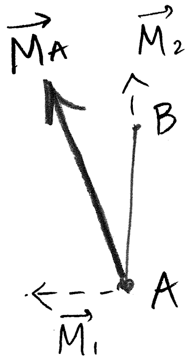


$M(\text{binário}) = |\vec{r} \times \vec{F}| = Fd$

$\vec{M}$ (binário) é um vector livre

MOMENTO DE UMA FORÇA EM RELAÇÃO A UM EIXO





Momento em relação a $\vec{AB}$

$\vec{M}_A = \vec{M}_1 + \vec{M}_2$

$\vec{M}_1$ produz uma rotação do ponto B em relação a A

mas como $\vec{AB}$ está fixo, este momento é contrariado e o momento de $\vec{F}$ em relação a AB será $\vec{M}_2$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{M}_{AB}(\vec{F}) = \underbrace{\hat{\lambda} \cdot (\vec{r} \times \vec{F})}_{\text{produto misto de 3 vectores}}}$$

$\vec{r}$: de A para C ou de B para C, etc.

$$\hat{\lambda} \cdot (\vec{r} \times \vec{F}) = (\lambda_x \hat{\imath} + \lambda_y \hat{\jmath} + \lambda_z \hat{k}) \cdot \left(\begin{vmatrix} y & z \\ F_y & F_z \end{vmatrix} \hat{\imath} + \dots \right)$$

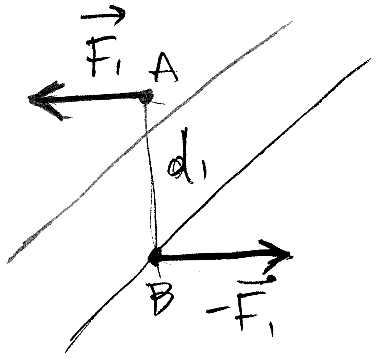
$$= \begin{vmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$\hat{\lambda} \cdot (\vec{r} \times \vec{F}) = (\hat{\lambda} \times \vec{r}) \cdot \vec{F} = (\vec{F} \times \hat{\lambda}) \cdot \vec{r}$$

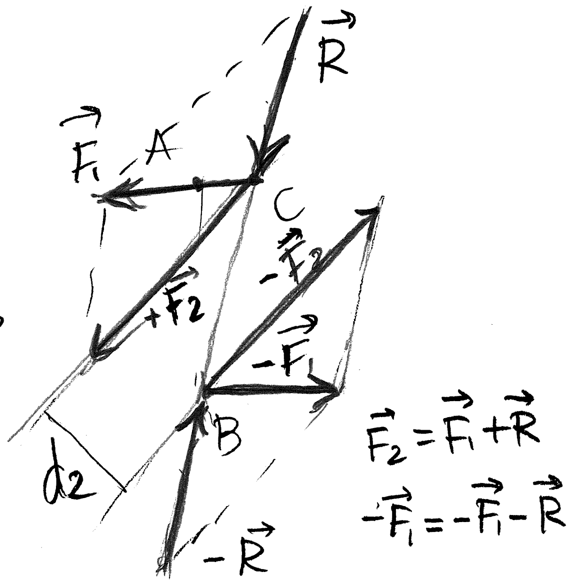
$F_\perp$ vezes a distância ao eixo

Aula 7, 17 de Março

binários equivalentes



somando $\vec{R}$ e $-\vec{R}$:



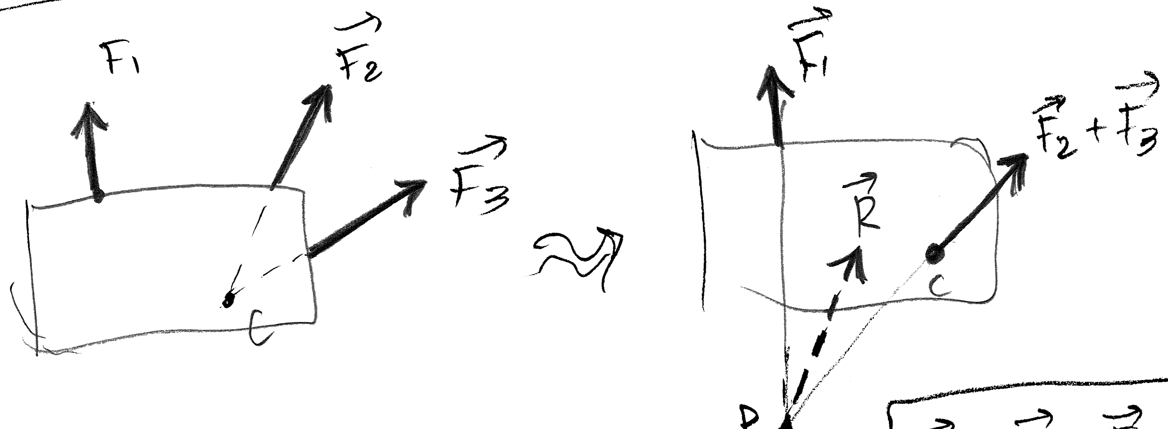
$\vec{F}_2 = \vec{F}_1 + \vec{R}$

$-\vec{F}_1 = -\vec{F}_1 - \vec{R}$

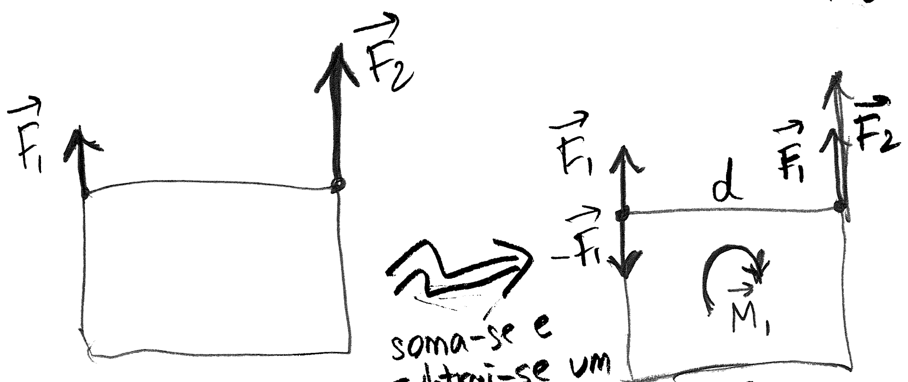
$(\vec{F}_1, -\vec{F}_1)$ equivalente a $(\vec{F}_2, -\vec{F}_2)$

$$\boxed{F_1 d_1 = F_2 d_2}$$

Adição de vectores deslizantes

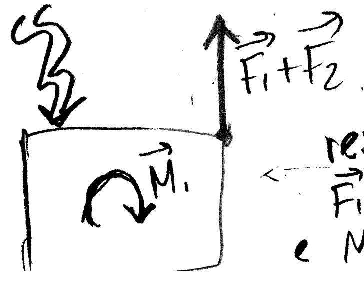


$$\boxed{\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3}$$



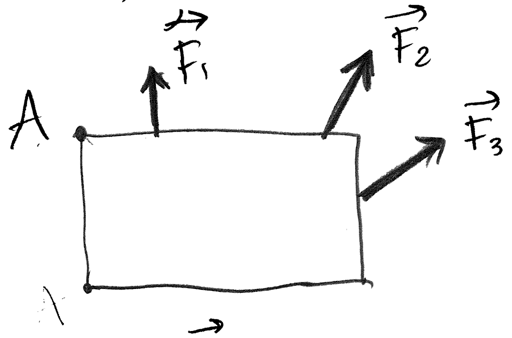
soma-se e subtrai-se um binário

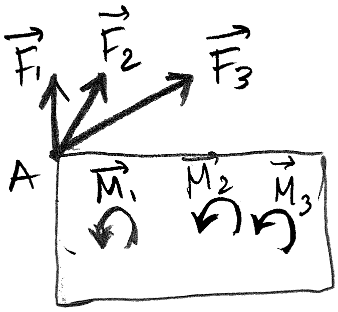
$M_1 = F_1 d$

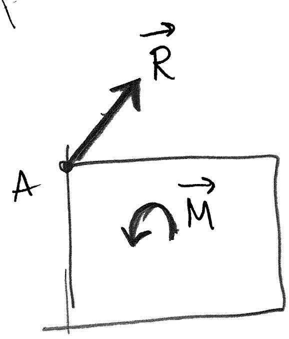


resultante: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$ e $M_1 = F_1 d$

FORÇA-BINÁRIO RESULTANTE

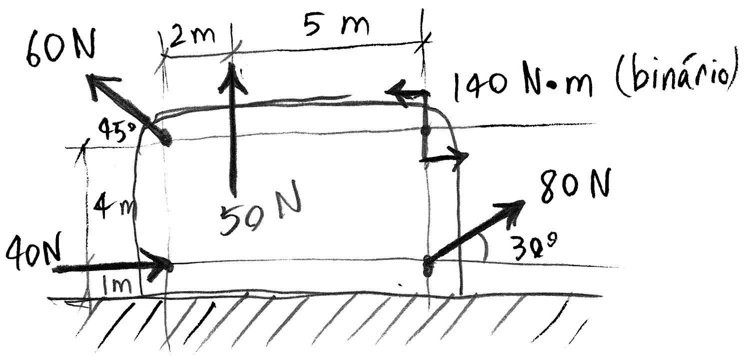




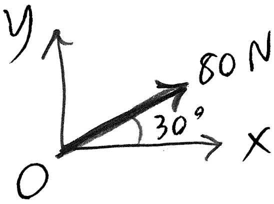


$$\boxed{\begin{aligned} \vec{R} &= \vec{F}_1 + \vec{F}_2\ \vec{F}_3 \\ \vec{M} &= \vec{M}_A(\vec{F}_1) + \vec{M}_A(\vec{F}_2) + \vec{M}_A(\vec{F}_3) \end{aligned}}$$

Exemplo:

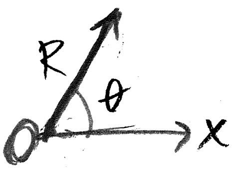


Com origem no ponto onde actua a força de 80 N,



$$R_x = 40 + 40\sqrt{3} - 30\sqrt{2} = 66,9 \text{ N}$$

$$R_y = 40 + 30\sqrt{2} + 50 = 132,4 \text{ N}$$



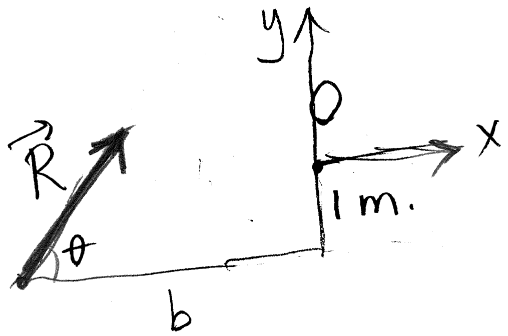
$$R = \sqrt{66,9^2 + 132,4^2} = 148,3 \text{ N}$$

$$\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{132,4}{66,9}\right) = 63,2°$$

$$M_0 = 140 - 50\cdot 5 + 30\sqrt{2}\cdot 4 - 30\sqrt{2}\cdot 7$$
$$= -110 - 90\sqrt{2} = -237\ N\cdot m$$

substituição por uma única força, na base do bloco.

$$M_0(\vec{R}) = 1\cdot R_x - b R_y = -237$$



$$66{,}9 - 132{,}4\, b = -237$$

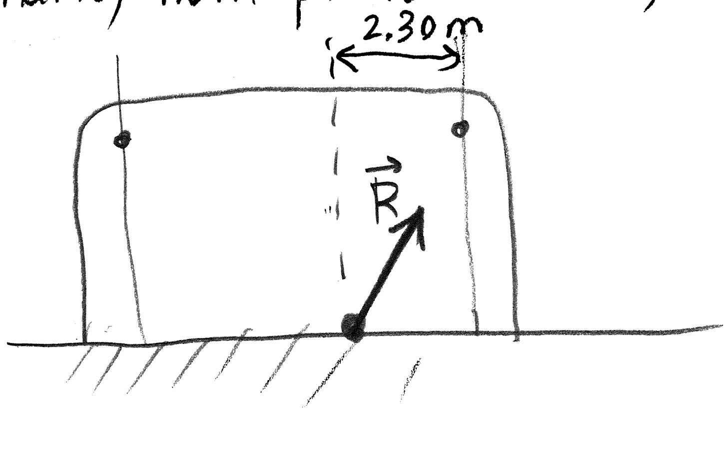
$$\rightarrow b = \frac{237 + 66{,}9}{132{,}4} = 2{,}30\ m$$

<u>Concluindo</u>: O sistema de forças/binário inicial é equivalente a uma única força

$$\vec{R} = 66{,}9\,\hat{\imath} + 132{,}4\,\hat{\jmath}\ (N)$$

atuando no ponto O, mais um binário de 237 N·m, no sentido anti-horário.

Esse sistema de força $\vec{R}$ em O, mais binário, é também equivalente a uma única força $\vec{R}$ (sem binário) num ponto da base, 2.3 m à esquerda de O

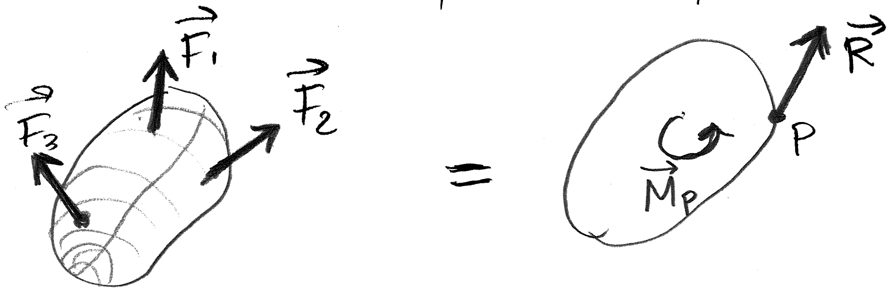


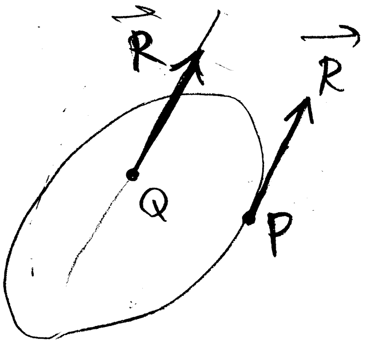
$$\vec{R} = 66.9\,\hat{\imath} + 132{,}4\,\hat{\jmath}\ (N)$$

Aula 8, 19 de Março de 1999

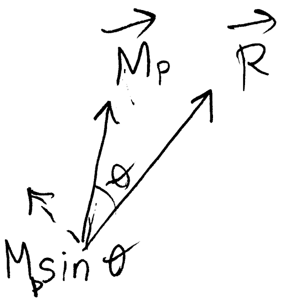
Sistemas de forças equivalentes

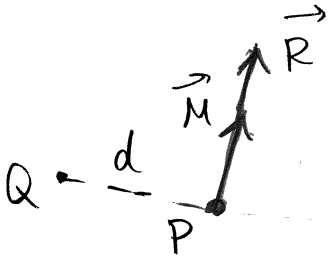
Não





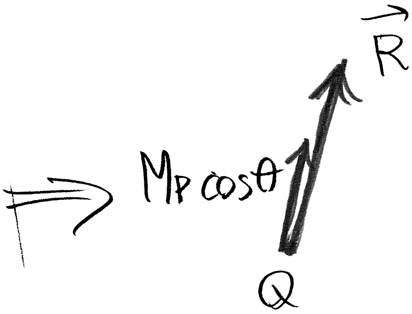
qualquer deslocamento paralelo da linha de acção de $\vec{R}$, introduz um momento perpendicular a $\vec{R}$





vista frontal

deslocando $\vec{R}$ uma distância $d = \frac{M_P \sin\theta}{R}$, introduz-se um momento igual e oposto a $\vec{M}_P \sin\theta$



$\Rightarrow$ No ponto Q, o sistema equivalente é uma força $\vec{R}$ e um momento na mesma direcção. (TORSOR)

Nos sistemas de forças a 2 dimensões, o momento resultante é sempre perpendicular a $\vec{R}$, e pode ser eliminado totalmente. $\Rightarrow$ O sistema pode ser sempre reduzido a uma única força ou binário.

CORPOS RÍGIDOS EM EQUILÍBRIO

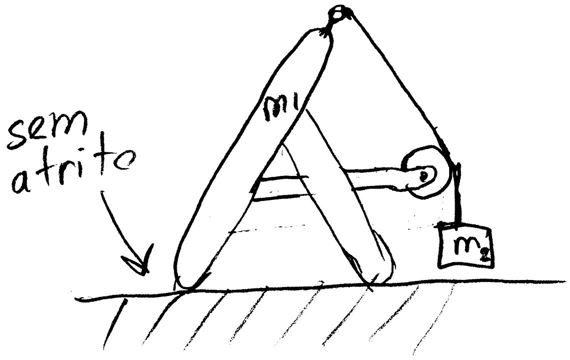
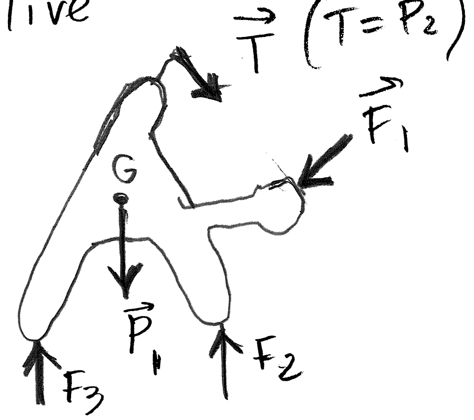
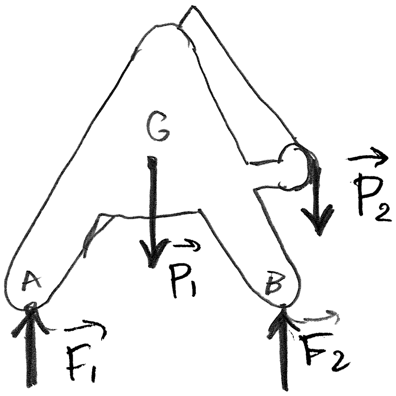


diagrama de corpo live



ou melhor:



Condições de equilíbrio:

$\sum F_x = 0$ ⟵ "trivial"

$\sum F_y = 0$

$\sum M_z = 0$ (qualquer ponto de referência)

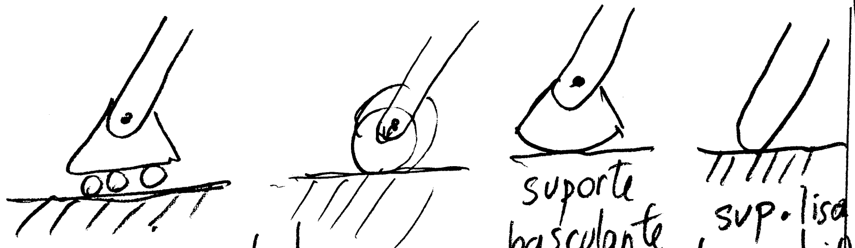
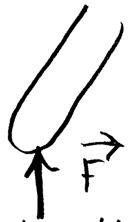
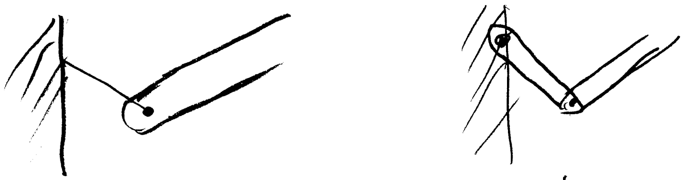
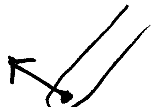
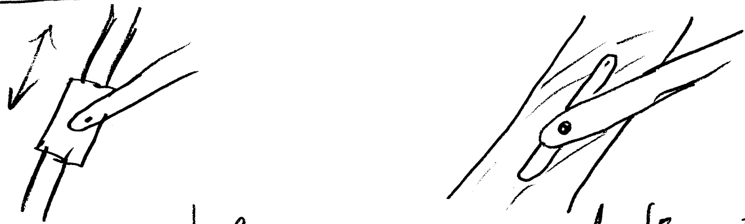
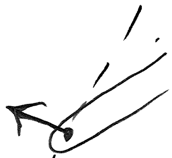
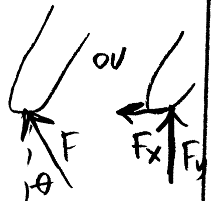
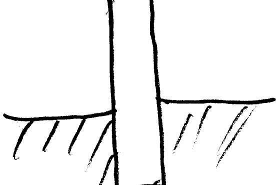
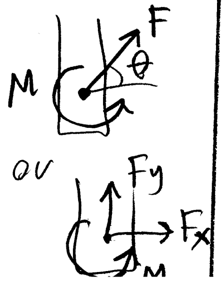
Duas equações e 2 incógnitas (F_1 e F_2)

Outras duas equações equivalentes às anteriores:

$$\begin{cases} \sum M_z(\text{em } A) = 0 & (\text{permite obter } F_2) \\ \sum M_z(\text{em } B) = 0 & (\text{permite calcular } F_1) \end{cases}$$

Reacções nos apoios e nas ligações de uma estrutura

(Secção 4.3 Beer & Johnston)

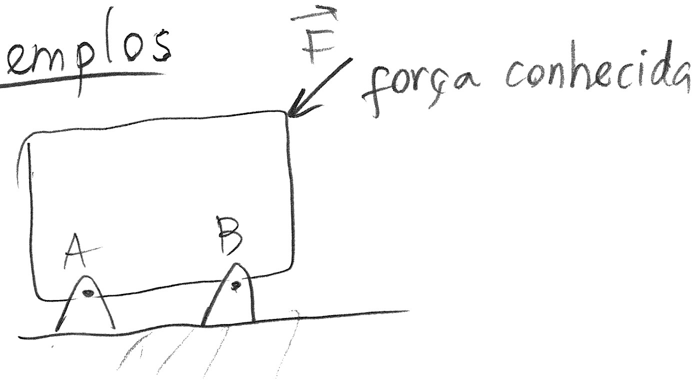
apoio ou ligação	Reacção	Número incógnitas
 roletes; suporte basculante; sup. lisa (sem atrito)	 (linha de acção e direcção conhecidas)	1
 cabos; bielas	 linha de acção conhecida (e sentido no 2º caso)	1
 cursor sobre haste sem atrito; pino deslizante sem atrito	 linha de acção conhecida (sentido desconhecido)	1
 articulação sem atrito; sup. com atrito	 linha de acção descon[hecida]	2
 encastramento		3

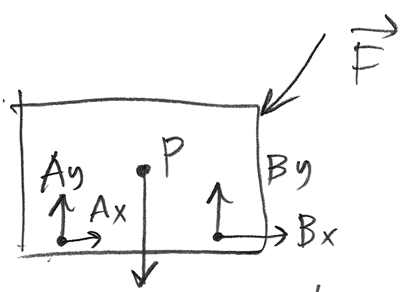
sistemas em 2 dimensões → 3 eq. de equilíbrio:

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_z = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{máximo 3 incógnitas}$$

número de incógnitas > 3 → reacções estáticamente indeterminadas.

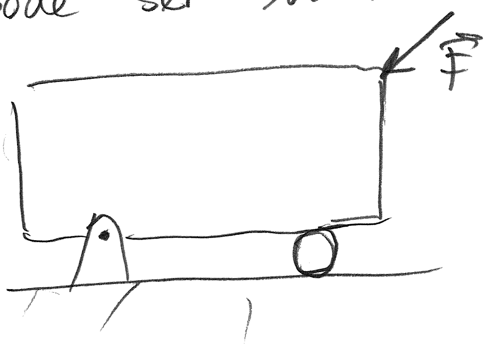
<u>Exemplos</u>

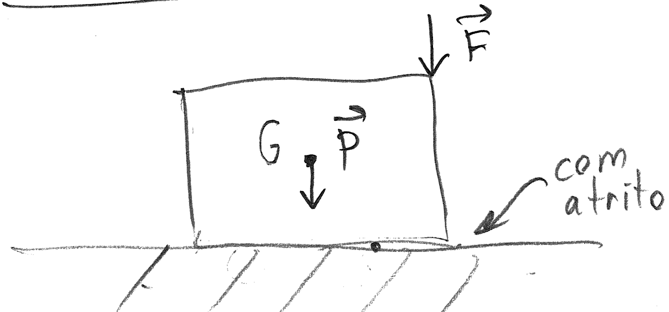


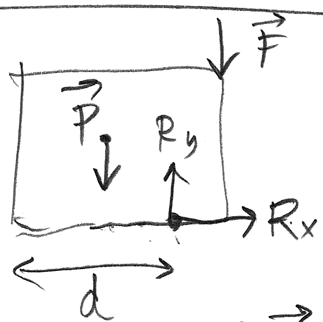


4 incógnitas
→ reacções indeterminadas

→ pode ser substituído por:

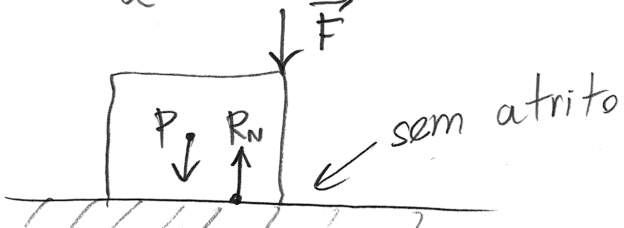


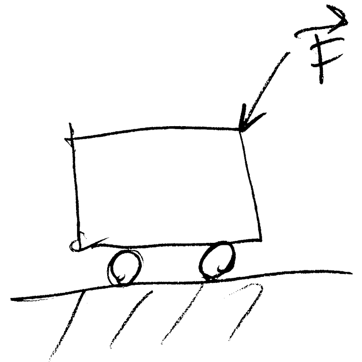




3 incógnitas!

sistema equivalente





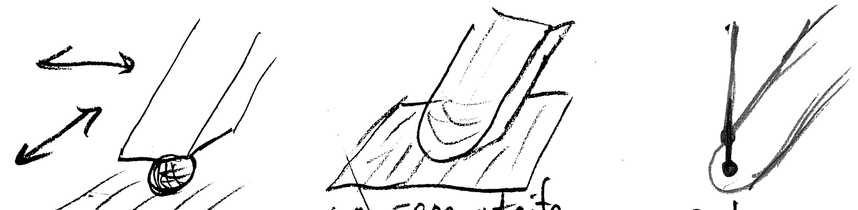
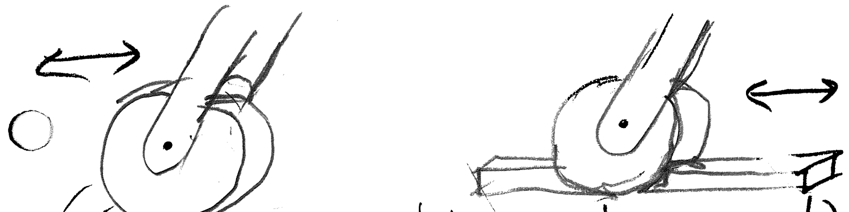
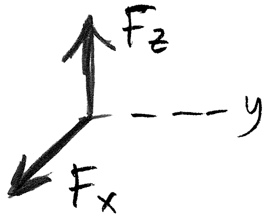
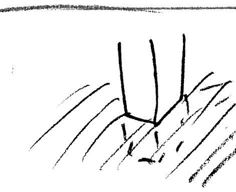
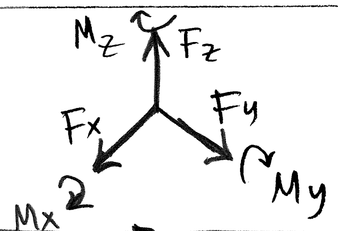
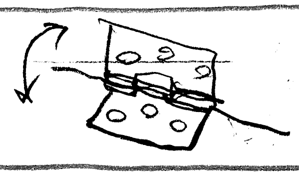
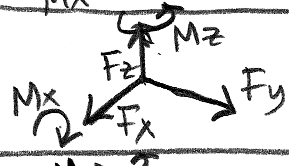
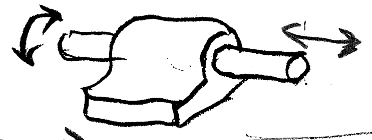
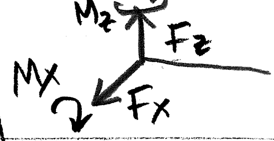
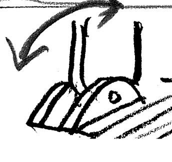
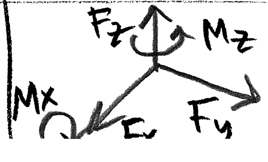
Reacções mal distribuídas.
(2 incógnitas, 3 equações)
o sistema não está em equilíbrio

Equilíbrio em três dimensões

6 equações

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum F_z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \sum M_x = 0 \\ \sum M_y = 0 \\ \sum M_z = 0 \end{cases}$$

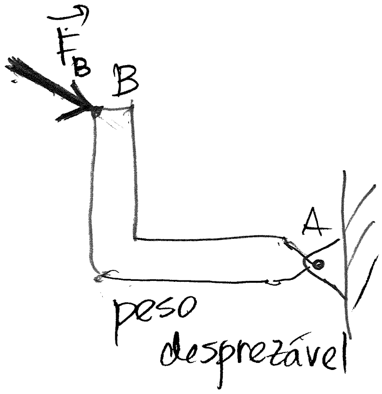
Reacções nos apoios e nas ligações

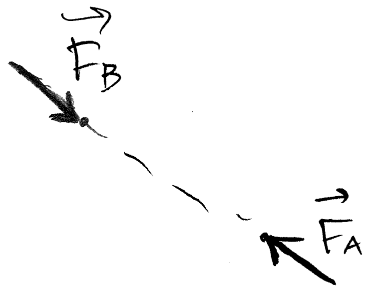
	Reacções	# de incógnitas
 esfera, sup. sem atrito, cabos	 linha de acção e sentido conhecidos	1
 rolete (com atrito, ou sobre carril)		2
Barra encastrada (completamente estática) 		6
Dobradiças 		5
tubo e cilindro 		4
barra com eixo 		5

Aula 9, 24 de Março de 1999

Caso especial de equilíbrio estático:

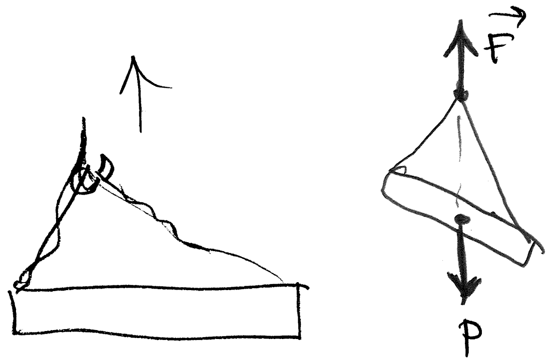
Duas forças:
(em A e B)



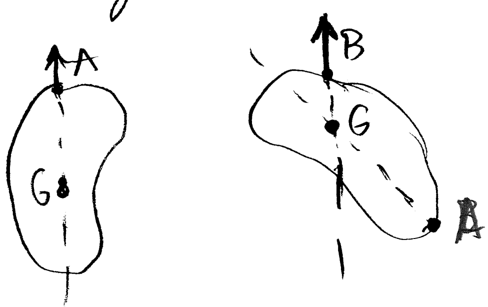


$$\boxed{\vec{F}_A = -\vec{F}_B}$$

Exemplo (problema 4-4)

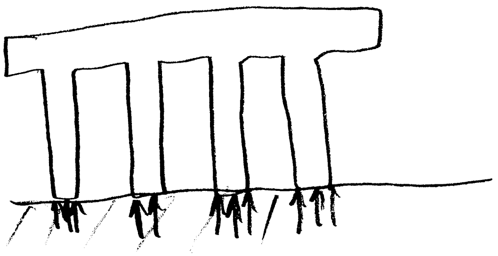


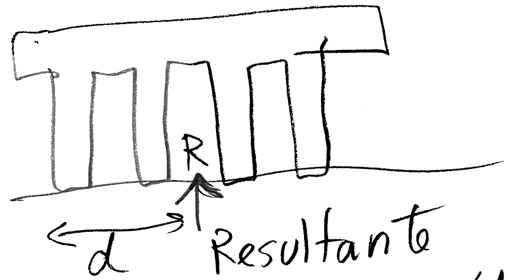
Centro de gravidade:



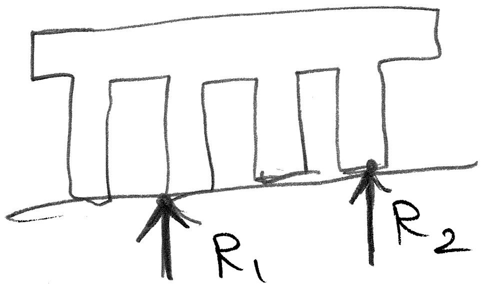
Forças distribuídas

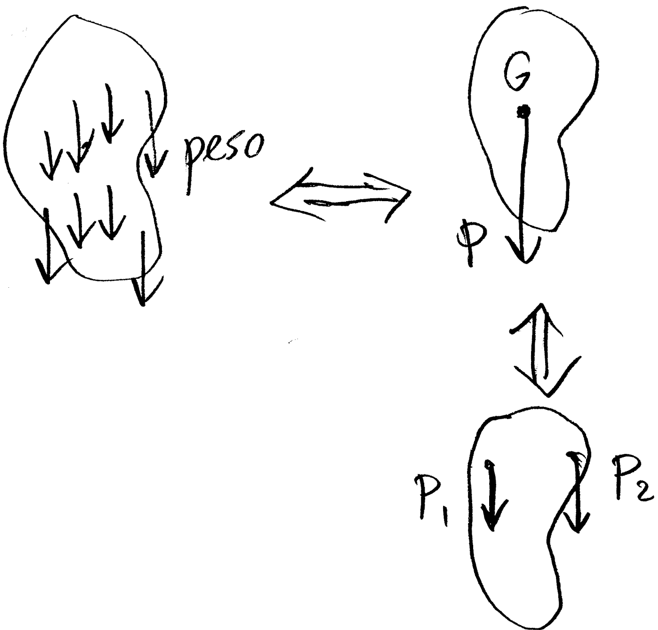
qualquer força é sempre uma força distribuída





em vez de usar (d, R) podemos usar duas variáveis R_1, R_2 em dois pontos arbitrários:

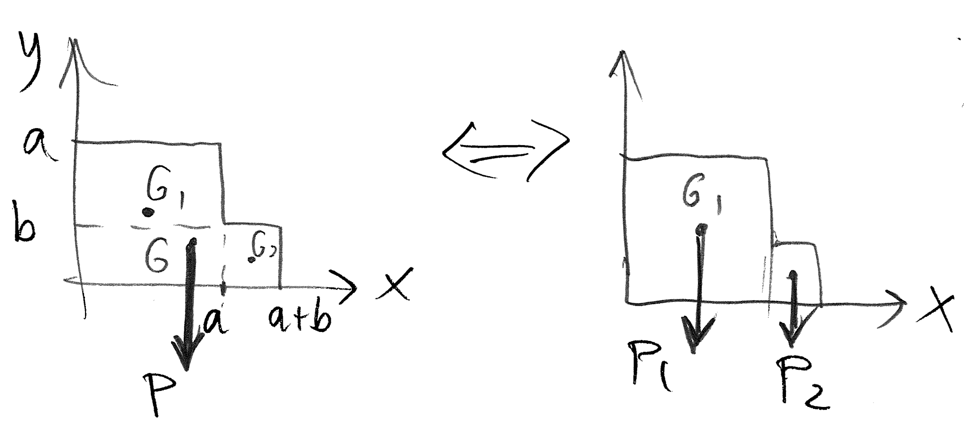


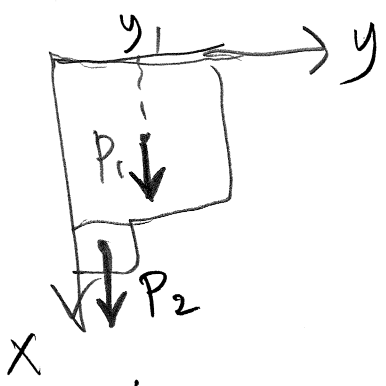


Centro de gravidade:

$$\rightarrow \bar{x} P = x_1 P_1 + x_2 P_2$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i P_i}{\sum_{i=1}^{n} P_i}$$





$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i P_i}{\sum_{i=1}^{n} P_i}$$

Centróide

$$P_i = \rho_i A_i$$

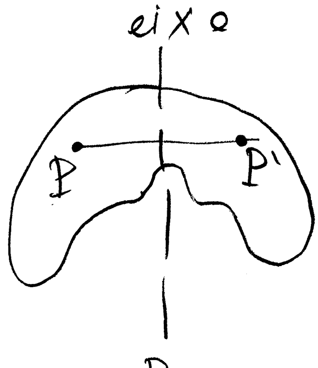
ρ_i = peso superficial
A_i = área

se ρ_i = constante

$$\rightarrow \bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i A_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i} \qquad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i A_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i}$$

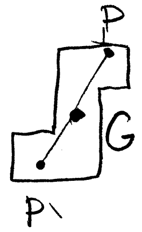
SIMETRIA

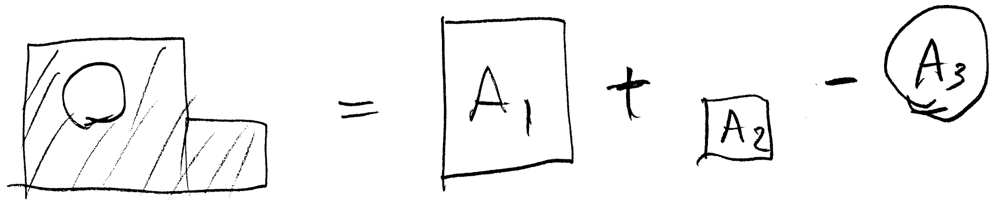
1. Eixo de simetria



$\Longrightarrow$ G sobre o eixo

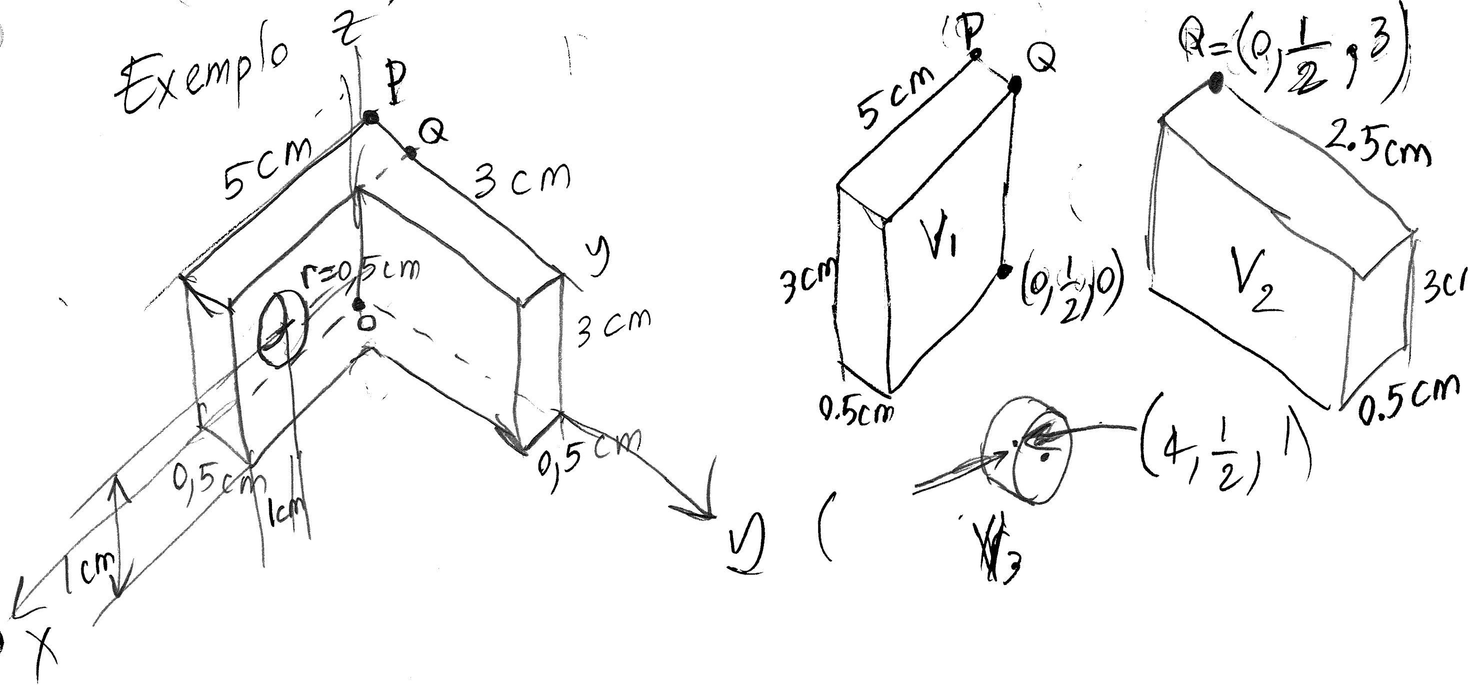
2. Ponto de simetria





Aula 10, 26 de Março de 1999

Exemplo



i	x_i	y_i	z_i	V_i	x_iV_i	y_iV_i	z_iV_i
1	$5/2$	$1/4$	$3/2$	$15/2$	$75/4$	$15/8$	$45/4$
2	$1/4$	$7/4$	$3/2$	$15/4$	$15/16$	$105/16$	$45/8$
3	4	$1/4$	1	$-\pi/8$	$-\pi/2$	$-\pi/32$	$-\pi/8$
$\sum_{i=1}^{3}$				$\frac{90-\pi}{8}$	$\frac{315-8\pi}{16}$	$\frac{270-\pi}{32}$	$\frac{135-\pi}{8}$

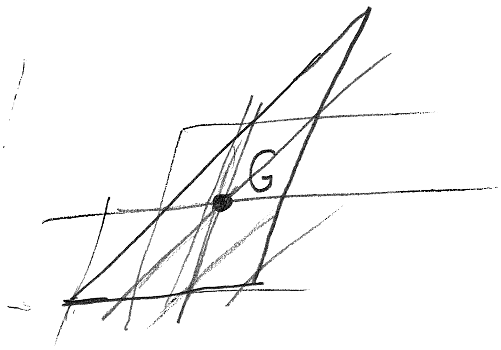
$$\bar{x} = \left(\frac{315-8\pi}{16}\right)\left(\frac{8}{90-\pi}\right) = \frac{315-8\pi}{180-2\pi} = 1,67 \text{ cm}$$

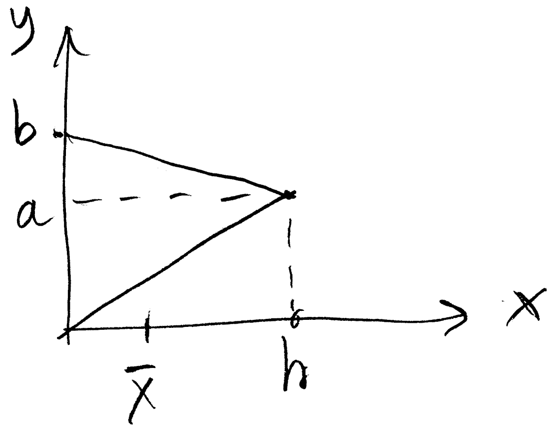
$$\bar{y} = \left(\frac{270-\pi}{32}\right)\left(\frac{8}{90-\pi}\right) = \frac{270-\pi}{2(180-2\pi)} = 0,768 \text{ cm}$$

$$\bar{z} = \left(\frac{135-\pi}{8}\right)\left(\frac{8}{90-\pi}\right) = \frac{135-\pi}{90-\pi} = 1,52 \text{ cm}$$

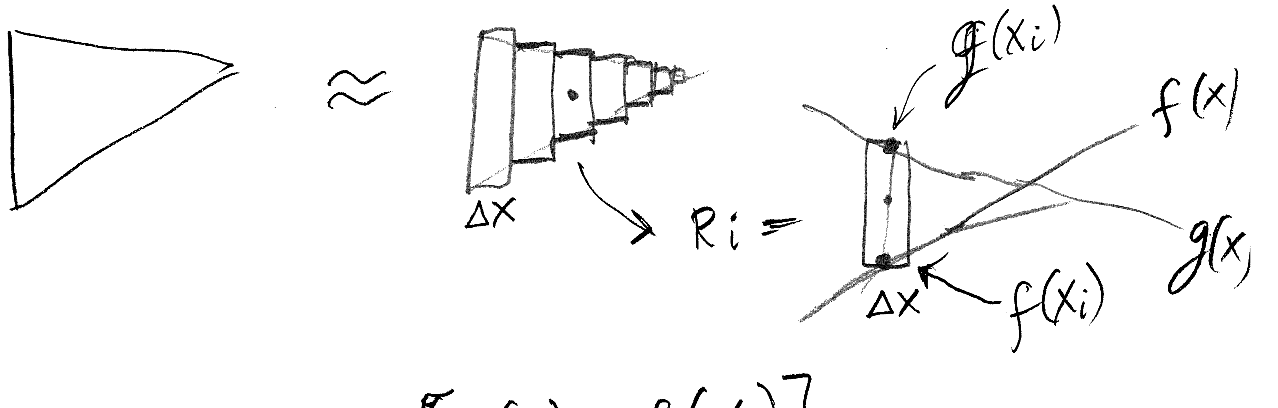
Cálculo da posição do centróide por integração:

Exemplo: Demonstre que em qualquer triângulo o centroide encontra-se a $\frac{1}{3}$ da sua altura.





(a pode ser maior que b ou negativa)



$$\Rightarrow A_i = \Delta x\left[g(x_i) - f(x_i)\right]$$

$$G_i = \left(x_i\,,\ \frac{f(x_i)+g(x_i)}{2}\right)$$

$$f(x) = \frac{a}{h}x \qquad g(x) = b - \left(\frac{b-a}{h}\right)x$$

$$\rightarrow g(x) - f(x) = b - \left(\frac{b}{h} - \frac{a}{h} + \frac{a}{h}\right) x = b\left(1 - \frac{x}{h}\right)$$

$$A_i = b\left(1 - \frac{x_i}{h}\right)\Delta x$$

$$\rightarrow \bar{x} = \lim_{\Delta x \to 00} \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i b\left(1 - \frac{x_i}{h}\right)\Delta x}{\sum_{i=1}^{n} b\left(1 - \frac{x_i}{h}\right)\Delta x}$$

$$= \frac{\int_0^h b\left(x - \frac{x^2}{h}\right)dx}{\int_0^h b\left(1 - \frac{x}{h}\right)dx} = \frac{\cancel{b}\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3h}\right]_0^h}{\cancel{b}\left[x - \frac{x^2}{2h}\right]_0^h}$$

$$= \left(\frac{h^2}{2} - \frac{h^2}{3}\right)\left(h - \frac{h}{2}\right)^{-1} = \frac{h^2/6}{h/2} = \frac{h}{3}$$

TEOREMA DE PAPPUS

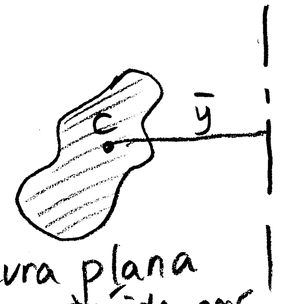
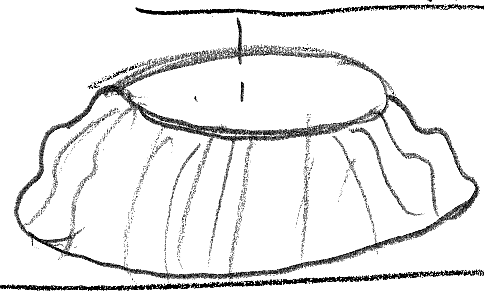


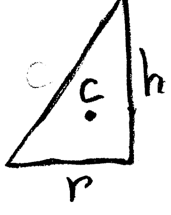
figura plana com centróide em c

rodando a figura plana em relação ao eixo, obtem-se um sólido de revolução



$$\boxed{\text{O volume do sólido de revolução é } 2\pi\bar{y}A\text{, onde } A \text{ é a área da figura plana e } \bar{y} \text{ a distância do centróide ao eixo.}}$$

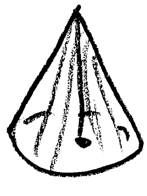
exemplo:



triângulo de base r e altura h

$$\Rightarrow A = \frac{rh}{2}$$

rodando com eixo em h, obtem-se um cone de raio r e altura h.



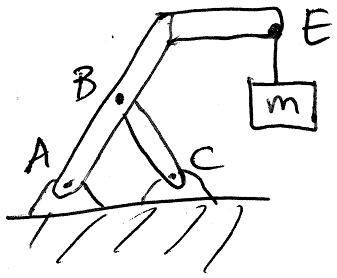
$$\bar{y} = r/3$$

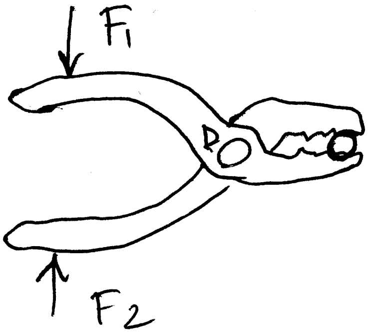
$$\Rightarrow \boxed{V_{cone} = \frac{\pi r^2 h}{3}}$$

Aula 11, 9 de Abril/99

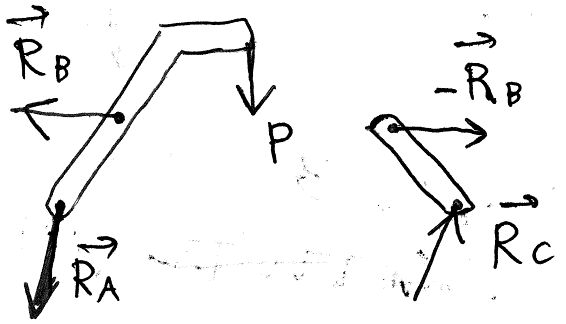
ESTRUTURAS E MÁQUINAS

Exemplos:





Para calcular as forças internas nos pontos A, B, C ou D, é necessário considerar por separado o diagrama de corpo livre de cada peça:



Duas coisas importantes a ter em conta:

① Os diagramas devem ser consistentes em relação as forças de acção e reacção.

Neste caso, no ponto B, as forças sobre cada uma das 2 peças em contacto são forças de acção e reacção. Assim, não devem ser representadas como 2 forças independentes mas sim como uma força R_B e a mesma força com sinal contrário na outra peça.

$\Rightarrow$ Incógnitas $= 6$ $(R_{Ax}, R_{Ay}, R_{Bx}, R_{By}, R_{Cx}, R_{Cy}$

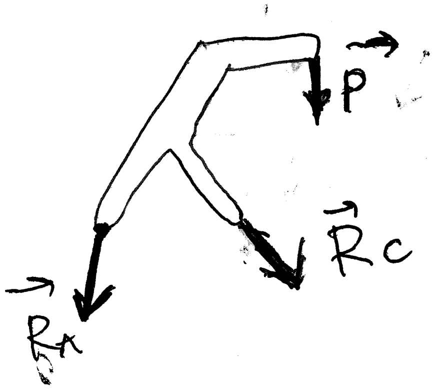
(2) Os elementos mais simples numa estrutura, são aqueles onde existem únicamente dois pontos de apoio. Como vimos numa secção anterior, as forças nesses pontos deverão ser iguais e opostas e com a mesma linha de acção.

No caso do exemplo, na barra BC:

$\Rightarrow$ únicamente 3 variáveis: R_{Ax}, R_{Ay}, ~~R_{Cx}, R_{Cy}~~ e R_c (direcção de $\vec{R}_c$ conhecida)

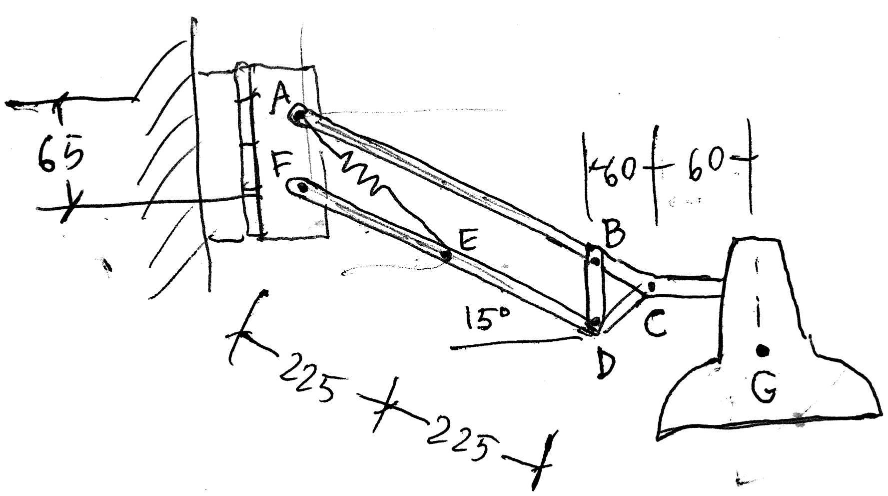
Mas como as equações de equilíbrio para a barra BC já foram resolvidas (dando que $\vec{R}_B$ era igual e oposta e na mesma linha de $\vec{R}_c$) teremos apenas 3 equações para a peça ACE, ~~teremos um sistema estaticamente indeterminado~~

por vezes,
É conveniente também considerar o diagrama de corpo livre da estrutura completa:



que neste caso é equivalente ao diagrama de ABE, uma vez identificamos a direcção de $\vec{R_C}$.

Exemplo:



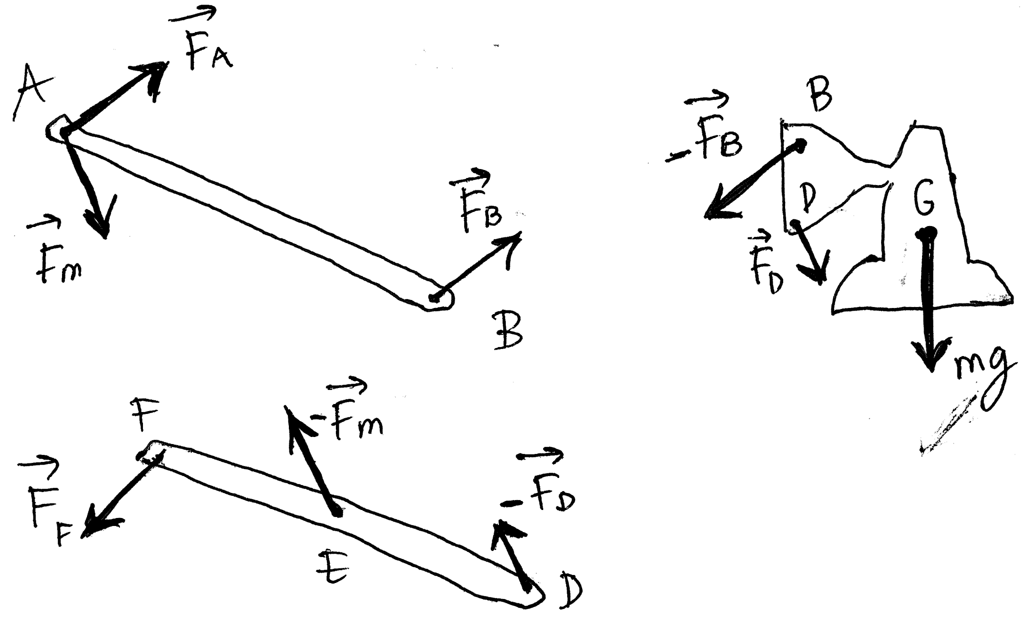
(distâncias em mm)

A massa total do candeeiro é 0,6 kg, com centro de gravidade em G. A massa das barras é desprezável.

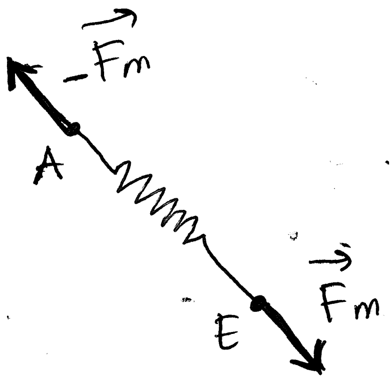
A mola AE mantém o sistema em equilíbrio depois de o ponto D descer até FD formar um ângulo de 15° com a horizontal.

Calcule a força produzida pela mola.

Resolução: Diagramas de corpo livre:

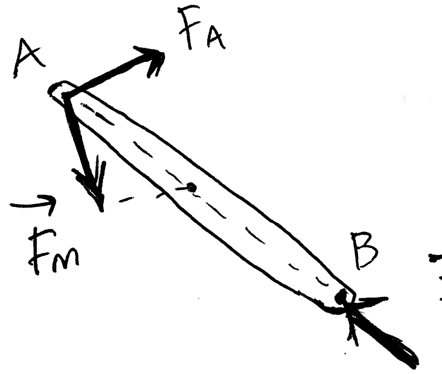


Onde $\vec{F}_m$ é a força sobre a mola, que deverá ter a direcção dela:

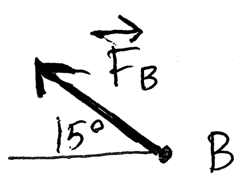


$$\Longrightarrow \vec{F}_m = F_m \, \widehat{AE}$$

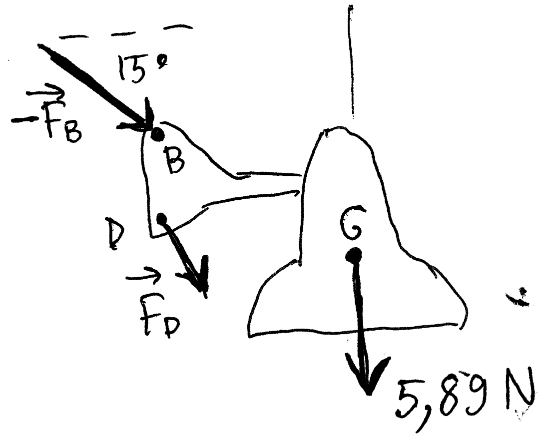
O elemento mais simples (com 2 pontos) é a barra AB:



$\vec{F}_B$ deverá realmente ter a direcção de $\widehat{BA}$



A continuação (conhecida a direcção de $\vec{F}_B$) passamos à otra peça onde aparece $\vec{F}_B$:



momentos em relação a D: (em N·cm)

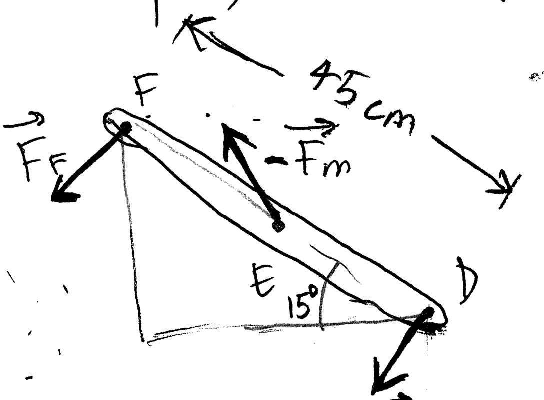
$$0 = -12 \cdot 5{,}89 - 6{,}5\,(F_B \cos 15°)$$

$$\rightarrow F_B = -11{,}26 \text{ N}$$

$$\sum F_x = 0 \quad \rightarrow \quad F_{Dx} = 11{,}26 \cos 15 = 10{,}87 \text{ N}$$

$$\sum F_y = 0 \quad \rightarrow \quad F_{Dy} = 5{,}89 - 11{,}26 \sin 15° = 2{,}98 \text{ N}$$

Na peça FED: (colocando $-\vec{F}_D$ na direção já calculada)



$$-\vec{F}_D = -10{,}87\,\hat{\imath} - 2{,}98\,\hat{\jmath}$$

$$-\vec{F}_m = F_m \widehat{EA}$$

$$\vec{EA} = -22{,}5 \cos 15°\,\hat{\imath} + (6{,}5 + 22{,}5 \sin 15°)\,\hat{\jmath}$$
(cm)

$$\rightarrow \widehat{EA} = -0{,}870\,\hat{\imath} + 0{,}493\,\hat{\jmath}$$

$$-\vec{F}_m = -0.87 F_m \hat{\imath} + 0.493 F_m \hat{\jmath}$$

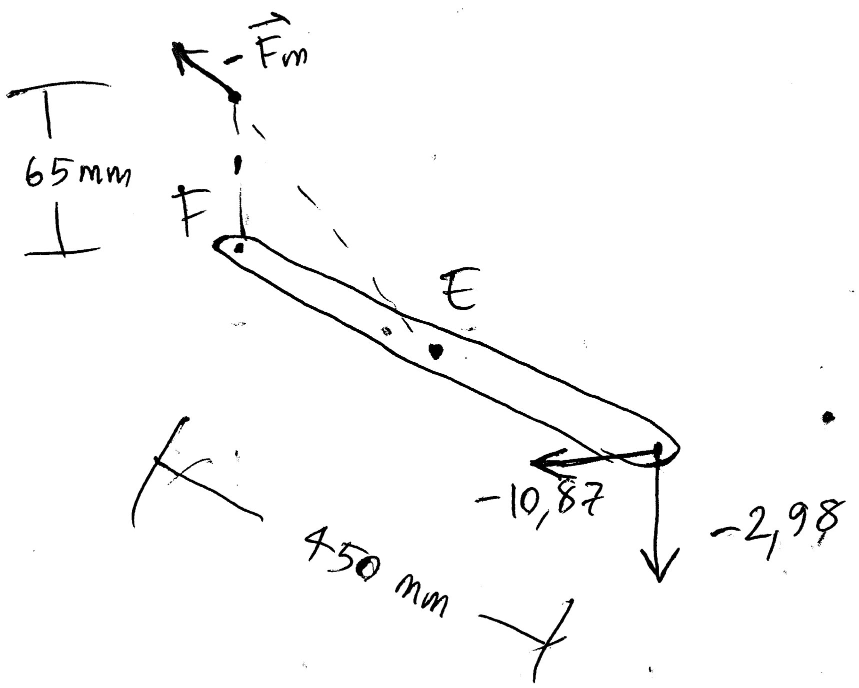
Momentos em relação a F:

$$-(45 \sin 15°)\,10{,}87 - (45 \cos 15°)\,2{,}98 - (22{,}5 \sin 15°)(0{,}870 F_m)$$

$$+ (22{,}5 \cos 15°)(0{,}493 F_m) = 0$$

$$F_m = 2\,\frac{10{,}87 \sin 15° + 2{,}98 \cos 15°}{0{,}493 \cos 15° - 0{,}870 \sin 15°} = 45.3 \text{ N}$$

(44) MAIS FÁCIL:
momentos em relação a F, com $-\vec{F}_m$ a actuar em A:

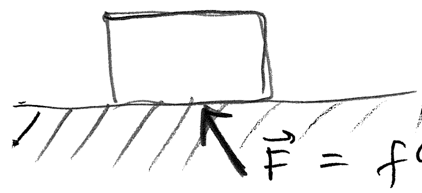


$$0{,}870 \cdot 6{,}5\, F_m - 10{,}87 \cdot 45 \sin 15^\circ - 2{,}98 \cdot 45 \cos 15^\circ = 0$$

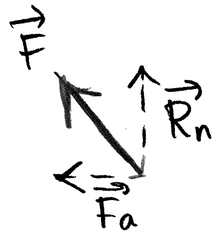
$$\boxed{F_m = 45{,}3\ \mathrm{N}}$$

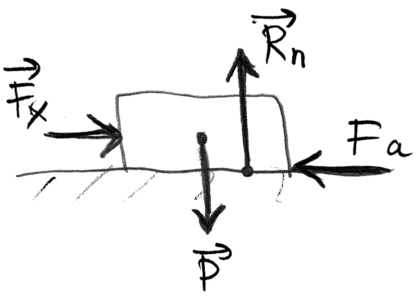
Aula 12, 14 de Abril de 1999

FORÇA DE ATRITO

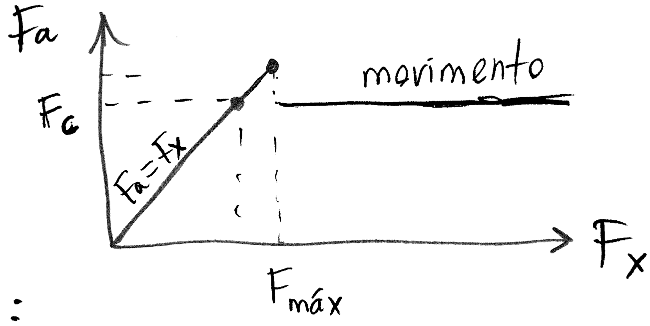


$\vec{F}$ = força de contacto
costuma ser dividida em duas componentes : $\begin{cases} \text{Reacção normal} \\ \text{força de atrito} \end{cases}$





$R_n = P = mg$



experimentalmente observa-se :

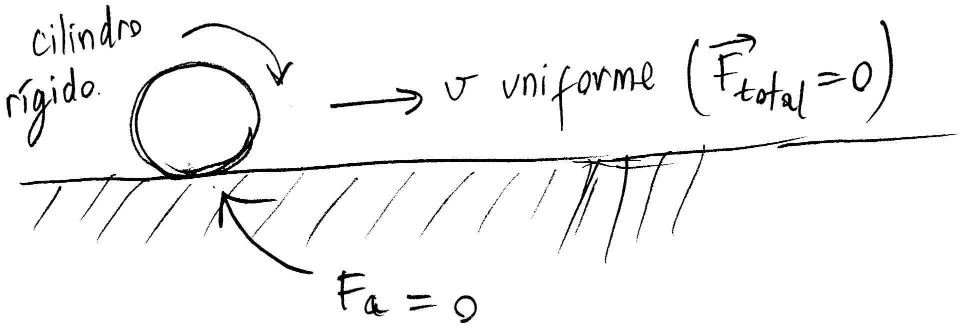
① $\dfrac{F_{máx}}{R_n}$ = constante = μ_e = coeficiente de atrito estático

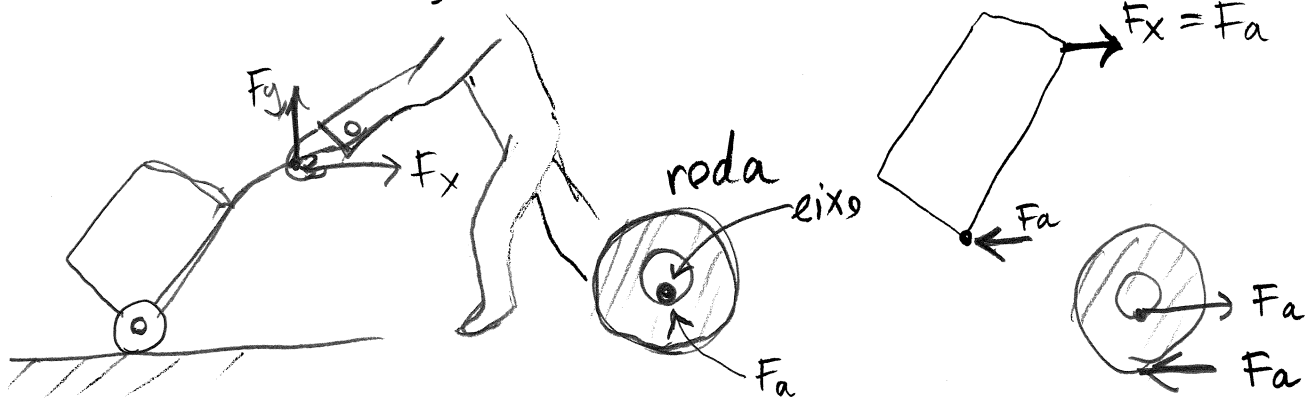
② $\dfrac{F_c}{R_n} = \mu_c$ = coeficiente de atrito cinético

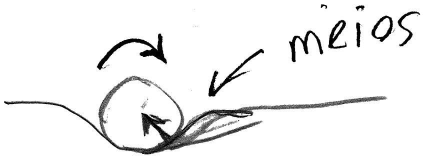
③ μ_e, μ_c dependem apenas das superfícies em contacto, e não do peso do objecto

$\mu_c < \mu_e$ Normalmente $\mu_e < 1$.

$\boxed{F_e \le \mu_e R_n}$ $\boxed{F_c = \mu_c R_n}$

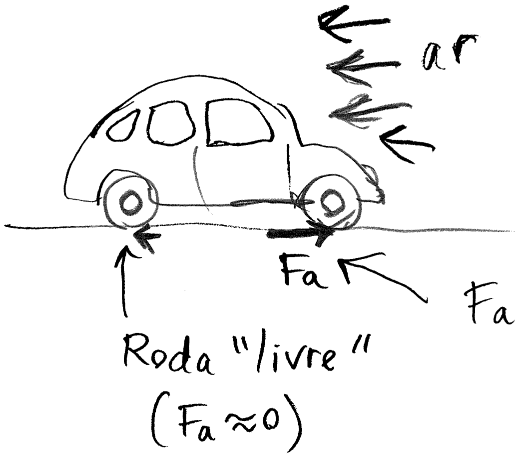






deformação → atrito de rolamento

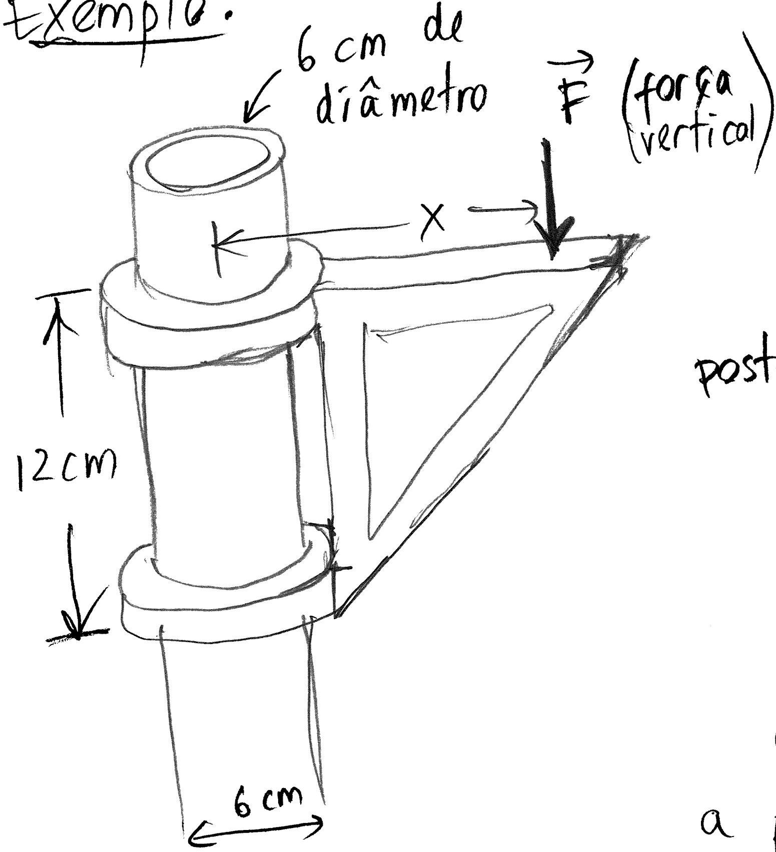
Força de tracção



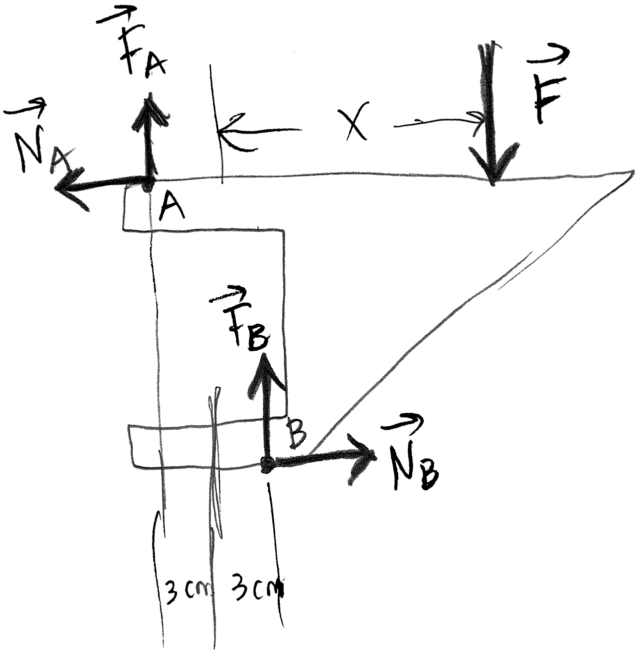
F_a = força de tracção

(única força responsável pelo movimento do carro. Necessária devido à elasticidade dos pnéus e ao atrito com o ar)

Exemplo:



A peça móvel pode ser deslocada a qualquer altura no poste vertical. O coeficiente de atrito estático entre a peça e o poste é 0,2. Calcule a distância mínima x à qual deverá actuar a força $\vec{F}$ para a peça permanecer estática. (o peso da peça é $\ll F$)



$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \Rightarrow N_A = N_B \\ \sum M_B = 0 \Rightarrow 12 N_B + 6 F_B = (x+3) \\ \sum M_A = 0 \Rightarrow 12 N_B - 6 F_A = (x-3) \end{cases}$$

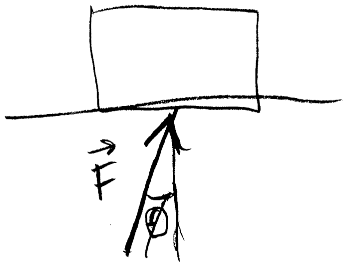
$F_B \leq \frac{N_B}{4}$ $\qquad F_A \leq \frac{N_B}{4}$ $\qquad$ (atrito nos pontos A e B onde há contacto entre a peça e o poste)

$$\rightarrow \begin{cases} (x+3)F \leq \left(12 + \frac{6}{4}\right) N_B \\ (x-3)F \geq \left(12 - \frac{6}{4}\right) N_B \end{cases}$$

$$\rightarrow \frac{x+3}{x-3} \leq \frac{27}{21} \qquad (x+3) \leq \frac{27}{21}(x-3) \quad (\text{se } x \geq 3$$

$$\Rightarrow \boxed{x > 24\ \text{cm}}$$

Aula 13, 16 de Abril de 1999

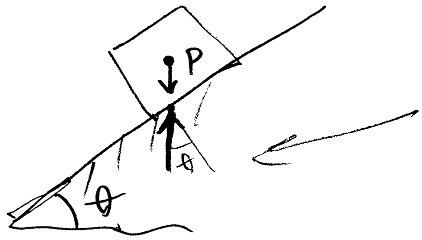


ângulos de atrito

$$\text{tg}\,\phi = \frac{F_a}{N}$$

$$\text{tg}(\phi_e) = \frac{\mu_e N}{N} = \mu_e \rightarrow \boxed{\phi_e = \text{arctg}(\mu_e}$$

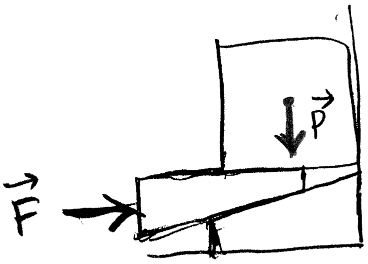
$$\phi_c = \text{arctg}\,\phi_c$$

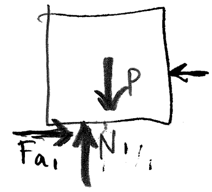


$$\theta_{máx} = \text{arctg}(\mu_e)$$

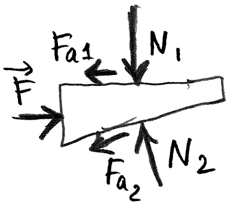
v constante

Cunhas:





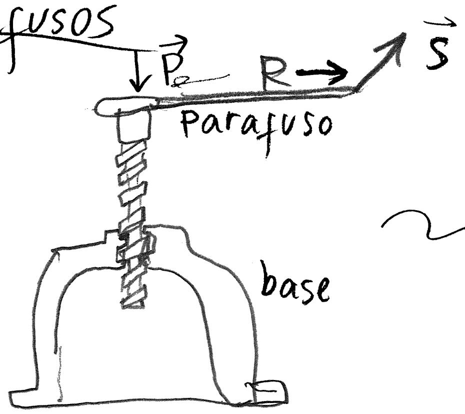
$N_1 = P$

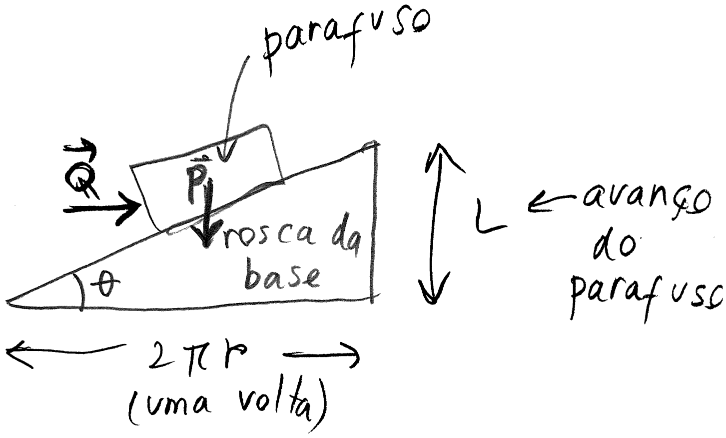


como $F_{a1} \ll N_1$ $\rightarrow$ $\boxed{F < P}$

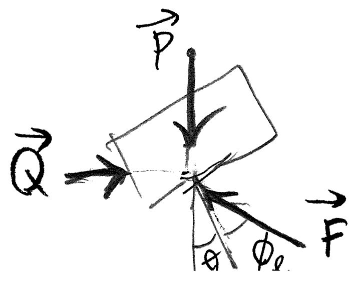
pode levantar-se o peso P aplicando a força $F < P$

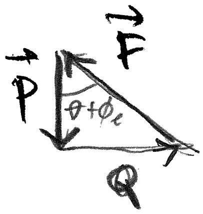
Parafusos

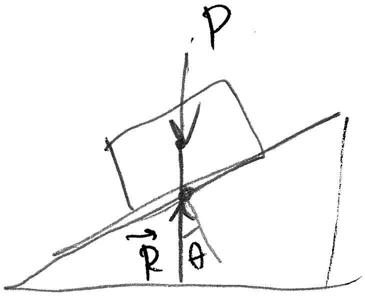




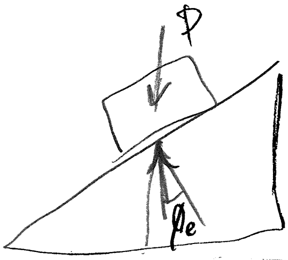
$$Qr = SR$$







se $\theta < \phi_e$, o parafuso é auto-bloqueante



se $\theta > \phi_e$, o parafuso desliza para baixo