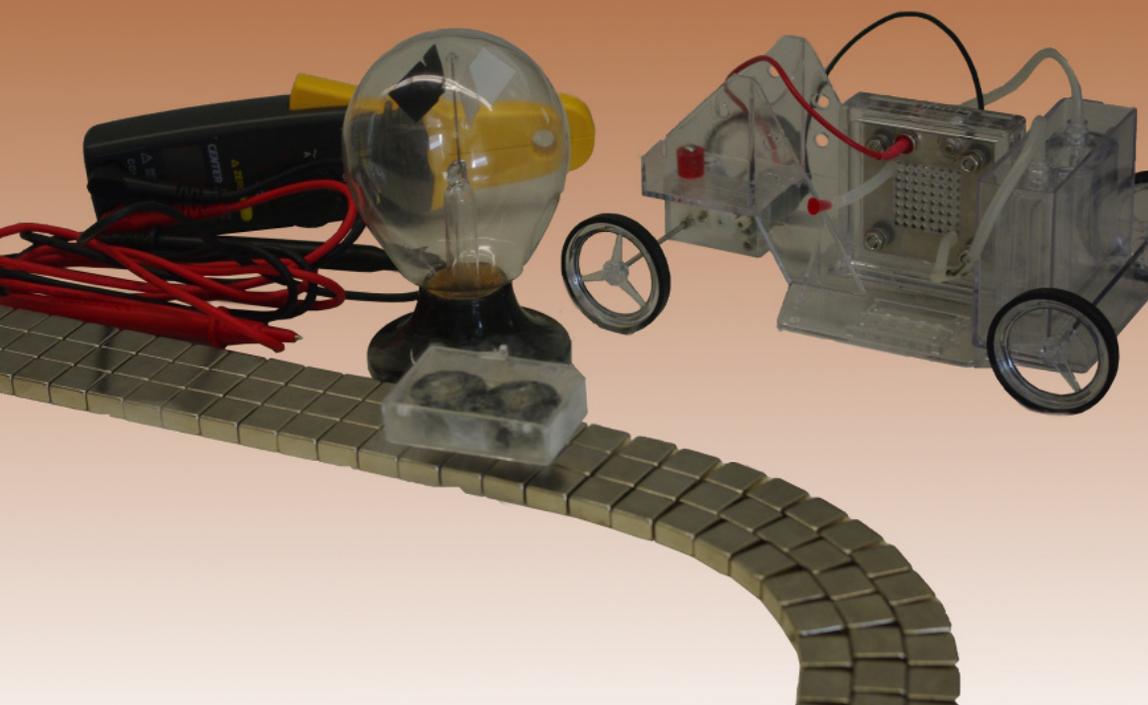


# Teoria Eletromagnética

Jaime E. Villate





# **Teoria Eletromagnética**

**Jaime E. Villate**

Faculdade de Engenharia

Universidade do Porto

<http://def.fe.up.pt>

## **Teoria Eletromagnética**

Copyright © 2015 Jaime E. Villate

E-mail: [villate@fe.up.pt](mailto:villate@fe.up.pt)

Versão DRAFT: 31 de agosto de 2015

ISBN: 978-972-99396-4-8



Este livro pode ser copiado e reproduzido livremente, respeitando os termos da *Licença Creative Commons Atribuição-Partilha* (versão 3.0). Para obter uma cópia desta licença, visite <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>



ou envie uma carta para Creative Commons, 559 Nathan Abbott Way, Stanford, California 94305, USA.

# Conteúdo

<b>Prefácio</b>	<b>ix</b>
<b>Lista de símbolos e notações</b>	<b>xi</b>
<b>1. Campo elétrico</b>	<b>1</b>
1.1. Força e carga elétricas . . . . .	2
1.2. Eletrização . . . . .	3
1.3. Lei de Coulomb . . . . .	5
1.4. Campo elétrico . . . . .	9
1.5. Linhas de campo elétrico . . . . .	11
1.6. Condutores e Isoladores . . . . .	13
1.7. Distribuições contínuas de carga . . . . .	15
1.7.1. Carga distribuída numa curva . . . . .	16
1.7.2. Carga distribuída numa superfície . . . . .	18
1.7.3. Carga distribuída num volume . . . . .	21
Perguntas . . . . .	22
Problemas . . . . .	23
Respostas . . . . .	26
<b>2. Fluxo elétrico</b>	<b>27</b>
2.1. Fluxo elétrico . . . . .	28
2.2. Lei de Gauss . . . . .	34
2.3. Condutores em equilíbrio eletrostático . . . . .	39
2.3.1. Carga por indução . . . . .	40
2.3.2. Carga e campo num condutor em equilíbrio . . . . .	41
Perguntas . . . . .	43
Problemas . . . . .	44
Respostas . . . . .	47
<b>3. Potencial elétrico</b>	<b>49</b>
3.1. Trabalho e energia . . . . .	49
3.2. Diferença de potencial eletrostático . . . . .	51
3.3. Gradiente do potencial . . . . .	53
3.4. Superfícies equipotenciais . . . . .	58
3.5. Cálculo do potencial elétrico . . . . .	62
3.6. Potencial e carga nos condutores . . . . .	66

Perguntas . . . . .	68
Problemas . . . . .	69
Respostas . . . . .	73
<b>4. Equações fundamentais da eletrostática . . . . .</b>	<b>75</b>
4.1. Limitações da lei de Coulomb . . . . .	76
4.2. Divergência . . . . .	77
4.3. Teorema da divergência . . . . .	79
4.4. Rotacional . . . . .	80
4.5. Teorema de Stokes . . . . .	84
4.6. Equação de Poisson . . . . .	85
Problemas . . . . .	88
Respostas . . . . .	90
<b>5. Capacidade e energia eletrostática . . . . .</b>	<b>91</b>
5.1. Capacidade elétrica . . . . .	92
5.2. Condensadores . . . . .	92
5.2.1. Condensador de placas planas paralelas . . . . .	93
5.2.2. Condensador esférico . . . . .	95
5.2.3. Condensador cilíndrico . . . . .	96
5.3. Energia eletrostática . . . . .	97
5.4. Energia armazenada num condensador . . . . .	99
5.5. Dielétricos . . . . .	101
5.6. Campo elétrico dentro da matéria . . . . .	103
Perguntas . . . . .	106
Problemas . . . . .	107
Respostas . . . . .	108
<b>6. Corrente elétrica . . . . .</b>	<b>109</b>
6.1. Densidade de corrente . . . . .	112
6.2. Resistência e lei de Ohm . . . . .	115
6.3. Resistência e temperatura . . . . .	118
6.4. Supercondutividade . . . . .	120
6.5. Energia dissipada num condutor . . . . .	121
6.6. Fontes de força eletromotriz . . . . .	122
Problemas . . . . .	124
Respostas . . . . .	126
<b>7. Circuitos de corrente contínua . . . . .</b>	<b>127</b>
7.1. Circuitos equivalentes . . . . .	129
7.2. Associação de resistências e condensadores . . . . .	131
7.3. Energia nos circuitos . . . . .	134
7.4. Regras de Kirchhoff . . . . .	136
7.5. Circuito $RC$ . . . . .	139

7.6. Circuito RC com fonte . . . . .	141
7.7. Amperímetros, volímetros e ohmímetros . . . . .	144
Problemas . . . . .	146
Respostas . . . . .	149
<b>8. Campo magnético</b> . . . . .	<b>151</b>
8.1. Campo magnético . . . . .	152
8.2. Força magnética sobre um condutor com corrente . . . . .	154
8.3. Espiras e bobinas . . . . .	156
8.4. Movimento de partículas no campo magnético . . . . .	158
8.5. Aplicações dos campos elétrico e magnético . . . . .	161
8.5.1. Filtro de velocidades . . . . .	162
8.5.2. Tubo de raios catódicos . . . . .	163
8.5.3. Espetrometro de massa . . . . .	164
8.5.4. Galvanómetro . . . . .	165
Problemas . . . . .	166
Respostas . . . . .	168
<b>9. Magnetostática</b> . . . . .	<b>169</b>
9.1. Lei de Biot-Savart . . . . .	170
9.2. Força magnética entre fios com corrente . . . . .	172
9.3. Lei de Ampère . . . . .	175
9.4. Linhas de campo magnético . . . . .	178
9.5. Bobinas . . . . .	180
9.6. Equações fundamentais da magnetostática . . . . .	182
9.7. Campo magnético dentro da matéria . . . . .	183
Problemas . . . . .	185
Respostas . . . . .	188
<b>10. Indução eletromagnética</b> . . . . .	<b>189</b>
10.1. Lei de Faraday . . . . .	190
10.2. Gerador de corrente alternada . . . . .	192
10.3. Indução em condutores em movimento . . . . .	193
10.4. Gerador de Faraday . . . . .	196
10.5. Campo elétrico em referenciais em movimento . . . . .	198
10.6. Forma geral da lei de Faraday . . . . .	200
10.7. Auto-indução . . . . .	202
Problemas . . . . .	206
Respostas . . . . .	210
<b>11. Processamento de sinais</b> . . . . .	<b>211</b>
11.1. Sinais . . . . .	212
11.2. Circuito RC . . . . .	212
11.3. Equações diferenciais dos circuitos . . . . .	213

11.4. Unidades de tempo e de frequência . . . . .	216
11.5. Impedância . . . . .	217
11.6. Associações de impedâncias . . . . .	218
11.7. Função de transferência . . . . .	225
Perguntas . . . . .	227
Problemas . . . . .	228
Respostas . . . . .	230
<b>12. Circuitos de corrente alternada</b>	<b>231</b>
12.1. Circuito LC . . . . .	232
12.2. Funções sinusoidais . . . . .	234
12.3. Fasores . . . . .	235
12.4. Tensão alternada . . . . .	237
12.5. Impedância complexa . . . . .	238
12.6. Potência nos circuitos de corrente alternada . . . . .	243
12.7. Filtros de frequência . . . . .	245
12.8. Ressonância . . . . .	248
Perguntas . . . . .	250
Problemas . . . . .	251
Respostas . . . . .	253
<b>13. Eletrodinâmica</b>	<b>255</b>
13.1. Corrente de deslocamento . . . . .	256
13.2. Equações de Maxwell . . . . .	260
13.3. Transformação de Galileu do campo eletromagnético . . . . .	262
13.4. Energia do campo eletromagnético . . . . .	267
13.5. Potencial vetorial . . . . .	268
Problemas . . . . .	271
Respostas . . . . .	272
<b>14. Ondas eletromagnéticas e luz</b>	<b>273</b>
14.1. Ondas eletromagnéticas . . . . .	274
14.2. Equação de onda eletromagnética . . . . .	276
14.3. Ondas planas . . . . .	277
14.4. Ondas harmônicas . . . . .	280
14.5. Ondas esféricas . . . . .	284
14.6. Intensidade das ondas eletromagnéticas . . . . .	286
14.7. Espectro eletromagnético . . . . .	287
14.8. Ondas eletromagnéticas em meios materiais . . . . .	289
Problemas . . . . .	291
Respostas . . . . .	293
<b>A. Análise vetorial</b>	<b>295</b>
A.1. Vetores . . . . .	295

---

A.2. Curvas, superfícies e volumes . . . . .	296
A.3. Coordenadas cilíndricas e esféricas . . . . .	297
A.4. Operadores vetoriais . . . . .	298
<b>B. Transformada de Laplace</b>	<b>301</b>
B.1. Propriedades da transformada de Laplace . . . . .	302
B.1.1. Linearidade . . . . .	302
B.1.2. Derivada da transformada . . . . .	302
B.1.3. Transformada da derivada . . . . .	302
B.1.4. Deslocamento na frequência . . . . .	303
B.1.5. Deslocamento no tempo . . . . .	303
B.2. Transformadas de funções importantes . . . . .	304
B.2.1. Polinômios . . . . .	304
B.2.2. Funções exponenciais . . . . .	304
B.2.3. Funções sinusoidais . . . . .	305
B.2.4. Função impulso unitário . . . . .	305
<b>C. Unidades SI e constantes</b>	<b>307</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>311</b>
<b>Índice</b>	<b>313</b>



# Prefácio

Este livro está baseado no livro “Eletromagnetismo” (J. E. Villate, Mc Graw-Hill, Lisboa, 1999), que escrevi em 1999, após ter lecionado essa disciplina durante muitos anos na Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto.

Esse livro deixou de ser distribuído pelo editor e a tecnologia eletromagnética tem evoluído tanto desde 1999, que já era necessário escrever um livro novo. Alguns temas como células de combustível, ultracondensadores e LEDs, que eu desconhecia quando comecei a lecionar o eletromagnetismo há 25 anos, hoje em dia são muito importantes e devem fazer parte de um livro de texto.

Os diretores do curso de Engenharia onde leciono atualmente têm pedido também que seja feita uma introdução a alguns temas que não foram abordados no meu livro de 1999 como, por exemplo, teoria do sinal.

Como tal, espero que este livro resulte mais motivador e mais útil para os atuais estudantes de ciências e engenharia. Outro livro que escrevi, com nível mais elementar e com maior ênfase nas ferramentas computacionais, é o livro “Eletricidade, Magnetismo e Circuitos”, que pode ser consultado no sítio:

<http://def.fe.up.pt/eletricidade/>

Jaime E. Villate  
E-mail: villate@fe.up.pt  
Porto, Março de 2015



# Lista de símbolos e notações

$A, B \dots$	pontos no espaço, curvas, superfícies e sólidos
$\mathbf{A}, \mathbf{B} \dots$	fases
$A, B \dots a, b \dots$	unidades
$\vec{A}, \vec{B} \dots \vec{a}, \vec{b} \dots$	vetores
$\hat{A}, \hat{B} \dots \hat{a}, \hat{b} \dots$	versores
$A, B \dots a, b \dots$	variáveis, funções ou módulos dos respetivos vetores
$\cdot$	produto escalar entre vetores)
$\times$	produto vetorial entre vetores ou produto entre números
$\frac{d}{dx}$	derivada ordinária
$\frac{\partial}{\partial x}$	derivada parcial
$f'$	derivada de uma função de uma variável
$\dot{f}$	derivada de $f$ em ordem ao tempo
$\mathcal{F}\{f\}$	transformada de Fourier de $f$
$\tilde{f}$ ou $\mathcal{L}\{f\}$	transformada de Laplace de $f$
$\bar{f}$	valor médio de $f$
$f_{ef}$	valor eficaz da função periódica $f$
$f_{máx}$	valor máximo da função sinusoidal $f$
$\vec{\nabla}$	operador nabla
$\vec{\nabla} \cdot$	divergência
$\vec{\nabla} \times$	rotacional
$\vec{A}$	potencial vetorial
$A$	área de uma superfície
$A$	ampere (unidade de corrente eléctrica)
$\vec{B}$	campo de indução magnética
$C$	capacidade eléctrica
$C$	coulomb (unidade de carga)
$c$	velocidade da luz
$\vec{D}$	deslocamento eléctrico
$dA$	elemento diferencial de superfície
$d\vec{A}$	vetor diferencial de área
$d\vec{r}$	deslocamento infinitesimal vetorial
$d\vec{r}_u$	deslocamento parcial, quando só o parâmetro $u$ aumenta

---

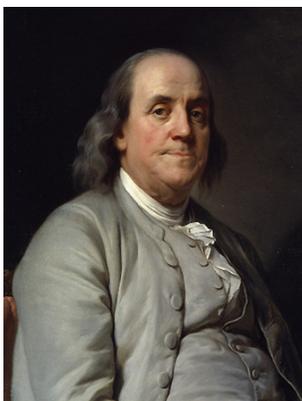
$ds$	elemento diferencial de percurso
$dV$	elemento diferencial de volume
$\vec{E}$	campo eléctrico
$E_k$	energia cinética
$E_p$	energia potencial
$e$	carga elementar
$e$	número de Euler (base do logaritmo natural)
eV	elétron-volt (unidade de energia)
$\vec{F}$	força
F	farad (unidade de capacidade)
$f$	frequência
G	gauss (unidade alternativa de indução magnética)
$\vec{H}$	campo magnético
H	henry (unidade de indutância)
$h_i$	factores de escala
$I$	intensidade da corrente eléctrica; intensidade de uma onda
$I_C$	corrente através de uma curva fechada C
$I_d$	corrente de deslocamento
$\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$	versores nas direcções dos eixos $x, y$ e $z$
$i$	número imaginário $\sqrt{-1}$
$\vec{J}$	densidade de corrente eléctrica
$\vec{J}_0$	densidade de corrente livre (sem incluir correntes nos átomos)
J	joule (unidade de energia)
$K$	constante dieléctrica
$\vec{k}$	vetor de propagação de uma onda
$k$	constante de Coulomb
$k_m$	constante magnética
$L$	indutância
$\vec{M}$	momento de uma força
$M$	coeficiente de indução
$\vec{m}$	momento magnético
$m$	massa
m	metro (unidade de comprimento)
$P$	potência
$\hat{p}$	versor de polarização de uma onda plana
$Q$	factor de qualidade num circuito $LCR$
$q$	carga
$q_{\text{int}}$	carga no interior de uma superfície fechada
$R$	resistência eléctrica
$R, \theta, z$	coordenadas cilíndricas

---

$r, \theta, \phi$	coordenadas esféricas
$\vec{r}$	vetor posição
$\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi}$	versores nas direcções radial, azimutal e zenital
$\vec{S}$	vetor de Poynting
$s$	segundo (unidade de tempo)
$\vec{T}$	momento de um binário
$T$	período de uma onda harmónica
$T_c$	temperatura crítica
$T$	tesla (unidade de indução magnética)
$\hat{t}, \hat{n}, \hat{b}$	versores tangencial, normal e binormal
$t$	tempo
$t_c$	constante de tempo
$U$	energia potencial electrostática
$u$	energia potencial volúmica
$V$	potencial electrostático
$V$	volt (unidade de potencial electrostático)
$\vec{v}$	velocidade
$W$	trabalho
$W$	watt (unidade de potência)
$X$	reactância
$x, y, z$	coordenadas cartesianas
$Y$	admitância
$Z$	impedância
$\alpha$	coeficiente de temperatura
$\beta$	velocidade relativa à velocidade da luz
$\gamma$	factor de dilatação de Lorentz
$\epsilon$	permitividade
$\epsilon_0$	permitividade do vazio
$\epsilon$	força electromotriz
$\lambda$	carga linear; comprimento de onda
$\mu_e$	mobilidade eléctrica
$\mu$	permeabilidade
$\mu_0$	permeabilidade do vazio
$\mu$	prefixo micro ( $10^{-6}$ )
$\rho$	carga volúmica
$\rho_0$	carga volúmica livre (sem incluir polarização dos átomos)
$\rho$	resistividade
$\sigma$	carga superficial; condutividade
$\Phi$	fluxo magnético
$\Phi_e$	fluxo energético de uma onda
$\varphi$	densidade de fluxo energético, fase de uma onda harmónica ou de um número complexo
$\varphi_0$	fase inicial

$\chi_e$	susceptibilidade eléctrica
$\chi_m$	susceptibilidade magnética
$\Psi$	fluxo eléctrico
$\Omega$	ângulo sólido
$\Omega$	ohm (unidade de resistência)
$\omega$	frequência angular

# 1. Campo elétrico



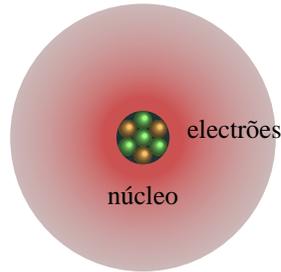
**Benjamin Franklin (1706–1790)**

Desde o século VII a. C. os gregos já conheciam as forças elétricas que actuam à distância entre objetos eletrizados por fricção. No século XVIII, Stephen Gray descobriu que a eletrização de um objeto pode ser transferida, como se fosse um fluido, através de alguns corpos chamados **condutores** e que existem dois tipos desse “fluido” elétrico. Benjamin Franklin, observando que tanto o objeto eletrizado por fricção como o material usado para friccionar adquirem cargas da mesma grandeza mas de tipos opostos, postulou a existência de um único fluido elétrico. Segundo Franklin, todos os objetos no seu estado natural contêm uma dada quantidade de fluido elétrico; o friccionamento faz com que parte desse fluido seja transferido ficando um dos objetos com excesso e o outro com falta desse fluido.

Não podendo detetar o fluxo de fluido elétrico, Franklin assumiu que no vidro esfregado com seda o fluido passa da seda para o vidro. Assim sendo, Franklin chamou **carga positiva** (excesso de fluido elétrico) ao estado de eletrização do vidro esfregado com seda e **carga negativa** ao estado de eletrização da seda usada para esfregar esse vidro. Atualmente sabe-se que a matéria é constituída por átomos e que um átomo ou molécula está no seu estado elétrico “natural” (neutro), quando tem o mesmo número de eletrões e de protões. O fluido elétrico postulado por Franklin é realmente a transferência de eletrões entre átomos ou moléculas. No caso do vidro eletrizado por fricção com seda, os eletrões passam do vidro para a seda; ou seja, usando os sinais adotados por Franklin para a carga, o eletrão é uma partícula com carga elétrica negativa.

## 1.1. Força e carga elétricas

Toda a matéria é constituída por átomos e cada átomo é formado por três tipos de partículas fundamentais. O elétron foi a primeira partícula dessas partículas a ser descoberta, por J. J. Thomson em 1897. Os outros dois tipos de partículas atômicas são os **protões** e os **neutrões** que se encontram no núcleo atômico com carga positiva e elétrons à sua volta (ver figura 1.1). O que distingue os átomos de diferentes elementos químicos é o número de protões no núcleo, chamado **número atômico**.



**Figura 1.1.:** Átomo de berílio.

Por exemplo, o átomo com 4 protões e 3 neutrões que mostra a figura 1.1 é um átomo de berílio, com número atômico igual a 4. Um elétron isolado é uma partícula muito pequena, mas dentro do átomo, cada elétron assemelha-se de uma “nuvem” espalhada em torno do núcleo.

Entre dois protões ou dois elétrons atua uma força repulsiva chamada **força elétrica**. A origem dessa força é atribuída a uma propriedade intrínseca das partículas fundamentais, chamada **carga elétrica**.

A intensidade da força elétrica entre dois protões ou dois elétrons é exatamente igual, se a distância entre as partículas for a mesma. Isso implica que a grandeza da carga elétrica dos protões e dos elétrons é a mesma. Um protão e um elétron, colocados à mesma distância que esses dois protões ou elétrons, também interagem com força elétrica da mesma intensidade, mas essa força é atrativa, em vez de repulsiva.

Conclui-se então que existem dois tipos diferentes de carga elétrica: a carga dos protões e a carga dos elétrons. A força elétrica entre duas partículas com o mesmo tipo de carga é repulsiva, enquanto que a força entre partículas com diferentes tipo de carga é atrativa.

Um átomo neutro (com igual número de protões e de elétrons) e não polarizado (nuvem eletrônica com centro no núcleo), não produz forças elétricas sobre outras partículas com carga. Assim sendo, é conveniente distinguir os dois tipos de carga atribuindo-lhes sinais opostos; a convenção adotada é que a carga dos protões é positiva e a carga dos elétrons é negativa. Como o valor absoluto das cargas dessas duas partículas é assim, a carga total dos átomos com igual número de elétrons e protões é nula, explicando porque não produzem forças elétricas sobre outras partículas externas.

Quando um átomo neutro perde um elétron, fica com uma unidade de carga positiva (ião positivo, com um excesso de um protão em relação ao número de elétrons) e

produz as mesmas forças que produz um único próton. Quando num átomo neutro entra mais um elétron, o átomo passa a ter uma carga total igual a uma unidade de carga negativa (ião negativo, com um elétron a mais em relação ao número de prótons), produzindo as mesmas forças elétricas do que um único elétron.

A unidade SI usada para medir carga é o **coulomb**, indicado com a letra C. Nessas unidades, a carga de um próton tem o valor

$$e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C} \quad (1.1)$$

A carga de um elétron é também igual a esse mesmo valor, mas com sinal negativo. Os neutrões não têm carga elétrica e, como tal, não sofrem nem produzem nenhuma força elétrica.

A partir da segunda metade do século XX, têm sido descobertas muitas outras partículas fundamentais, mas todas essas novas partículas têm cargas elétricas iguais a um múltiplo inteiro (positivo ou negativo) do valor  $e$  da carga do próton. Diz-se então que existe **quantização da carga**. Isto é, qualquer sistema no universo tem sempre uma carga total que é um múltiplo inteiro da **carga elementar**:  $e$  (ver equação (1.1)).

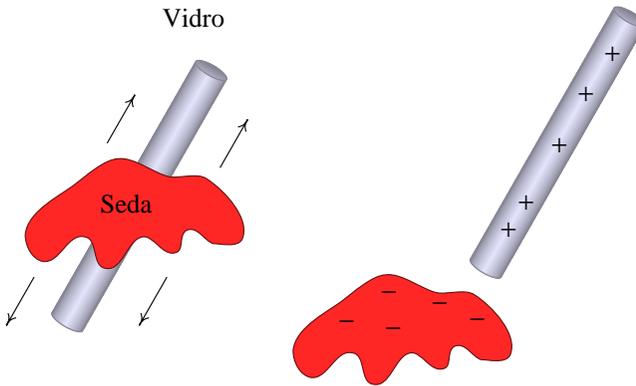
Outra propriedade importante da carga, que tem sido observada em todas as experiências em que são produzidas ou aniquiladas partículas fundamentais, é a **conservação da carga**: a carga total inicial é igual à carga total final.

## 1.2. Eletrização

É necessária uma energia muito elevada para conseguir remover um próton, ou um neutrão, do núcleo de um átomo. Isso só ocorre no interior das estrelas, na camada mais externa da atmosfera onde chocam partículas cósmicas com muita energia ou nos aceleradores de partículas onde as energias das partículas são suficientemente elevadas. Para extrair ou introduzir um elétron num átomo neutro é necessária uma energia muito menor.

Sempre que dois objetos diferentes entram em contacto próximo, há elétrões de um dos objetos que passam para o outro. O objeto que for mais susceptível de perder elétrões fica então eletrizado com carga positiva ( $n$  prótons em excesso) e o objeto que tiver menos tendência para perder os seus elétrões fica com carga da mesma intensidade, mas negativa ( $n$  elétrões em excesso). Por exemplo, a figura 1.2 mostra uma barra que perdeu elétrões após ter sido esfregada com um pano e esses elétrões passaram para o pano.

Os diferentes materiais podem ser ordenados numa **série triboelétrica** (tabela 1.1), em que os materiais no topo da série são mais susceptíveis de ficar com carga positiva e os materiais no fim da série têm maior tendência para ficar com carga negativa.



**Figura 1.2.:** Barra de vidro eletrizada por fricção com um pano de seda.

**Tabela 1.1.:** Série triboelétrica (fonte: Hecht, *Physics*, pág. 591).

---

Pele de Coelho
Vidro
Lã
Chumbo
Seda
Alumínio
Papel
Algodão
Madeira
Âmbar
Níquel, Cobre
Borracha
Estanho, Prata
Acetato
Esferovite
Vinil (PVC)

---

Quando a barra de vidro da figura 1.2 é friccionada com seda, alguns elétrons passam do vidro para a seda, porque o vidro está acima da seda na tabela triboelétrica. Como os elétrons transportam carga negativa, o vidro fica com carga positiva e a seda com carga negativa, com o mesmo valor absoluto da carga no vidro. Se a mesma barra de vidro fosse esfregada com uma pele de coelho, que está acima do vidro na série triboelétrica, a passagem de elétrons seria da pele para o vidro, ficando a barra de vidro com carga negativa e a pele com carga positiva.

### 1.3. Lei de Coulomb

Entre as experiências de eletrostática realizadas por Franklin, conta-se uma na qual introduziu pequenas bolinhas de cortiça dentro de uma taça metálica que tinha sido previamente isolada da mesa onde se encontrava e carregada eletricamente. Franklin observou que as bolinhas de cortiça não sentem a ação da força elétrica dentro da taça, ao contrário do que acontece fora dela, onde há forças elétricas que atraem a cortiça da taça.

Priestley conseguiu explicar esse fenômeno da forma seguinte: considere-se uma esfera metálica carregada, como mostra a figura 1.3, e uma partícula com carga  $q$  colocada num ponto qualquer dentro da esfera. Um conjunto contínuo de retas que passam pela partícula intersecta a esfera, nos dois lados opostos à partícula, formando duas regiões com áreas  $A_a$  e  $A_b$ , que são diretamente proporcionais aos quadrados das distâncias  $r_a$  e  $r_b$  desde  $P$  até os dois lados da esfera.

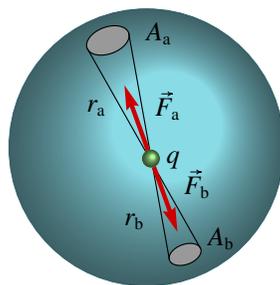
$$\frac{A_a}{A_b} = \frac{r_a^2}{r_b^2} \quad (1.2)$$

A mobilidade das cargas no metal e as forças repulsivas entre cargas do mesmo sinal, faz com que as cargas se distribuam uniformemente na superfície. Assim sendo, os valores absolutos das cargas nas duas regiões opostas da esfera,  $|q_a|$  e  $|q_b|$ , são diretamente proporcionais às áreas das duas regiões e a equação anterior implica:

$$\frac{|q_a|}{|q_b|} = \frac{r_a^2}{r_b^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{|q_a|}{r_a^2} = \frac{|q_b|}{r_b^2} \quad (1.3)$$

As duas regiões nos lados opostos de  $q$  produzem sobre a partícula duas forças opostas  $\vec{F}_a$  e  $\vec{F}_b$ . Se o módulo da força elétrica produzida por cada região é proporcional ao valor absoluto da carga na região, dividida pelo quadrado da distância até à partícula, então essas duas forças têm o mesmo módulo e anulam-se.

Qualquer outra região na superfície da esfera tem sempre uma respectiva região no lado oposto da carga  $q$  e as força resultante dessas duas regiões sobre a carga  $q$  também é nula. Conclui-se então que a força elétrica nula em qualquer ponto do interior da esfera condutora é consequência de que a força elétrica produzida por uma partícula com carga  $q_1$ , sobre outra partícula com carga  $q_2$ , é diretamente proporcional a  $|q_1|$  e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre as cargas. A lei de ação e reação também implica que o módulo da força elétrica de  $q_2$  sobre  $q_1$  seja o mesmo, ou seja, a força elétrica entre as partículas deverá ser



**Figura 1.3.:** Forças no interior de uma esfera carregada.

também proporcional a  $|q_2|$ . Resumindo, a expressão do módulo da força entre duas partículas com cargas  $q_1$  e  $q_2$  é

$$F_{12} = \frac{k |q_1| |q_2|}{r_{12}^2}, \quad (1.4)$$

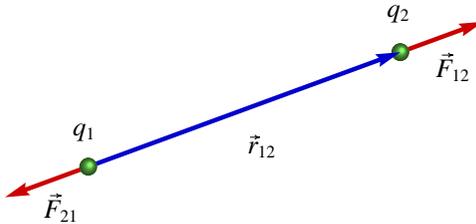
onde  $r_{12}$  é a distância entre as cargas e  $k$  é uma constante, chamada constante de Coulomb. Esta expressão da força elétrica chama-se **lei de Coulomb** :

*A força elétrica entre duas cargas pontuais é diretamente proporcional ao produto das cargas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre elas.*

A expressão vetorial para a força que a partícula  $q_1$  produz sobre a partícula  $q_2$  é a seguinte:

$$\vec{F}_{12} = \frac{k q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}. \quad (1.5)$$

O vetor  $\vec{F}_{12}$  é a força que a partícula 1 exerce sobre a partícula 2. O **versor**  $\hat{r}_{12}$  é um vetor de módulo unitário, no sentido do ponto 1 ao ponto 2,  $r_{12}$  é a distância entre as partículas, e  $q_1$  e  $q_2$  são os valores das suas cargas (ver figura 1.4).



**Figura 1.4.:** Força entre cargas pontuais do mesmo sinal.

Na equação (1.5), a força  $\vec{F}_{12}$  tem a mesma direção do versor  $\hat{r}_{12}$ , que é ao longo da linha que passa pelas duas partículas. O produto  $q_1 q_2$  tem sinal positivo se as cargas são do mesmo sinal, ou negativo se fossem de sinal contrário. Ou seja, se as cargas têm o mesmo sinal a força  $\vec{F}_{12}$  é no mesmo sentido do versor  $\hat{r}_{12}$  (força repulsiva) e se os sinais das cargas são diferentes, o sentido da força é oposto a  $\hat{r}_{12}$  (força atrativa). O módulo da força é diretamente proporcional às grandezas das cargas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre elas.

Observe-se que os dois índices (12) no vetor  $\vec{F}_{12}$  indicam a origem ou a causa, seguido pelo destino ou receptor, neste caso a força produzida pela partícula 1, que atua sobre a partícula 2. A lei de ação e reação indica que  $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$ , mas os módulos dessas duas forças são iguais:  $F_{21} = F_{12}$ .

A lei de Coulomb é válida unicamente para um sistema de duas cargas pontuais, ou seja, duas partículas com carga concentrada numa região muito pequena do espaço.

Para calcular as forças elétricas entre corpos com cargas distribuídas numa região do espaço não é necessário dividir cada uma dessas regiões em várias regiões pequenas que possam ser aproximadas a cargas pontuais, obter as forças entre todas essas cargas pontuais a partir da lei de Coulomb e obter a soma vetorial de todas essas forças.

A equação vetorial (1.5) é particularmente útil em três dimensões. Em duas dimensões é geralmente mais fácil usar a equação (1.4) para o módulo da força e desenhar a sua direção e sentido num diagrama que permita aplicar relações geométricas.

O valor da constante de Coulomb, no sistema internacional de unidades é

$$k = 9 \times 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} . \quad (1.6)$$

Também pode interpretar-se  $k$  como a constante que define a unidade SI de carga: uma carga de 1 C é uma carga tal que a força elétrica entre duas cargas de 1 C, distanciadas de 1 m, é igual a  $9 \times 10^9$  N.

### Exemplo 1.1

Três partículas com cargas de 3 nC, 5 nC e  $-8$  nC encontram-se nos vértices de um triângulo equilátero de 4 mm de lado. Determine a força total sobre a partícula de carga negativa.

**Resolução.** O primeiro que convém fazer é calcular o valor da constante eletrostática nas unidades relevantes no problema:

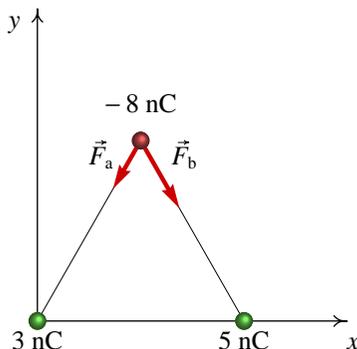
$$k = 9 \times 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} = 9 \times 10^9 \frac{10^3 \text{ mN}(10^6 \text{ mm}^2)}{10^{18} \text{ nC}^2} = 9 \frac{\text{mN} \cdot \text{mm}^2}{\text{nC}^2} ;$$

isto implica que, usando unidades de nC para as cargas, mm para as distâncias e o valor de 9 para a constante  $k$ , as forças calculadas pela lei de Coulomb serão dadas em mN.

A seguir escolhe-se um sistema de eixos coordenados como se mostra na figura ao lado. Sobre a partícula de carga  $-8$  nC atuam duas forças elétricas, produzidas pelas cargas de 3 nC e 5 nC. Os módulos das duas forças são

$$F_a = \frac{9 \times 3 \times 8}{4^2} \text{ mN} = 13.5 \text{ mN} ,$$

$$F_b = \frac{9 \times 5 \times 8}{4^2} \text{ mN} = 22.5 \text{ mN} .$$



As duas forças são atractivas e fazem um ângulo de  $30^\circ$  com a vertical. Assim sendo, as componentes da força resultante são

$$F_x = F_b \sin 30^\circ - F_a \sin 30^\circ = 4,5 \text{ mN},$$

$$F_y = -F_b \cos 30^\circ - F_a \cos 30^\circ = -18\sqrt{3} \text{ mN}$$

e o módulo da força resultante é

$$F = \sqrt{4,5^2 + 3 \times 18^2} = 31,5 \text{ mN}$$

### Exemplo 1.2

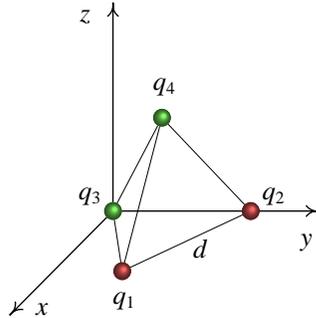
Quatro cargas pontuais  $q_1 = -12 \text{ nC}$ ,  $q_2 = -5 \text{ nC}$ ,  $q_3 = 9 \text{ nC}$  e  $q_4 = 27 \text{ nC}$  encontram-se nos vértices de um tetraedro regular de aresta  $d = 21 \text{ cm}$ . Determine a força resultante sobre a carga  $q_4$ .

**Resolução.** Os três eixos coordenados podem ser escolhidos como mostra a figura ao lado, com a carga  $q_3$  na origem, a carga  $q_2$  no eixo dos  $y$  e a carga  $q_1$  sobre o plano  $xy$ . Como tal, as posições dessas três cargas são

$$\vec{r}_3 = \vec{0}$$

$$\vec{r}_2 = d \hat{j}$$

$$\vec{r}_1 = d (\cos 30^\circ \hat{i} + \sin 30^\circ \hat{j}) = \frac{d}{2} (\sqrt{3} \hat{i} + \hat{j})$$



A figura mostra que a coordenada  $y$  do vetor  $\vec{r}_4$  é a mesma do vetor  $\vec{r}_1$ , enquanto que a coordenada  $x$  é um terço da coordenada de  $\vec{r}_1$ , já que num triângulo equilátero as bissetrizes interceptam-se a um terço da altura do triângulo:

$$\vec{r}_4 = d \left( \frac{\sqrt{3}}{6} \hat{i} + \frac{1}{2} \hat{j} \right) + z_4 \hat{k}.$$

Para calcular a altura  $z_4$  do tetraedro, calcula-se o módulo de  $\vec{r}_4$ , que deve ser igual a  $d$ ; assim sendo,

$$d^2 \left( \frac{1}{12} + \frac{1}{4} \right) + z_4^2 = d^2 \iff z_4 = \frac{\sqrt{6}d}{3}.$$

A posição da partícula 4 relativa a cada uma das outras três partículas obtém-se subtraindo  $\vec{r}_4$  menos a posição da respectiva partícula e os respectivos versores

obtem-se dividindo por  $d$ , já que as arestas do tetraedro são todas iguais a  $d$ :

$$\begin{aligned}\hat{r}_{14} &= \left( -\frac{\sqrt{3}}{3} \hat{i} + \frac{\sqrt{6}}{3} \hat{k} \right), \\ \hat{r}_{24} &= \left( \frac{\sqrt{3}}{6} \hat{i} - \frac{1}{2} \hat{j} + \frac{\sqrt{6}}{3} \hat{k} \right), \\ \hat{r}_{34} &= \left( \frac{\sqrt{3}}{6} \hat{i} + \frac{1}{2} \hat{j} + \frac{\sqrt{6}}{3} \hat{k} \right).\end{aligned}$$

As 3 forças elétricas sobre a partícula 4 calculam-se a partir da equação (1.5) e a força resultante é a soma dessas 3 forças

$$\vec{F}_4 = \frac{kq_4}{d^2} (q_1 \hat{r}_{14} + q_2 \hat{r}_{24} + q_3 \hat{r}_{34}).$$

Como a aresta do tetraedro é dada em centímetros, convém usar a constante  $k$  nas unidades seguintes:

$$k = 90 \frac{\mu\text{N} \cdot \text{cm}^2}{\text{nC}^2}.$$

O resultado obtido para a força sobre a partícula 4 é

$$\vec{F}_4 = 5.51 \left( \frac{14\sqrt{3}}{3} \hat{i} + 7\hat{j} - \frac{8\sqrt{6}}{3} \hat{k} \right) \implies F_4 = 5.51 \sqrt{\frac{196}{3} + \frac{128}{3}} = 57.26 \mu\text{N}.$$

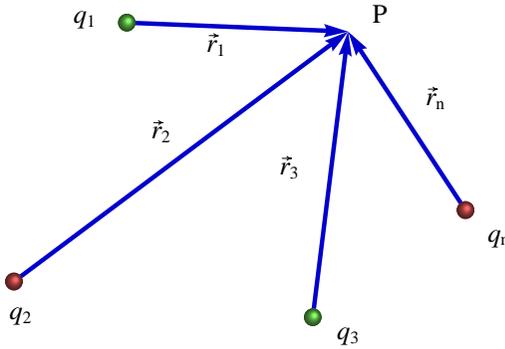
## 1.4. Campo elétrico

No exemplo 1.2, se a carga  $q_4$  fosse substituída, por exemplo, por outra carga igual  $-0.6 q_4$  a força resultante  $\vec{F}_4$  seria o mesmo vetor calculado no exemplo, multiplicado por  $-0.6$ . Em geral, quaisquer que sejam as cargas que produzem forças sobre uma partícula com carga  $q$ , colocada num ponto P do espaço, a força elétrica  $\vec{F}$  produzida sobre essa partícula é sempre diretamente proporcional ao valor da carga  $q$ . Ou seja,

$$\boxed{\vec{F} = q \vec{E}}, \quad (1.7)$$

onde o vetor  $\vec{E}$  chama-se **campo elétrico**. Um sistema de várias cargas produzem, em cada ponto do espaço, um campo elétrico  $\vec{E}$ , que pode ser determinado medindo a força elétrica  $\vec{F}$  que atua sobre uma pequena carga de prova  $q_0$  colocada nesse ponto e dividindo a força  $\vec{F}$  pelo valor de  $q_0$ .

Por exemplo, para calcular o campo elétrico produzido por um sistema de  $n$  cargas pontuais  $(q_1, \dots, q_n)$ , num ponto P, calcula-se a força exercida por cada uma



**Figura 1.5.:** Sistema de  $n$  cargas pontuais.

dessas  $n$  cargas sobre uma carga de prova  $q_0$  colocada no ponto P, como mostra a figura 1.5). A resultante dessas forças é:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \frac{k q_i q_0}{r_i^2} \hat{r}_i, \quad (1.8)$$

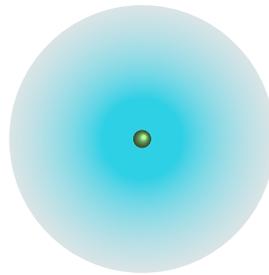
onde cada vector  $\vec{r}_i$  vai desde a carga  $q_i$  até a carga  $q_0$  e  $\hat{r}_i$  é o versor na direção e sentido desse vector. O campo obtém-se dividindo pela carga de prova  $q_0$ :

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^n \frac{k q_i}{r_i^2} \hat{r}_i. \quad (1.9)$$

A interpretação física do campo elétrico é que cada carga  $q_i$  altera o espaço à sua volta (ver figura 1.6) e essa alteração é o campo elétrico. Essa alteração do espaço pode ser detetada através da força que outras partículas com carga sentem quando colocadas nesse espaço.

O conceito de campo elétrico foi adotado pelos físicos do século XIX, para explicar como as forças eletrostáticas e gravitacionais podem atuar à distância, entre duas partículas que não estão em contacto. O campo era associado a um meio invisível e imaterial chamado éter; o campo seria como uma onda que se propaga no éter produzindo forças em outros corpos.

A teoria do éter foi abolida na física do século XX, mas o conceito do campo como alteração do espaço prevalece. Existe evidência experimental de que a ação de



**Figura 1.6.:** Campo de uma carga pontual.

uma partícula sobre outra não ocorre instantaneamente, mas propaga-se desde uma partícula até a outra à velocidade da luz. Se, por exemplo, neste instante uma grande quantidade de carga negativa saísse do Sol, ficando este com carga total positiva, as forças produzidas por essas cargas só seriam detetadas na Terra 8.5 minutos mais tarde, o tempo que o campo demora a deslocar-se do Sol até a Terra, à velocidade da luz.

### Exemplo 1.3

O valor da força sobre uma carga de prova de 5 nC, num determinado ponto, é igual a  $2 \times 10^{-4}$  N e tem a direção do eixo dos  $x$ . Calcule o campo elétrico nesse ponto. Qual será a força sobre um eletrão colocado nesse mesmo ponto?

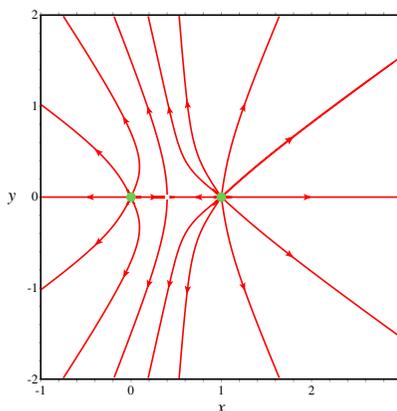
**Resolução.** A da força calcula-se o campo elétrico no ponto

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} = \frac{2 \times 10^{-4} \text{ N}}{5 \text{ nC}} \hat{i} = (4 \times 10^4 \hat{i}) \frac{\text{N}}{\text{C}}.$$

A força sobre um eletrão no mesmo ponto será

$$\vec{F} = e \vec{E} = (-1.60 \times 10^{-19} \text{ C} \cdot 4 \times 10^4 \hat{i}) \frac{\text{N}}{\text{C}} = (-6.4 \times 10^{-15} \hat{i}) \text{ N}.$$

## 1.5. Linhas de campo elétrico



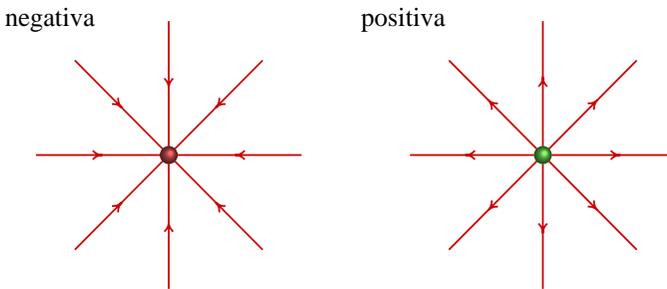
**Figura 1.7.:** Linhas de campo elétrico de duas cargas pontuais.

O campo elétrico pode ser representado por vetores que indicam a direção e sentido do vetor  $\vec{E}$  em vários pontos do espaço. Outra forma de representar o campo é por meio de curvas que seguem a direção do campo com uma seta a indicar o sentido;

em cada ponto de uma dessas linhas de campo, o campo é o vetor tangente no sentido indicado pela seta. A figura 1.7 mostra as linhas de campo produzidas por duas cargas pontuais de 4 nC e 9 nC colocadas na origem, e no ponto  $x = 1, y = 0$ .

As linhas de campo elétrico têm várias propriedades

- Na vizinhança de uma carga pontual positiva há linhas que saem em todas as direções e na vizinhança de uma carga negativa há linhas que entram em todas as direções (ver figura 1.8).
- Duas linhas de campo nunca se cruzam; num ponto de cruzamento o campo teria duas direções diferentes, o que não é possível.
- Nos pontos isolados, onde não existem cargas pontuais, mas o campo elétrico é nulo, existem linhas de campo que partem desse ponto e linhas de campo que se aproximam desse ponto.



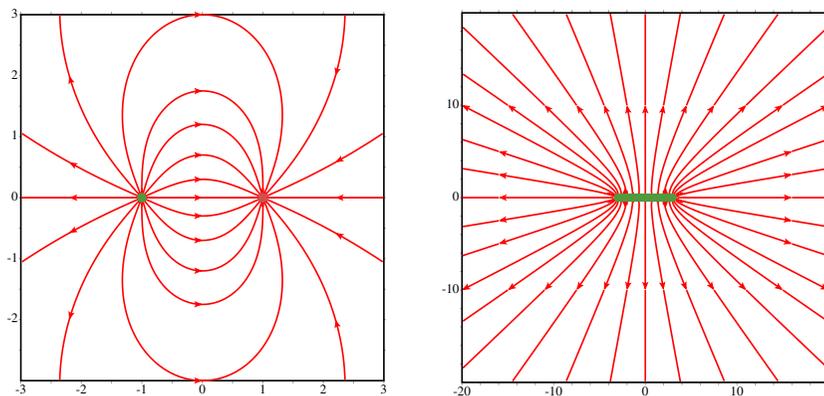
**Figura 1.8.:** Campo elétrico de uma carga negativa (esquerda) e de uma carga positiva (direita).

No exemplo apresentado na figura 1.7, há linhas a sair em todas direções nos pontos  $(x, y) = (0, 0)$  e  $(1, 0)$ , onde existem cargas positivas. Existe um único ponto onde o campo total é nulo, no segmento entre as duas cargas onde os módulos dos campos das duas cargas são iguais:

$$\frac{k q_1}{r_1^2} = \frac{k q_2}{r_2^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{r_2}{r_1} = \sqrt{\frac{q_2}{q_1}} = \frac{3}{2} \quad (1.10)$$

e como a soma das duas distâncias é  $r_1 + r_2 = 1$ ,  $r_1$  é igual a 0.4 e as coordenadas do ponto de campo nulo são  $(0.4, 0)$ . As duas linhas de campo ao longo do eixo dos  $x$ , no segmento entre  $x = 0$  e  $x = 1$ , aproximam-se assintoticamente desse ponto de campo nulo e existem outras duas linhas de campo que partem do ponto para os dois quadrantes onde  $y$  é positivo e onde  $y$  é negativo.

Outro exemplo são as linhas de campo de um **dipolo elétrico**, formado por duas cargas iguais de sinais opostos. As linhas de campo são apresentadas no lado esquerdo da figura 1.9.



**Figura 1.9.:** Campo elétrico criado por um dipolo (esquerda) e por um sistema de 7 cargas sobre o segmento de reta entre  $x = -3$  e  $x = 3$  (direita).

Uma distribuição contínua de cargas pode ser aproximada por uma série de cargas pontuais. Por exemplo, se existem cargas distribuídas uniformemente no segmento do eixo dos  $x$  entre  $x = -3$  e  $x = 3$ , pode-se imaginar um sistema de cargas pontuais, equidistantes, sobre o segmento entre  $x = -3$  e  $x = 3$ . O lado direito da figura 1.9 mostra as linhas de campo obtidas com 7 cargas pontuais.

Em qualquer sistema de duas cargas cuja soma não seja zero, existe um ponto de campo nulo onde terminam e saem linhas de campo. As linhas de campo elétrico dão também alguma ideia da grandeza relativa do campo elétrico. O campo é mais forte onde a densidade de linhas for maior e mais fraco onde as linhas estiverem mais distanciadas.

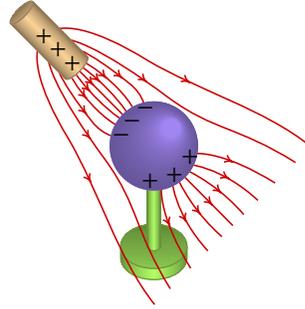
## 1.6. Condutores e Isoladores

Em alguns materiais, como nos metais, o elétron mais externo de alguns átomos consegue libertar-se do átomo e deslocar-se livremente pelo material; existe assim uma “nuvem” densa de elétrons livres (elétrons de condução), com densidade constante se o material for homogêneo. Esse tipo de material é designado de **condutor**. Um material que não seja condutor diz-se **isolador**; dentro de um isolador, as cargas elétricas não se podem deslocar livremente.

Se um condutor é colocado numa região onde existe campo elétrico, como a nuvem eletrônica de condução tem carga negativa, desloca-se no sentido oposto às linhas de campo. O deslocamento dos elétrons de condução faz surgir carga negativa num extremo (excesso de elétrons) e carga positiva no extremo oposto (falta de elétrons). Se a carga total do condutor é nula, o valor absoluto dessas cargas nos extremos será igual. Essas cargas de sinais opostos nos extremos opostos do condutor produzem um campo elétrico interno, no sentido oposto ao campo externo e quando as cargas

acumuladas nos extremos sejam suficientemente elevadas, dentro do condutor os dois campos se anulam e o movimento dos elétrons de condução cessa.

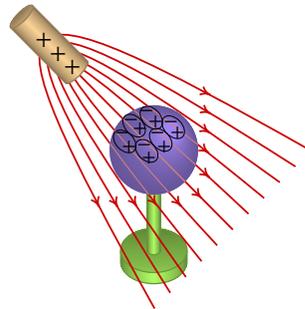
A figura 1.10 mostra uma barra com carga positiva, colocada na proximidade de uma esfera condutora montada num suporte isolador; a nuvem eletrônica de condução na esfera aproxima-se da barra, deixando carga positiva na região mais afastada da barra e a mesma quantidade de carga negativa na região mais próxima da barra. Se o suporte não fosse isolador, entravam no condutor elétrons do suporte e as cargas positivas indicadas na figura desapareceriam.



**Figura 1.10.:** Condutor num campo elétrico.

Se a barra tivesse carga negativa, em vez de positiva, as posições das cargas positivas e negativas na esfera seriam trocadas. Uma vez acumuladas cargas de sinais opostos nos extremos da esfera, o campo elétrico total dentro da esfera é nulo; como tal, as linhas de campo não penetram na esfera e os elétrons de condução dentro da esfera não sentem qualquer força elétrica. Nos dois casos (barra com carga positiva ou negativa), as cargas na superfície da esfera mais próxima da barra são atraídas para a barra e essa atração é maior do que a repulsão sobre as cargas na superfície mais afastada da barra. Assim, qualquer objeto externo com carga de qualquer sinal produz sempre uma força atrativa nos condutores com carga total nula.

Se a mesma experiência é realizada com uma esfera isoladora (figura 1.11), não há acumulação de cargas nos extremos; assim, o campo no interior da esfera não se anula e todas as moléculas dentro dela são **polarizadas**, isto é, a sua própria nuvem eletrônica desloca-se no seu interior da molécula, no sentido oposto do campo. No caso apresentado na figura (barra com carga positiva), a nuvem eletrônica das moléculas deixa de estar centrada no mesmo ponto das cargas positivas, passando a estar centrada num ponto mais próximo da barra; cada átomo torna-se um pequeno **dipolo elétrico**, que é um sistema com carga total nula, mas com as cargas positivas e negativas em pontos diferentes.



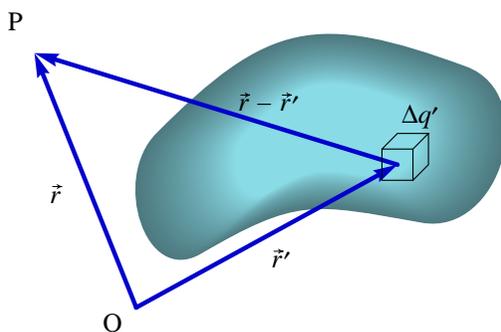
**Figura 1.11.:** Isolador num campo elétrico.

A figura 1.11 mostra também algumas das moléculas da esfera isoladora, polarizadas formando dipolos. O lado dos dipolos que está mais próximo da barra com

carga tem sempre carga de sinal oposto ao da carga na barra. Como consequência, a força resultante em cada dipolo é atrativa e a sobreposição de todas essas forças produz uma força resultante atrativa entre a barra e a esfera. Ou seja, entre um objeto com carga de qualquer sinal e um material isolador sem carga surge sempre força elétrica atrativa.

## 1.7. Distribuições contínuas de carga

Para calcular o campo elétrico num ponto P, com vetor posição  $\vec{r}$ , produzido por uma carga distribuída continuamente dentro de uma região do espaço, divide-se essa região em  $n$  sub-regiões, com cargas suficientemente pequenas para que possam ser consideradas cargas pontuais. Seja o vetor posição de cada uma dessas regiões  $\vec{r}'$  e a carga nessa região  $\Delta q'$ . O vetor desde a região  $i$  até o ponto P é  $\vec{r}_i = \vec{r} - \vec{r}'$  e o versor na direção e sentido desse vetor é  $\hat{r}_i = (\vec{r} - \vec{r}')/|\vec{r} - \vec{r}'|$  (ver figura 1.12).



**Figura 1.12.:** Carga distribuída numa região e pequena sub-região com carga  $\Delta q'$ .

Substituindo na expressão (1.9) do campo elétrico devido a um sistema de cargas pontuais, obtém-se uma expressão aproximada para o campo elétrico:

$$\vec{E} \approx \sum_{i=1}^n \frac{k \Delta q'}{r_i^2} \hat{r}_i = k \sum_{i=1}^n \frac{\Delta q' (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \quad (1.11)$$

A aproximação torna-se exata no limite  $n \rightarrow \infty$ , de forma a tornar todas as cargas  $\Delta q'$  infinitesimalmente pequenas ( $dq'$ ) e a soma nesse limite define um integral:

$$\vec{E} = k \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\Delta q' (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = k \int_{\text{região}} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dq'. \quad (1.12)$$

O integral será integral de linha, de superfície ou de volume, conforme a carga estiver distribuída numa curva, superfície ou volume, respectivamente.

### 1.7.1. Carga distribuída numa curva

No caso de cargas distribuídas ao longo de um fio (figura 1.13), a carga diferencial  $dq'$  no pedaço de fio entre os pontos nas posições  $\vec{r}'$  e  $\vec{r}' + d\vec{r}'$  é diretamente proporcional ao comprimento  $ds'$  desse pedaço de fio:

$$dq' = \lambda(\vec{r}') ds', \quad (1.13)$$

onde  $\lambda(\vec{r}')$  é uma função que depende da posição no fio, chamada **carga linear**, que é igual à carga por unidade de comprimento do fio.

A equação vetorial de curva contínua é uma expressão para  $\vec{r}'$  em função de um único parâmetro real  $u$ , que determina a posição dos pontos na curva. Cada possível valor do parâmetro  $u$  determina a posição de um ponto da curva e  $u$  pode ser, por exemplo, um ângulo, um comprimento ou um instante de tempo;  $d\vec{r}'$  é a variação do vetor  $\vec{r}'$  devida a o aumento infinitesimal do parâmetro  $u$  e é sempre tangente à curva. O comprimento infinitesimal de arco,  $ds'$ , é igual ao módulo do vetor  $d\vec{r}'$ . O integral em (1.12) é um integral de linha ao longo da curva  $C$  ao longo do fio:

$$\vec{E} \approx k \int_C \lambda(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} ds'. \quad (1.14)$$

Trata-se de uma aproximação, porque o fio não é uma curva mas sim um sólido. A aproximação será mais exata quanto menor for a secção transversal do fio. Realmente existem muitos percursos possíveis dentro do fio, sendo necessário usar um percurso médio para calcular o integral de linha.

#### Exemplo 1.4

Um anel circular de raio  $a$  tem carga total  $Q$ , distribuída uniformemente. Determine a expressão do campo elétrico ao longo do eixo do anel.

**Resolução; método 1.** A carga linear do anel é

$$\lambda = \frac{Q}{2\pi a}.$$

Sejam o eixo dos  $x$  o eixo do anel, o eixo dos  $y$  no plano do anel, tal como mostra a figura seguinte:

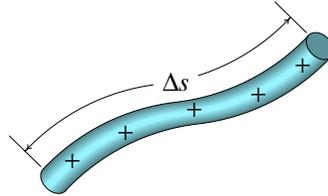
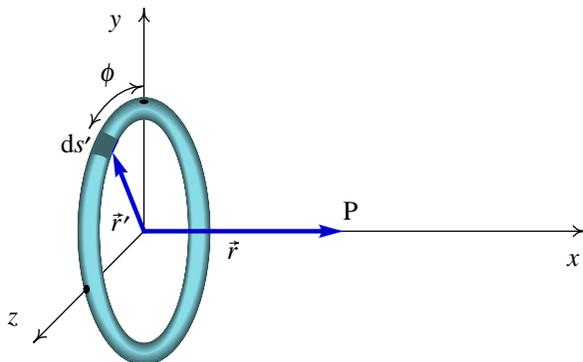


Figura 1.13.: Fio com carga.



Em coordenadas polares, os pontos sobre o anel são os pontos da circunferência com equação vetorial

$$\vec{r}' = a \cos \phi \hat{j} + a \sin \phi \hat{k},$$

com  $0 \leq \phi < 2\pi$  (o parâmetro  $\phi$  será a variável de integração). É claro que o comprimento diferencial de arco na circunferência de raio  $a$  é igual a

$$ds' = a d\phi,$$

resultado este que pode ser obtido também calculando o módulo do vetor

$$d\vec{r}' = (-a \sin \phi \hat{j} + a \cos \phi \hat{k}) d\phi.$$

O vetor desde um ponto qualquer do anel até o ponto P é

$$\begin{aligned} \vec{r} - \vec{r}' &= x \hat{i} - a \cos \phi \hat{j} - a \sin \phi \hat{k} \\ |\vec{r} - \vec{r}'|^3 &= [(\vec{r} - \vec{r}') \cdot (\vec{r} - \vec{r}')]^{3/2} = (x^2 + a^2)^{3/2} \end{aligned}$$

e substituindo na equação (1.14) obtém-se

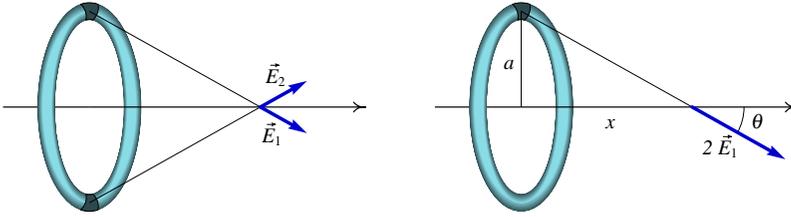
$$\vec{E} = \frac{kQ}{2\pi(x^2 + a^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} (x \hat{i} - a \cos \phi \hat{j} - a \sin \phi \hat{k}) d\phi.$$

Os integrais do seno e do cosseno, entre 0 e  $2\pi$  são nulos e, como tal, o campo em P é

$$\vec{E} = \frac{kQx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \hat{i}. \quad (1.15)$$

Ou seja, em qualquer ponto do eixo do anel, o campo elétrico aponta na direção desse eixo, afastando-se do anel se a carga  $Q$  for positiva ou aproximando-se dele se for negativa.

**Resolução; método 2.** A figura seguinte mostra os campos produzidos por dois segmentos infinitesimais do anel, que se encontram nos lados opostos dum mesmo diâmetro do anel.



As componentes desses dois campos perpendiculares ao eixo do anel anulam-se e as componentes paralelas ao anel somam-se. Assim sendo, as cargas nesses dois segmentos podem ser colocadas no mesmo lado do anel, produzindo um campo duas vezes maior que o campo do primeiro segmento e a projeção desse campo ao longo do eixo do anel é igual à resultante dos dois campos iniciais.

O mesmo procedimento pode ser feito com todos os segmentos do anel e, como a componente do campo ao longo do eixo será a mesma independentemente da posição do segmento no anel, todas as cargas do anel podem ser concentradas numa única carga pontual  $Q$  colocada na posição do lado direito na figura acima e o campo total será a projeção do campo produzido por essa carga pontual ao longo do eixo.

O quadrado da distância desde essa carga pontual  $Q$  até o ponto P é igual a  $x^2 + a^2$  e o módulo do campo elétrico devido a essa carga é:

$$E_Q = \frac{k Q}{x^2 + a^2} .$$

O módulo do campo do anel obtém-se multiplicando pelo cosseno do ângulo  $\theta$ , que é igual a  $x$  sobre  $\sqrt{x^2 + a^2}$

$$E = \frac{k Q x}{(x^2 + a^2)^{3/2}}$$

e a expressão vetorial do campo obtém-se multiplicando por  $\hat{i}$ .

### 1.7.2. Carga distribuída numa superfície

Quando a carga está distribuída continuamente numa lâmina fina (ver figura 1.14), o integral do campo pode ser aproximado por um integral de superfície. Nesse caso, a carga infinitesimal  $dq'$  numa região da lâmina está relacionada com a **carga superficial**  $\sigma$ :

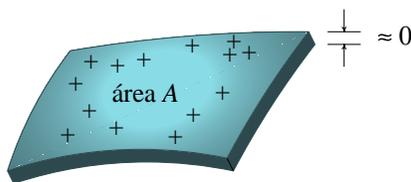
$$dq' = \sigma (\vec{r}') dA' , \quad (1.16)$$

onde  $dA'$  é o elemento diferencial de área da região. E  $\sigma (\vec{r}')$  é a carga por unidade de superfície na posição  $\vec{r}'$  sobre a lâmina.

Assim sendo, a expressão (1.12) para o campo conduz a um integral de superfície sobre a superfície  $S$  da lâmina:

$$\vec{E} = k \iint_S \sigma(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dA' . \quad (1.17)$$

O integral de superfície para o campo é uma aproximação já que as partículas com carga não podem ocupar uma superfície sem espessura, mas sim um volume no espaço. A aproximação será mais exacta quanto menor for a espessura da camada onde estão as cargas (ver figura 1.14).



**Figura 1.14.:** Distribuição superficial de carga numa região de área  $A$ .

O integral é um integral duplo, em ordem aos dois parâmetros que sejam usados para definir a superfície  $S$  parametricamente. A equação vetorial da uma expressão para o vetor posição  $\vec{r}'$  em função de dois parâmetros reais  $u$  e  $v$ . O elemento diferencial de superfície  $dA'$  é igual à área da superfície descrita pelo vetor  $\vec{r}'$  quando  $u$  aumenta para  $u + du$  e  $v$  aumenta para  $v + dv$ .

No próximo capítulo mostra-se como resolver integrais de superfície, determinando o elemento diferencial de superfície para a partir da equação vetorial paramétrica. O estudo neste capítulo limita-se unicamente a os casos de superfícies planas, em que a expressão de  $dA$  é mais simples.

Quando a superfície é plana, definem-se dois dos eixos cartesianos, por exemplo  $x$  e  $y$ , sobre a superfície e o elemento diferencial de área é  $dA' = dx' dy'$ ; por vezes é mais útil usar coordenadas polares  $r$  e  $\theta$ , como no caso do exemplo seguinte.

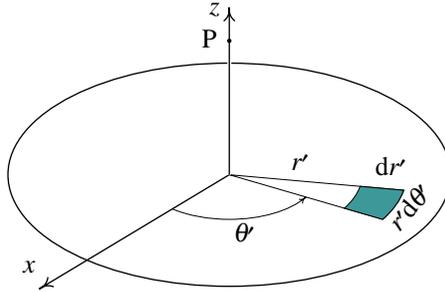
### Exemplo 1.5

Determine a expressão do campo elétrico ao longo do eixo de um disco plano de raio  $a$  e com carga total  $Q$ , distribuída uniformemente sobre a sua superfície do disco.

**Resolução.** Como a carga está distribuída uniformemente sobre a área do disco,  $\pi a^2$ , a carga superficial é constante e igual a:

$$\sigma = \frac{Q}{\pi a^2} .$$

Os pontos do disco definem-se facilmente em coordenadas polares, escolhendo os eixos  $x$  e  $y$  sobre o disco, com origem no centro deste, tal como mostra a figura seguinte



Em função das coordenadas polares na figura, o disco é formado pelos pontos com  $r'$  e  $\theta'$  nos intervalos  $0 \leq r' \leq a$  e  $0 \leq \theta' < 2\pi$ . A área infinitesimal  $dA$  é a área da região delimitada pelos aumentos diferenciais  $dr'$  e  $d\theta'$  dos dois parâmetros. Como  $dR$  e  $d\theta$  são muito pequenos,  $dA$  é aproximadamente um retângulo de lados  $dr'$  e  $r' d\theta'$ :

$$dA = r' dr' d\theta' . \quad (1.18)$$

O vetor posição de um ponto P sobre o eixo do disco, a uma distância  $z$ , é

$$\vec{r} = z \hat{k}$$

e a posição de um ponto qualquer dentro do disco é

$$\vec{r}' = r' \cos \theta' \hat{i} + r' \sin \theta' \hat{j} .$$

Substituindo na Equação (1.17) obtém-se

$$\vec{E} = \frac{kQ}{\pi a^2} \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{z \hat{k} - r' \cos \theta' \hat{i} - r' \sin \theta' \hat{j}}{(r'^2 + z^2)^{3/2}} r' dr' d\theta' .$$

Calculando primeiro os integrais em  $\theta'$ , tem-se que os integrais do seno e o cosseno, entre 0 e  $2\pi$ , são nulos e o integral do termo que não depende de  $\theta'$  é igual a  $2\pi$ , logo

$$\vec{E} = \frac{2kQ}{a^2} \int_0^a \frac{z r' \hat{k}}{(r'^2 + z^2)^{3/2}} dr' .$$

A distância  $z$  é constante dentro do integral e a primitiva é

$$z (r'^2 + z^2)^{-1/2} .$$

Assim sendo, o resultado final é

$$\vec{E} = \frac{2kQ}{a^2} \left( \frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right) \hat{k}. \quad (1.19)$$

A fração  $z/|z|$  é igual a 1 ou  $-1$  consoante  $z$  for positiva ou negativa, respetivamente.

### 1.7.3. Carga distribuída num volume

No caso mais geral, a carga encontra-se distribuída dentro de um volume. A carga infinitesimal dentro de uma sub-região com volume infinitesimal é

$$dq' = \rho(\vec{r}') dx' dy' dz', \quad (1.20)$$

onde  $\rho(\vec{r}')$  é a **carga volúmica** no ponto na posição  $\vec{r}'$ , ou seja, a carga por unidade de volume.

A equação (1.12) conduz a um integral triplo

$$\vec{E} = k \iiint_V \rho(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dx' dy' dz', \quad (1.21)$$

onde  $V$  é a região onde há carga.

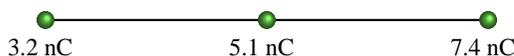
Esse integral triplo costuma ser difícil de calcular analiticamente; os casos em que é possível obter um resultado analítico acontecem quando existe alguma simetria na forma como a carga está distribuída no espaço. Nesses casos, existem outros métodos mais simples de determinar a expressão do campo sem ser preciso calcular o integral triplo na equação anterior. Esses métodos serão estudados nos 3 próximos capítulos. Como tal, neste capítulo não será dado nenhum exemplo de utilização dessa equação.

## Perguntas

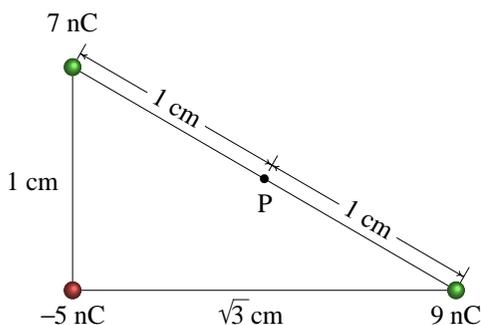
- Uma barra com carga positiva é colocada perto de uma folha de papel com carga nula. A força que a barra exerce sobre o papel é então:
  - Atrativa.
  - Repulsiva.
  - Nula.
  - Atrativa ou repulsiva, conforme a barra seja condutora ou isoladora.
  - Atrativa se o papel estiver seco ou nula se estiver húmido.
- O que distingue um condutor elétrico de um isolador é:
  - Ter mais elétrons do que prótons.
  - Ter mais prótons do que elétrons.
  - Ter mais elétrons do que o isolador.
  - Ter moléculas que se deformam mais facilmente.
  - Ter alguns elétrons livres.
- Colocam-se três cargas no eixo dos  $x$ :  
 $q_1 = -6.0 \mu\text{C}$ , em  $x = -2.0 \text{ m}$ ,  
 $q_2 = +4.0 \mu\text{C}$ , em  $x = 0$ ,  
 $q_3 = -6.0 \mu\text{C}$ , em  $x = +2.0 \text{ m}$ .  
Determine a intensidade da força elétrica resultante sobre  $q_3$ .
  - $2.4 \times 10^{-2} \text{ N}$
  - $1.7 \times 10^{-2} \text{ N}$
  - 0
  - $2.7 \times 10^{-2} \text{ N}$
  - $3.4 \times 10^{-2} \text{ N}$
- Três esferas idênticas e condutoras, isoladas, uma delas com carga  $Q$  e as outras duas sem carga, colocam-se em contacto, cada uma delas tocando as outras duas e a seguir separam-se. Qual das seguintes afirmações é correta?
  - Todas as esferas ficam sem carga.
  - Cada uma delas fica com carga  $Q$ .
  - Duas delas ficam com carga  $Q/2$  e outra com carga  $-Q/2$ .
  - Cada uma delas fica com carga  $Q/3$ .
  - Uma delas fica com carga  $Q$  e outra com carga  $-Q$ .
- Uma esfera metálica montada num suporte isolador liga-se à terra com um fio condutor e a seguir aproxima-se uma barra de plástico com carga positiva. A ligação da esfera à terra é retirada e a seguir afasta-se a barra de plástico. Com que carga fica a esfera metálica?
  - Nula.
  - Positiva.
  - Negativa.
  - Diferente de zero, mas não é possível saber o sinal.
  - Positiva num extremo e negativa no extremo oposto.

## Problemas

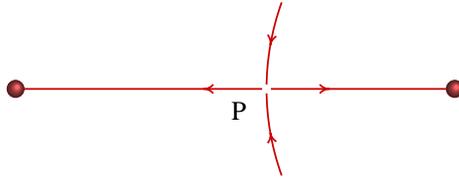
1. A soma dos valores de duas cargas pontuais  $q_1$  e  $q_2$  é  $q_1 + q_2 = 10 \mu\text{C}$ . Quando estão afastadas 3 m entre si, o módulo da força exercida por cada uma delas sobre a outra é 24 mN. Determine os valores de  $q_1$  e  $q_2$ , se: (a) Ambas cargas são positivas. (b) Uma das cargas é positiva e a outra negativa.
2. O campo elétrico na atmosfera terrestre tem intensidade de aproximadamente 150 N/C e aponta na direção e sentido do centro da Terra. Calcule a razão entre o peso de um elétron e o módulo da força elétrica oposta exercida pelo campo elétrico da atmosfera (a massa do elétron é  $9.109 \times 10^{-31}$  kg e admita que a aceleração da gravidade é  $9.8 \text{ m/s}^2$ ).
3. Três cargas pontuais estão ligadas por dois fios isoladores de 2.65 cm cada (ver figura). Calcule a tensão em cada fio.



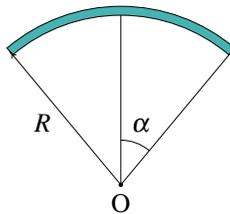
4. Um sistema de três cargas pontuais está em equilíbrio (a força eletrostática sobre cada carga é zero). Sabendo que duas das cargas são  $q$  e  $2q$ , separadas por uma distância  $d$ , calcule o valor e a posição da terceira carga.
5. Mostre que o campo elétrico sobre o eixo de um anel com carga distribuída uniformemente é máximo nos pontos  $x = +a/\sqrt{2}$  e  $x = -a/\sqrt{2}$ , onde  $x$  é medido desde a superfície do disco. Faça um gráfico do módulo do campo em função de  $x$ .
6. Calcule a força elétrica que actua sobre cada uma das cargas representadas na figura e o campo elétrico no ponto P.



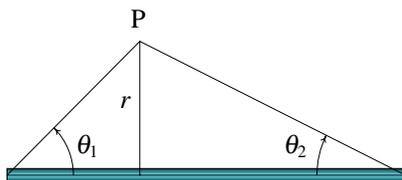
7. A figura mostra algumas linhas de campo elétrico de um sistema de duas partículas com carga. O ponto P encontra-se a 4 cm da carga  $q_1$  e a 3 cm da carga  $q_2$ .



- (a) Qual é o sinal das cargas?
- (b) Qual é a relação ( $q_1/q_2$ ) entre elas?
- (c) Complete o desenho das linhas de campo.
- (d) Se  $q_2 = -4.5 \text{ nC}$ , calcule a força entre as duas cargas.
8. Um fio não-condutor no plano  $xy$ , forma um círculo de raio  $a$  com centro na origem. O fio tem carga linear não-uniforme  $\lambda = \lambda_0 \sin \theta$ , onde  $\theta$  é o ângulo em coordenadas polares. Calcule o campo elétrico na origem.
9. Um núcleo de hélio (também chamado **partícula alfa**) é formado por dois prótons e dois nêutrons. A força eletrostática entre os prótons é repulsiva e muito forte, pois a distância entre eles é muito pequena (aproximadamente  $10^{-15} \text{ m}$ ). A estabilidade do núcleo é devida à existência de uma outra força entre prótons e nêutrons, chamada **força forte**. Para ter uma ideia da ordem de grandeza da força forte, calcule a força eletrostática entre os dois prótons no núcleo de hélio.
10. Usando o resultado do Exemplo 1.5 para o campo de um disco plano, calcule o campo elétrico produzido por um plano infinito, com carga superficial  $\sigma$  constante.
11. Um disco de 8 cm de raio, tem uma carga superficial  $\sigma = ar^2$ , onde  $r$  é a distância desde o centro, e  $a$  uma constante igual a  $4 \mu\text{C}/\text{m}^4$ . Calcule a carga total do disco, e o campo elétrico ao longo do eixo.
12. Um fio fino tem carga linear uniforme  $\lambda$  e forma um arco circular que subtende um ângulo de  $2\alpha$ , conforme indicado na figura. Mostre que o módulo do campo elétrico no ponto O é dado pela expressão  $E = 2k\lambda \sin \alpha / R$ .



13. Um fio retilíneo tem uma carga linear  $\lambda$  constante. Determine a expressão do campo elétrico em qualquer ponto P em função da distância ao fio,  $r$  e os ângulos  $\theta_1$  e  $\theta_2$  definidos na figura. Calcule o valor limite do campo quando o fio for infinito. (Sugestão: defina o eixo  $x$  na direção do fio, com origem em O e o eixo  $y$  na perpendicular que passa por P.)



## Respostas

**Perguntas:** 1. A. 2. E. 3. E. 4. D. 5. C.

### Problemas

- (a)  $6 \mu\text{C}$ , e  $4 \mu\text{C}$  (b)  $12 \mu\text{C}$ , e  $-2 \mu\text{C}$ .
- A força elétrica é  $2.7 \times 10^{12}$  vezes maior que o peso.
- A tensão no fio do lado esquerdo é  $285 \mu\text{N}$  e no fio do lado direito  $560 \mu\text{N}$ .
- A terceira carga é  $-0.343 q$ , e encontra-se entre as outras duas cargas, a uma distância  $0.414 d$  da carga  $q$ .
- Com origem na carga  $q_1 = -5 \text{ nC}$ , eixo dos  $x$  na direção de  $q_2 = 9 \text{ nC}$ , e eixo dos  $y$  na direção de  $q_3 = 7 \text{ nC}$ , as forças são:  

$$\vec{F}_1 = (1.35 \hat{i} + 3.15 \hat{j}) \text{ mN}$$

$$\vec{F}_2 = (-0.12 \hat{i} - 0.71 \hat{j}) \text{ mN}$$

$$\vec{F}_3 = (-1.23 \hat{i} - 2.44 \hat{j}) \text{ mN}$$
 O campo em P é:  $(-0.545 \hat{i} - 0.135 \hat{j}) \text{ N}/\mu\text{C}$
- (a) Negativo. (b)  $q_1/q_2 = 16/9$ . (d)  $66 \mu\text{N}$ .
- $\vec{E} = -\frac{\pi k \lambda_0}{a} \hat{j}$ .
- $230.4 \text{ N}$ .
- $E = 2 \pi k \sigma$ , perpendicular ao plano.
- $257 \text{ pC}$ .  $\vec{E} = \frac{72 \pi x}{5} \left( \frac{x^2 + 32}{\sqrt{x^2 + 64}} - |x| \right) \hat{i}$  ( $x$  em cm e  $E$  em N/C).
- $\vec{E} = \frac{k \lambda}{r} ((\sin \theta_2 - \sin \theta_1) \hat{i} + (\cos \theta_1 + \cos \theta_2) \hat{j})$   
 O campo do fio infinito é:  $\vec{E} = \frac{2k \lambda}{r} \hat{j}$ .

## 2. Fluxo elétrico



**Carl Friedrich Gauss (1777–1855)**

Gauss é considerado um dos maiores matemáticos da história. Nasceu em 1777 em Brunswick, Alemanha, e desde cedo mostrou grande habilidade para a matemática. São muitas as suas contribuições nos campos da teoria dos números, dos números complexos, da geometria e da álgebra. A sua tese de doutoramento foi a primeira demonstração do teorema fundamental da álgebra. No domínio da astronomia, Gauss interessou-se pelo estudo das órbitas planetárias e pela determinação da forma da Terra, e foi diretor do observatório astronómico da Universidade de Göttingen. Desenvolveu um método para calcular, com grande precisão, os parâmetros de uma órbita planetária a partir de apenas três observações da posição do planeta. A partir de 1831, e em conjunto com o físico Wilhelm Weber, desenvolveu o estudo teórico e experimental do eletromagnetismo. A contribuição de Gauss para a determinação do campo magnético terrestre é reconhecida na unidade de campo magnético que leva o seu nome.

## 2.1. Fluxo elétrico

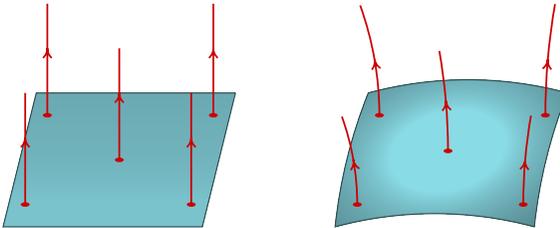
No caso das distribuições contínuas de carga com simetria plana, esférica ou cilíndrica, é possível determinar a expressão do campo elétrico aplicando a lei de Gauss. Para enunciar a lei de Gauss vai-se introduzir primeiro o conceito de fluxo elétrico.

No caso particular de uma superfície perpendicular às linhas de campo elétrico e quando o módulo do campo é constante em todos os pontos dessa superfície, define-se o fluxo elétrico igual ao produto do módulo do campo e da área da superfície

$$\Psi = E A . \quad (2.1)$$

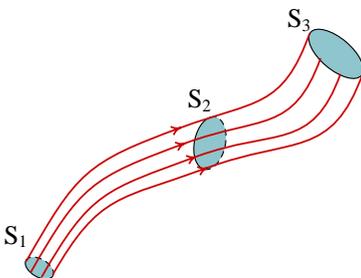
A figura 2.1 mostra dois exemplos em que o campo é perpendicular à superfície. Se a superfície é perpendicular às linhas de campo, mas o módulo do campo não é constante em toda a superfície, divide-se a superfície em sub-regiões com área suficientemente pequena para que o módulo do campo possa ser considerado aproximadamente constante em cada sub-região; o fluxo total através da superfície é igual à soma dos fluxos em todas as sub-regiões:

$$\Psi \approx \sum_{i=1}^n E_i \Delta A_i . \quad (2.2)$$



**Figura 2.1.:** Superfícies perpendiculares às linhas de campo.

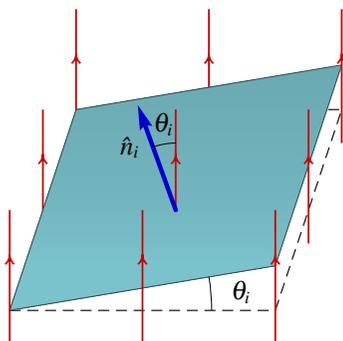
Define-se o fluxo elétrico por analogia com um fluido. No escoamento de um fluido, as linhas de campo são tangentes à velocidade do fluido em cada ponto e o fluxo do campo de velocidades é igual ao volume de fluido que passa através da superfície, por unidade de tempo.



**Figura 2.2.:** Tubo de fluxo.

O volume delimitado pelas linhas de campo que passam por uma curva fechada, por exemplo, a fronteira da superfície  $S_1$  na figura 2.2, chama-se **tubo de fluxo**. Se o fluido é incompressível e não existem no tubo pontos onde entra ou sai fluido, então o fluxo é o mesmo em todas as secções transversais do tubo, independentemente da curvatura ou inclinação dessas secções. Na figura 2.2, o fluxo é igual através de  $S_1$ ,  $S_2$  e  $S_3$ .

Na equação (2.2), se numa sub-região  $i$  as linhas de campo não são perpendiculares à superfície mas estão inclinadas um ângulo  $\theta_i$  em relação ao vetor  $\hat{n}_i$  normal à superfície, como mostra a figura 2.3, o fluxo através da área  $\Delta A_i$  é igual ao fluxo através da projeção dessa área no plano perpendicular às linhas de campo, ou seja através da superfície a tracejado na figura 2.3. Isto é devido a que a superfície  $A_i$  e a superfície a tracejado fazem parte do mesmo tubo de fluxo, formado pelas linhas de campo que passam pela fronteira das duas superfícies.



**Figura 2.3.:** Versor normal  $\hat{n}_i$  a uma superfície e projeção da superfície no plano perpendicular às linhas de campo.

A área da superfície a tracejado é  $\Delta A_i \cos \theta_i$  e, como essa superfície é perpendicular às linhas de campo, pode aplicar-se a expressão (2.1) para calcular o fluxo:  $\Delta \Psi_i = E_i \cos \theta_i \Delta A_i$ . Assim sendo, o fluxo total numa superfície qualquer que não seja perpendicular às linhas de campo é:

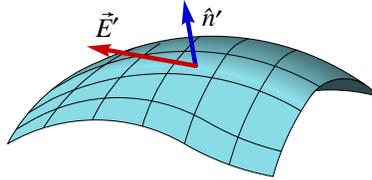
$$\Psi \approx \sum_{i=1}^n E_i \cos \theta_i \Delta A_i . \quad (2.3)$$

Costuma definir-se o vetor  $\vec{\Delta A}_i$ , na direção e sentido do versor  $\hat{n}_i$ , normal à superfície, e com módulo igual à área da superfície,  $\Delta A_i$ . Assim sendo, o produto  $E_i \cos \theta_i \Delta A_i$  é igual ao produto escalar  $\vec{E}_i \cdot \vec{\Delta A}_i$ . A aproximação (2.3) torna-se exata no limite em que as sub-regiões são infinitesimalmente pequenas, o somatório converte-se num integral e  $\vec{E}_i \cdot \vec{\Delta A}_i$  escreve-se  $\vec{E}' \cdot d\vec{A}'$ , em que a plica indica que os vetores são calculados sobre os pontos da superfície, como mostra a figura 2.4.

Concluindo, o fluxo dum campo elétrico  $\vec{E}$  através de uma superfície  $S$  é dado pela expressão:

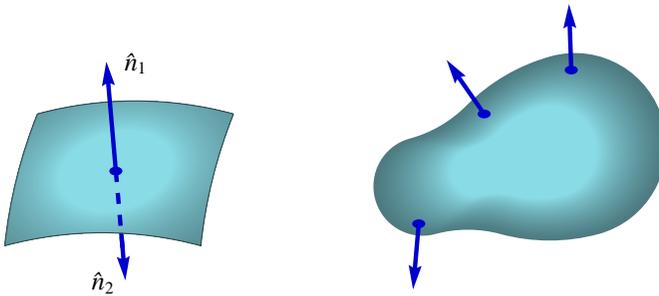
$$\Psi = \iint_S \vec{E}' \cdot d\vec{A}' . \quad (2.4)$$

O integral é um integral duplo, porque  $d\vec{A}'$  depende das diferenciais dos dois parâmetros que sejam usados para definir a superfície.



**Figura 2.4.:** Campo elétrico e vetor infinitesimal de área numa superfície.

Em cada ponto da superfície existem dois sentidos opostos em que é possível definir o vetor  $d\vec{A}'$ , normal à superfície, como mostra a figura 2.5. O sentido escolhido determina o sentido do fluxo calculado com o integral. Os fluxos nos dois sentidos opostos são iguais em valor absoluto, mas com diferentes opostos. No caso de uma superfície fechada, é habitual definir o vetor  $d\vec{A}'$  apontando para fora da superfície, de maneira que se o fluxo calculado for positivo será para fora da superfície e se for negativo será para dentro dela.



**Figura 2.5.:** Uma superfície tem dois versores normais; nas superfícies fechadas escolhe-se o versor que aponta para fora.

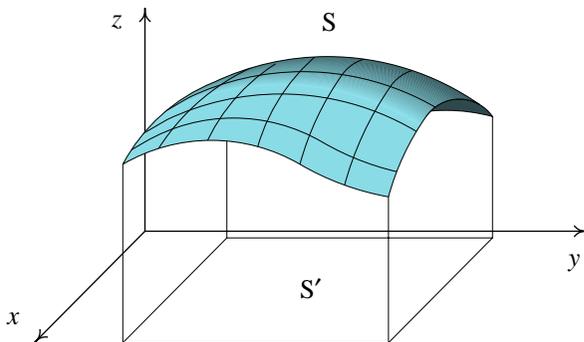
Para encontrar o valor do integral na equação (2.4), é conveniente usar uma representação paramétrica da superfície  $S$  com dois parâmetros  $u'$  e  $v'$ :

$$S = \{\vec{r}'(u', v'); u' \text{ e } v' \text{ parâmetros reais}\} . \quad (2.5)$$

Por exemplo, se a superfície fosse o plano  $z' = 3x' - 2y'$ , uma possível equação paramétrica é:  $\vec{r}' = x'\hat{i} + y'\hat{j} + (3x' - 2y')\hat{k}$ , em função dos parâmetros  $x'$  e  $y'$ .

Os dois parâmetros reais que definem uma superfície correspondem aos pontos numa região num plano. Por exemplo, na figura 2.6 os dois parâmetros são as próprias variáveis  $x'$  e  $y'$ , e os possíveis valores dos parâmetros correspondem ao retângulo  $S'$  no plano  $xy$ . Os aumentos infinitesimais  $dx'$  e  $dy'$ , no retângulo  $S'$ , são projetados sobre a superfície  $S$ , formando uma pequena região na superfície  $S$ , com área  $dA'$ . No limite infinitesimal,  $dA'$  é a área do paralelepípedo formado pelos vetores:

$$d\vec{r}'_x = \frac{\partial \vec{r}'}{\partial x'} dx' , \quad d\vec{r}'_y = \frac{\partial \vec{r}'}{\partial y'} dy' ; \quad (2.6)$$



**Figura 2.6.:** Superfície com domínio no retângulo  $S'$  do plano  $xy$ .

sendo a derivada parcial  $\partial \vec{r}' / \partial x'$  um vetor que determina o aumento da função  $\vec{r}'$ , devido a um aumento unitário da variável  $x'$ . De igual forma,  $\partial \vec{r}' / \partial y'$  determina o aumento de  $\vec{r}'$  devido ao aumento unitário de  $y'$ . O produto vetorial dos vetores (2.6) é um vetor de direção normal à superfície,  $\hat{n}$ , e de módulo igual à área do paralelepípedo; assim sendo,  $d\vec{A}'$ , é igual ao produto vetorial entre esses dois vetores:

$$d\vec{A}' = \left( \frac{\partial \vec{r}'}{\partial x'} \times \frac{\partial \vec{r}'}{\partial y'} \right) dx' dy' . \quad (2.7)$$

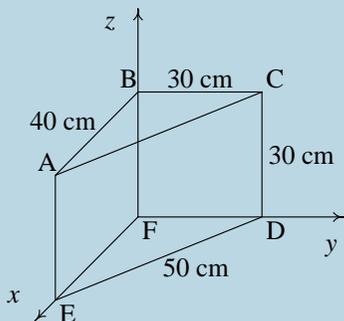
A ordem dos dois vetores no produto vetorial (2.7) determina o lado da superfície para onde aponta  $d\vec{A}'$ . Na ordem em que foram multiplicados os vetores na equação (2.7), o vetor  $d\vec{A}'$  aponta para o lado de cima da superfície. Os parâmetros  $x'$  e  $y'$  usados em (2.7) podem ser qualquer outros dois parâmetros reais.

### Exemplo 2.1

Determine o fluxo elétrico através da superfície ACDE, representada na figura, se o campo elétrico for:

- (a)  $\vec{E} = C_0 \hat{j}$ ,  
 (b)  $\vec{E} = C_1 \sin(C_2 x) \hat{i}$ ,

( $C_0 = 3 \text{ N/C}$ ,  $C_1 = 20 \text{ N/C}$  e  $C_2 = 5 \text{ m}^{-1}$ ).



**Resolução.** (a) Como o campo é constante e na direção do eixo dos  $y$ , o fluxo através de ACDE é igual ao fluxo através de ABFE na direção positiva do eixo  $y$ , e

calcula-se facilmente usando a Equação (2.1)

$$\Psi_{\text{ABFE}} = 3 \times 0.4 \times 0.3 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}} = 0.36 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}} .$$

(b) Neste caso não é necessário escrever a equação do plano e usar a equação (2.6), porque os dois vetores (2.6) podem ser obtidos mais facilmente. Como o campo depende de  $x$ , convém escolher  $x'$  como um dos parâmetros que definem a superfície. O segundo parâmetro terá de ser  $z'$ , porque no plano  $xy$  vários pontos diferentes do plano ACDE são projetados num único ponto.

O aumento infinitesimal  $dz'$  do parâmetro  $z'$  faz deslocar a projeção no plano ACDE no vetor

$$d\vec{r}'_z = \hat{k} dz' .$$

Enquanto  $x'$  aumenta desde F até E, o ponto correspondente no plano desloca-se desde D até E:

$$(40\hat{i} - 30\hat{j}) \text{ cm} .$$

Como  $FE = 40$  cm, o deslocamento correspondente ao aumento  $dx$  é

$$d\vec{r}'_x = \left( \hat{i} - \frac{3}{4}\hat{j} \right) dx' ,$$

e usando a equação (2.7) obtém-se

$$d\vec{A} = \hat{k} \times \left( \hat{i} - \frac{3}{4}\hat{j} \right) dx' dz' = \left( \frac{3}{4}\hat{i} + \hat{j} \right) dx' dz' .$$

O fluxo através de ACDE é (ignorando, por enquanto, as unidades)

$$\Psi_{\text{ACDE}} = C_1 \int_0^{0.4} \int_0^{0.3} \sin(C_2 x) \hat{i} \cdot \left( \frac{3}{4}\hat{i} + \hat{j} \right) dz' dx' ;$$

Como o produto escalar de  $\hat{i}$  consigo próprio é 1 e com  $\hat{j}$  é zero:

$$\Psi_{\text{ACDE}} = \frac{9C_1}{40} \int_0^{0.4} \sin(C_2 x) dx = \frac{9C_1}{40C_2} (1 - \cos 0.4 C_2) = 1.27 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}} .$$

Observe-se que neste caso as linhas de campo elétrico são perpendiculares ao plano  $yz$ , mas os fluxo no retângulo ACDE não é igual ao fluxo no quadrado BCDF. No quadrado BCDF ( $x = 0$ ) o campo elétrico é nulo e, portanto, o fluxo é nulo. As linhas de campo que passam pelo quadrado BCDF e pelo retângulo ACDE não constituem um tubo de fluxo, porque entre esses dois planos devem existir cargas pontuais (fontes do campo).

**Exemplo 2.2**

Determine o fluxo elétrico através da superfície esférica de raio  $R$  (unidades SI) e centro na origem, quando a expressão do campo elétrico for (unidades SI):

(a)  $\vec{E} = 2 \hat{k}$ ,

(b)  $\vec{E} = 2z \hat{k}$ .

**Resolução.** Em coordenadas esféricas (ver Apêndice A) o vetor posição dos pontos na esfera de raio  $R$  e centro na origem é:

$$\vec{r}' = R \hat{r},$$

onde  $\hat{r}$  é o versor radial:

$$\hat{r} = \sin \phi \cos \theta \hat{i} + \sin \phi \sin \theta \hat{j} + \cos \phi \hat{k} \quad (2.8)$$

e os ângulos variam nos intervalos  $0 \leq \theta < 2\pi$  e  $0 \leq \phi < \pi$ .

Por tratar-se de uma superfície fechada, o vetor diferencial de área define-se apontando para fora da superfície

$$\begin{aligned} d\vec{A}' &= \frac{d\vec{r}'}{d\phi} \times \frac{d\vec{r}'}{d\theta} d\phi d\theta = R^2 \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \cos \phi \cos \theta & \cos \phi \sin \theta & -\sin \phi \\ -\sin \phi \sin \theta & \sin \phi \cos \theta & 0 \end{vmatrix} d\phi d\theta \\ &= R^2 (\sin^2 \phi \cos \theta \hat{i} + \sin^2 \phi \sin \theta \hat{j} + \sin \phi \cos \phi \hat{k}) d\phi d\theta. \end{aligned}$$

Ou seja, o vetor diferencial de área na esfera de raio  $R$  é

$$d\vec{A}' = R^2 \sin \phi \hat{r} d\phi d\theta. \quad (2.9)$$

(a) O fluxo é

$$\Psi_S = \iint_S \vec{E}' \cdot d\vec{A}' = 2R^2 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \phi \cos \phi d\phi d\theta = 0.$$

o resultado nulo indica que o fluxo que entra pela metade da esfera em  $z < 0$  é igual ao fluxo que sai pela outra metade em  $z > 0$

(b) Na superfície esférica, a componente  $z'$  do vetor de posição  $\vec{r}'$  é igual a

$$z' = \vec{r}' \cdot \hat{k} = R \cos \phi$$

como tal, o campo elétrico nessa superfície é igual a  $2R \cos \phi \hat{k}$  e o fluxo elétrico é

$$\Psi_S = \iint_S \vec{E}' \cdot d\vec{A}' = 2R^3 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \phi \cos^2 \phi d\phi d\theta = 4\pi R^3 \left( -\frac{\cos^3 \phi}{3} \right)_0^\pi = \frac{8\pi R^3}{3}$$

O resultado positivo indica que há fluxo a sair da esfera. Nas duas metades da esfera, em  $z > 0$  e  $z < 0$ , o campo elétrico aponta para fora da esfera.

## 2.2. Lei de Gauss

O campo elétrico produzido por uma distribuição de cargas é a sobreposição dos campos produzidos por muitas cargas pontuais. Convém então analisar o fluxo elétrico produzido pelo campo de uma única carga pontual  $q$ . Em relação a uma superfície  $S$  fechada, a carga  $q$  pode estar ou fora ou dentro dessa superfície (figura 2.7).

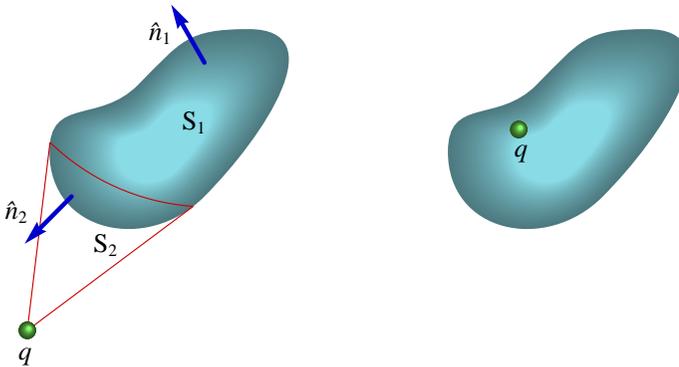


Figura 2.7.: Carga pontual dentro ou fora de uma superfície fechada.

Se a carga estiver fora de  $S$ , as linhas de campo tangentes à superfície definem um tubo de fluxo. A superfície  $S$  é dividida em duas partes  $S_1$  e  $S_2$ , nos dois lados da curva por onde passam as linhas de campo tangentes a  $S$  (ver lado esquerdo da figura 2.7). O fluxo elétrico através das duas superfícies  $S_1$  e  $S_2$  é igual, porque fazem parte do mesmo tubo de fluxo, mas têm sinais opostos, já que um dos versores  $\hat{1}$  ou  $\hat{2}$  aponta no sentido das linhas de campo e o outro no sentido oposto. Ou seja, se  $q > 0$ , entra fluxo por  $S_2$  e sai o mesmo fluxo por  $S_1$ ; se  $q < 0$ , entra fluxo por  $S_1$  e sai o mesmo fluxo por  $S_2$ . Conclui-se que o fluxo elétrico devido a uma carga pontual é nulo em qualquer superfície fechada, se a carga estiver fora da superfície.

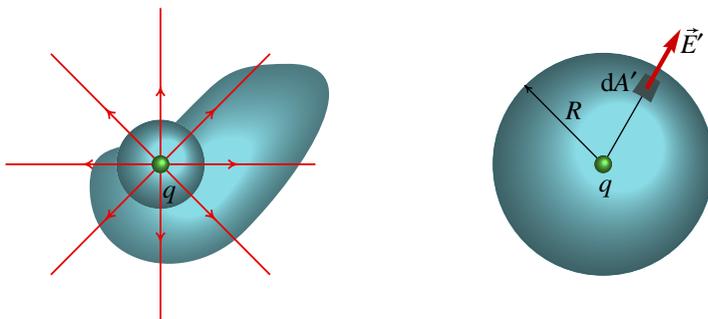
Se  $q$  estiver no interior da superfície  $S$ , será atravessada por todas as linhas de campo. O fluxo total através de  $S$  é igual ao fluxo através de uma superfície esférica com centro na carga, porque essa esfera e  $S$  estão no mesmo tubo de fluxo (ver figura 2.8).

Se o raio da superfície esférica é  $R$ , o campo elétrico num ponto qualquer dessa superfície é:

$$\vec{E}' = \frac{kq}{R^2} \hat{r} \quad (2.10)$$

e o vetor diferencial de área é o mesmo vetor (2.9) do exemplo 2.2.

O fluxo total através da superfície fechada  $S$  é igual ao fluxo na superfície esférica,



**Figura 2.8.:** Fluxo produzido por uma carga pontual através de uma superfície fechada.

que é

$$\Psi_S = \iint_S \vec{E}' \cdot d\vec{A}' = k q \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \phi \, d\phi \, d\theta = 4\pi k q \quad (2.11)$$

Independentemente do tamanho ou forma da superfície  $S$ , o fluxo total através dela é igual a  $4\pi k q$ , se a carga pontual  $q$  estiver no interior de  $S$ . O fluxo é para fora (positivo), se a carga é positiva, ou para dentro (negativo) se a carga é negativa.

Uma distribuição de carga pode ser dividida em várias cargas pontuais  $q_1, q_2, \dots, q_n$ , e o fluxo total através de uma superfície fechada  $S$  será igual à soma dos  $n$  fluxos produzidos por cada uma das cargas pontuais. As cargas que se encontram no exterior de  $S$  não produzem fluxo total e cada carga  $q_i$  que esteja dentro de  $S$  produz fluxo  $4\pi k q_i$ . Assim sendo, o fluxo total através da superfície fechada  $S$  é:

$$\boxed{\iint_S \vec{E}' \cdot d\vec{A}' = 4\pi k q_{\text{int}}}, \quad (2.12)$$

onde  $q_{\text{int}}$  é a carga total no interior da superfície  $S$ . Esta equação chama-se **lei de Gauss**:

*O fluxo elétrico através de qualquer superfície fechada é igual ao valor da carga total no interior da superfície, multiplicado por  $4\pi k$ .*

O lado direito na lei de Gauss também costuma ser escrito  $q_{\text{int}}/\epsilon_0$ , onde  $\epsilon_0$  é chamada **permitividade do vazio** e é igual a

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi k}. \quad (2.13)$$

A equação (2.11) pode ser usada também para calcular o fluxo produzido por uma carga pontual, através de uma superfície qualquer que não tem de ser fechada;

basta substituir os limites dos integrais pelos pelas expressões necessárias para delimitar a superfície  $S$ :

$$\Psi_S = k q \iint_S \sin \phi \, d\phi \, d\theta = k q \Omega, \quad (2.14)$$

onde  $\Omega$  é o resultado do integral duplo e é o valor do **ângulo sólido**, com vértice na carga pontual e delimitado pela superfície  $S$ . No caso das superfícies fechadas em torno do vértice, o ângulo sólido tem o seu valor máximo possível,  $4\pi$ .

A lei de Gauss é útil para descobrir a carga total dentro de uma região do espaço onde existe campo elétrico. No exemplo 2.2, os valores dos fluxos calculados na superfície esférica de raio  $R$  permitem determinar a carga total no interior da esfera. Na alínea (a) conclui-se que a carga no interior da esfera é nula, e na alínea (b) a carga no interior da esfera é:

$$q_{\text{int}} = \frac{\Psi_S}{4\pi k} = \frac{2R^3}{3k} \quad (2.15)$$

A lei de Gauss é também muito útil para calcular o campo elétrico devido a distribuições simétricas de carga. A método de usar a lei de Gauss para calcular o campo elétrico consiste em descobrir uma superfície fechada imaginária — **superfície gaussiana** — que passa pelo ponto onde se quer calcular o campo, de forma a que a componente normal à superfície seja sempre constante ou nula. Se existir superfície gaussiana, o fluxo nessa superfície é dado pela equação (2.1) e substituído na lei de Gauss (equação (2.12)), dando o resultado:

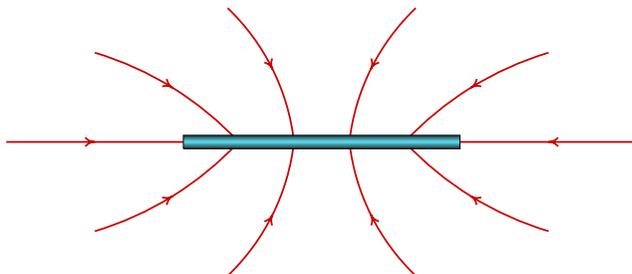
$$E = \frac{4\pi k q_{\text{int}}}{A}, \quad (2.16)$$

onde  $A$  é a área total da parte da superfície onde o campo não é nulo e tem módulo constante  $E$ .

Não obstante, existem superfícies gaussianas apenas quando as linhas de campo elétrico têm simetria plana, esférica ou cilíndrica. A lei de Gauss, juntamente com o princípio de sobreposição, permite também calcular o campo em sistemas que não tenham simetria, mas que possam ser obtidos por sobreposição de sistemas com simetria (ver problema 8).

Em alguns casos, pode obter-se uma expressão aproximada para o campo, substituindo a distribuição de carga por uma distribuição idealizada com alguma simetria. Por exemplo, um fio com carga distribuída uniformemente (figura 2.9) pode ser idealizado por um fio infinito e um plano com carga distribuída uniformemente pode ser idealizado por um plano infinito. A expressão obtida para o fio infinito ou o plano infinito será uma boa aproximação nas regiões próximas do centro do fio ou do plano e se a distância até o fio ou plano for muito menor que o comprimento do fio ou as arestas do plano.

Os exemplos seguintes mostram sistemas em que as linhas de campo elétrico têm simetria esférica, plana ou cilíndrica, que permitem obter o campo elétrico a partir da equação (2.16).

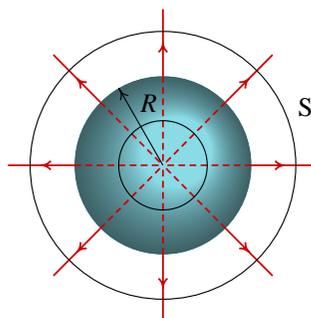


**Figura 2.9.:** Linhas de campo de um fio retilíneo com carga distribuída uniformemente.

### Exemplo 2.3

Uma esfera maciça de raio  $R$  tem carga total  $Q$  e carga volúmica constante. Determine o campo elétrico no interior e no exterior da esfera.

**Resolução.** A carga volúmica constante implica distribuição uniforme de carga em todas as partes da esfera e simetria esférica: em cada ponto, dentro ou fora do espaço, a linha de campo elétrico que passa por esse ponto deve ter direção radial, como mostra a figura ao lado. Assim sendo, qualquer esfera concêntrica com a esfera maciça é uma superfície gaussiana, porque em todos os seus pontos o campo é perpendicular e com o mesmo módulo devido à simetria.



O raio  $r$  da esfera gaussiana pode ser menor ou maior do que o raio da esfera maciça,  $R$ , como nas duas esferas a tracejado na figura. Em diferentes esferas gaussianas o módulo do campo pode ter diferentes valores, ou seja,  $E$  depende unicamente de  $r$ .

A área da superfície gaussiana é a área da esfera de raio  $r$ , igual a  $4\pi r^2$ . Substituindo na equação (2.16), obtém-se

$$E = \frac{k q_{\text{int}}}{r^2}. \quad (2.17)$$

No exterior da esfera ( $r > R$ ), a carga no interior da superfície gaussiana de raio  $r$  é igual à carga total da esfera:  $q_{\text{int}} = Q$ ; como tal, o campo elétrico em  $r > R$  é

$$E = \frac{k Q}{r^2}. \quad (2.18)$$

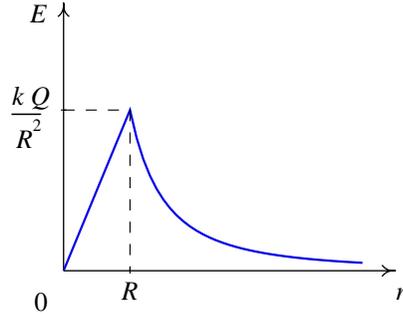
No interior da esfera ( $r < R$ ), a carga no interior da esfera gaussiana aumenta proporcionalmente ao volume, ou seja, é diretamente proporcional a  $r^3$  e a constante de proporcionalidade deve conduzir a  $q_{\text{int}} = Q$  quando  $r = R$ . Assim sendo, a expressão da carga interna para  $r < R$  é

$$q_{\text{int}} = Q \frac{r^3}{R^3},$$

e a expressão do campo é

$$E = \frac{kQr}{R^3}. \quad (2.19)$$

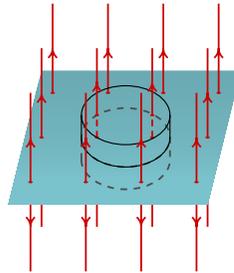
A figura ao lado mostra o gráfico do módulo do campo em função de  $r$ .



### Exemplo 2.4

Determine a expressão do campo elétrico devido a um plano infinito com carga superficial constante  $\sigma$ .

**Resolução.** O campo elétrico deve ser perpendicular ao plano, em sentidos opostos nos dois lados do plano, porque qualquer translação ou rotação do plano não pode alterar a geometria das linhas de campo (simetria plana). Qualquer superfície cilíndrica com tampas paralelas ao plano, a mesma distância em cada lado do plano, é uma superfície gaussiana (figura ao lado)



A carga no interior da superfície gaussiana é  $\sigma A$ , onde  $A$  é a área de cada uma das tampas do cilindro, iguais à área da parte do plano atravessada pelo cilindro.

Não existe fluxo nas paredes laterais do cilindro, porque são tangentes às linhas de campo. Como tal, a área da parte da superfície gaussiana onde há fluxo é a soma das áreas das duas tampas,  $2A$ . Substituindo na equação (2.16), a expressão do campo é

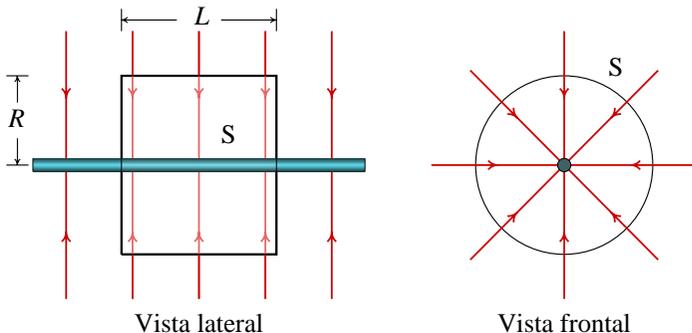
$$E = 2\pi k \sigma = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}. \quad (2.20)$$

Ou seja, o módulo do campo é constante e diretamente proporcional à carga superficial.

### Exemplo 2.5

Determine a expressão do campo elétrico de um fio retilíneo infinito com carga linear uniforme  $\lambda$ .

**Resolução.** O campo elétrico não se deve alterar se o fio roda ou se desloca ao longo do seu eixo. Assim sendo, as linhas de campo devem ser retas perpendiculares ao fio (ver figura) e o módulo do campo é igual nos pontos à mesma distância  $R$  do fio (simetria cilíndrica).



Qualquer cilindro circular  $S$  com eixo no fio, como o que aparece na figura acima, é uma superfície gaussiana. A carga no interior de  $S$  é  $\lambda L$ , onde  $L$  é a altura do cilindro.

Há fluxo elétrico unicamente na superfície curva do cilindro, que tem área  $2\pi R L$ , onde  $R$  é o raio do cilindro. Substituindo na equação (2.16), obtém-se a expressão do módulo do campo

$$\vec{E} = \frac{2k\lambda}{R} \hat{R}, \quad (2.21)$$

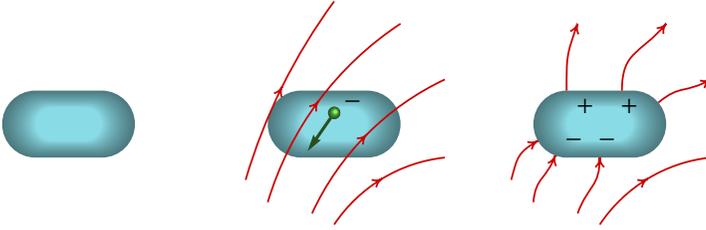
onde  $\hat{R}$  é o versor na direção perpendicular ao fio, afastando-se dele.

## 2.3. Condutores em equilíbrio eletrostático

Um condutor é um material que tem alguns elétrons livres que podem deslocar-se livremente, chamados **elétrons de condução**. Quando as cargas livres não se encontram em movimento, diz-se que o condutor está em **equilíbrio eletrostático**. Para que o condutor esteja em equilíbrio eletrostático é preciso que o campo elétrico, em qualquer ponto do condutor, seja nulo. Se assim não fosse, as cargas livres seriam aceleradas pelo campo e o condutor não estaria em equilíbrio.

Imaginemos um condutor em equilíbrio eletrostático. Quando se introduz um campo elétrico externo, os elétrons de condução são acelerados no sentido oposto, ficando um excesso de elétrons num extremo do condutor e um excesso de prótons no extremo oposto (Figura 2.10). Os elétrons e os prótons em excesso produzem um campo elétrico que, dentro do condutor, é oposto ao campo externo, fazendo com que o campo total no interior diminua. Enquanto existir campo elétrico dentro

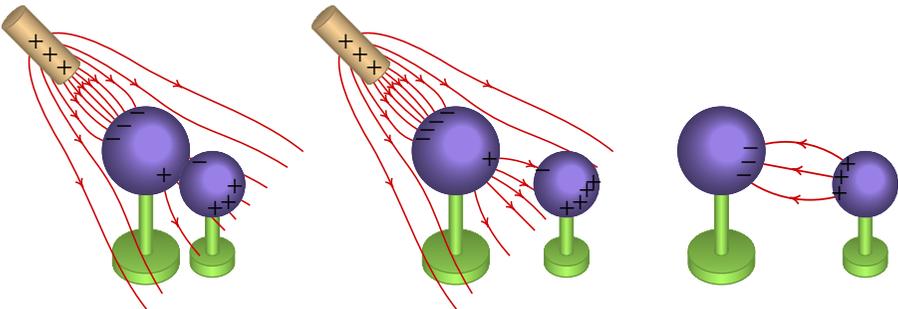
do condutor, o movimento de cargas continuará e o campo total diminuirá até ser zero. Nesse instante o condutor atinge o equilíbrio eletrostático e o campo em qualquer ponto interno é nulo. Num condutor típico o tempo necessário para atingir o equilíbrio é muito pequeno, da ordem dos  $10^{-19}$  segundos, como veremos no problema 9 do Capítulo 6.



**Figura 2.10.:** Efeito de um campo externo num condutor isolado.

### 2.3.1. Carga por indução

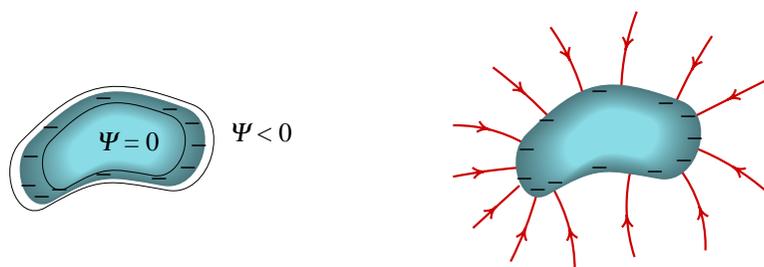
O fenômeno de indução de cargas nos extremos de um condutor, dentro de um campo elétrico, pode ser usado para carregar metais (Figura 2.11). Por exemplo, se deslocarmos um objeto com carga positiva perto de uma peça metálica isolada, a parte do metal que estiver mais perto do objeto carregado acumulará uma carga negativa, enquanto no lado oposto (mais distante) ficará uma carga positiva da mesma ordem de grandeza. Se nesse momento o extremo mais distante do condutor isolado for ligado a outro condutor sem carga, as cargas positivas passam para o segundo condutor. Desligando os dois condutores, antes de retirar o objeto usado para induzir as cargas, os dois condutores ficam com cargas iguais e de sinais opostos.



**Figura 2.11.:** Procedimento para carregar dois condutores com cargas iguais mas de sinais opostos.

### 2.3.2. Carga e campo num condutor em equilíbrio

Como já vimos, o campo elétrico dentro de um condutor em equilíbrio tem que ser necessariamente nulo. O fluxo elétrico em qualquer superfície fechada no interior do condutor será nulo, pois o campo é nulo em qualquer ponto do condutor. No entanto, a lei de Gauss garante que não existe carga dentro de uma superfície fechada onde o fluxo elétrico seja nulo. Isto implica que não pode existir carga em qualquer ponto interno do condutor. Não consideramos os pontos na superfície do condutor, já que qualquer superfície fechada, que tenha no seu interior pontos da superfície do condutor, sai fora do condutor. Assim, os únicos pontos onde pode existir carga num condutor em equilíbrio eletrostático é na sua superfície; qualquer excesso de carga num condutor isolado deverá estar distribuída sobre a sua superfície (lado esquerdo da figura 2.12).



**Figura 2.12.:** Condutor isolado com carga. À esquerda, fluxo em superfícies interna e externa e à direita, linhas de campo.

O campo elétrico dentro do condutor em equilíbrio é zero. Na superfície do condutor, se o campo tivesse uma componente ao longo da superfície, esta aceleraria os elétrons de condução ao longo da superfície, e o condutor não estaria em equilíbrio. A componente do campo elétrico normal à superfície terá uma tendência a “puxar para fora” os elétrons da superfície, ou a atrair elétrons do exterior, mas, como o condutor está isolado, isso será impossível e o condutor permanecerá em equilíbrio. Concluimos assim, que o campo elétrico na superfície de um condutor em equilíbrio eletrostático é sempre perpendicular à superfície (lado direito da figura 2.12).

Para calcular o campo elétrico na superfície de um condutor em equilíbrio, imaginemos um pequeno cilindro de bases paralelas à superfície, como se mostra na Figura 2.13. Se o cilindro for suficientemente pequeno, será aproximadamente uma superfície gaussiana.

Só existe fluxo elétrico na base do cilindro no exterior do condutor, e o fluxo total através da superfície gaussiana é

$$\Psi \approx E\Delta A = 4\pi k\Delta q, \quad (2.22)$$

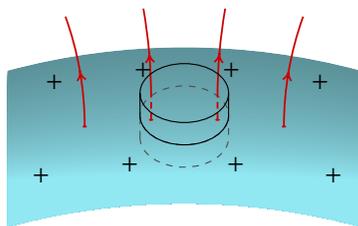
onde  $\Delta A$  é a área da parte da superfície no interior do cilindro, e  $\Delta q$  é a carga que ela contém. No limite  $\Delta A \rightarrow 0$  a equação anterior é exacta e

$$E = 4\pi k \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta A} . \quad (2.23)$$

O limite na equação anterior é igual à carga superficial. Assim, o campo num ponto da superfície do condutor é

$$\vec{E} = 4\pi k \sigma \hat{n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n} , \quad (2.24)$$

onde  $\sigma$  é a carga superficial e  $\hat{n}$  o versor normal para fora do condutor.



**Figura 2.13.:** Pequena superfície gaussiana na superfície de um condutor isolado.

O campo na superfície do condutor é o dobro do campo de uma superfície plana infinita (ver Equação 2.20). Podíamos ter pensado que, estando muito perto da superfície do condutor, seria uma boa aproximação admitir que a superfície era muito extensa, mas como vimos não é assim.

No caso de uma superfície plana infinita, o campo num ponto da superfície é devido só à carga nesse ponto, pois, por simetria, o campo total produzido pelos outros pontos no plano é zero. No condutor fechado, o campo num ponto da superfície é o resultado da sobreposição dos campos produzidos pelo próprio ponto mais o campo produzido pelos restantes pontos da superfície. O campo do próprio ponto deverá ser o mesmo que no caso do plano infinito e, portanto, será igual a  $2\pi k\sigma$  nos dois lados da superfície e em sentidos opostos. O campo que falta para completar o campo total é o campo devido ao resto da superfície. Como o campo total é nulo no interior e igual a  $4\pi k\sigma$  no exterior, o campo produzido pela superfície, sem incluir o ponto P, é igual a  $2\pi k\sigma$  nos dois lados da superfície e com o mesmo sentido.

O campo  $2\pi k\sigma$  produzido pela superfície, sem incluir o ponto P, actua sobre a carga local no ponto P, produzindo uma força para fora da superfície:

$$dF = 2\pi k\sigma^2 dA . \quad (2.25)$$

Esta força é sempre neste sentido independentemente do sinal da carga superficial  $\sigma$ .

## Perguntas

- Um plano com  $2500 \text{ cm}^2$  de área tem uma carga total de  $20 \text{ nC}$ , distribuída uniformemente. O módulo do campo elétrico perto do plano é, aproximadamente:  
A.  $18.1 \text{ mN/C}$       D.  $45.2 \text{ N/C}$   
B.  $4.52 \text{ kN/C}$       E.  $0.452 \text{ N/C}$   
C.  $1.81 \text{ N/C}$
- Uma esfera condutora de  $3 \text{ cm}$  de raio, isolada e com carga positiva, produz um campo de módulo  $36 \text{ } \mu\text{N/nC}$ , num ponto que se encontra a  $1 \text{ cm}$  da superfície da esfera. Calcule a carga total da esfera.  
A.  $3.6 \text{ nC}$       C.  $1.6 \text{ nC}$       E.  $1.2 \text{ nC}$   
B.  $0.4 \text{ nC}$       D.  $6.4 \text{ nC}$
- Num sistema de coordenadas cartesianas  $(x, y, z)$  (em metros), existe uma carga pontual de  $2 \text{ nC}$  em  $(1, 0, 0)$ , uma carga pontual de  $-4 \text{ nC}$  em  $(0, 2, 0)$  e uma carga pontual de  $3 \text{ nC}$  em  $(0, 0, 4)$ . Determine o fluxo elétrico (em unidades SI) através de uma esfera de raio  $3 \text{ m}$ , com centro na origem.  
A.  $36\pi$       C.  $-72\pi$       E.  
B.  $72\pi$       D.  $108\pi$        $-144\pi$
- Uma esfera de raio  $1 \text{ m}$  tem carga distribuída de forma desconhecida. O fluxo do campo elétrico criado pela esfera através de uma superfície esférica de raio  $4 \text{ m}$ , concêntrica com ela, é  $11.3 \times 10^4 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}$ . Qual é o fluxo do campo elétrico através de uma superfície esférica de raio  $2 \text{ m}$  concêntrica com a esfera?  
A.  $45.2 \times 10^4 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}$   
B.  $22.6 \times 10^4 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}$   
C.  $11.3 \times 10^4 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}$   
D.  $56.5 \times 10^3 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}$   
E.  $28.2 \times 10^3 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}$
- Se numa superfície fechada o campo elétrico aponta para dentro da superfície em todos os pontos, o que pode concluir-se?  
A. Existe carga positiva dentro da superfície.  
B. Existe carga negativa dentro da superfície.  
C. Não existe nenhuma carga dentro da superfície.  
D. O campo é necessariamente perpendicular à superfície.  
E. O campo é necessariamente paralelo à superfície.

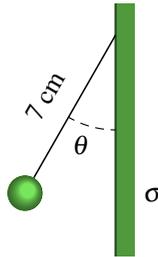
## Problemas

1. Calcule o fluxo do campo elétrico  $\vec{E} = x\hat{i} + y\hat{j}$  através da superfície

$$S = \{z = 2x + 3y, \quad 0 \leq x \leq 2, \quad -1 \leq y \leq 1\}$$

(As distâncias são dadas em cm, e o campo em N/C.)

2. Calcule o fluxo produzido pelo campo elétrico  $\vec{E} = C_1 \sin(C_2 x)(3\hat{i} + 4\hat{k})$ , através do triângulo com vértices nos pontos  $(0, 0, 0)$ ,  $(2 \text{ cm}, 0, 0)$  e  $(0, 3 \text{ cm}, 0)$ . Os valores das constantes são  $C_1 = 20 \text{ N/C}$  e  $C_2 = 5 \text{ m}^{-1}$ .
3. Calcule o fluxo associado a um campo vetorial  $\vec{F} = e^{-y}(\hat{i} - x\hat{j})$ , através do triângulo com vértices  $(2, 0, 0)$ ,  $(0, 4, 0)$  e  $(0, 0, 3)$ .
4. Uma esfera condutora, com massa igual a 25 g e carga de 50  $\mu\text{C}$ , encontra-se pendurada por um fio isolado, de 7 cm de comprimento, colado a um plano vertical. O plano vertical tem uma carga superficial constante  $\sigma = 17 \text{ pC/cm}^2$  e pode ser considerado infinito. Calcule o ângulo  $\theta$  que o fio faz com o plano vertical.

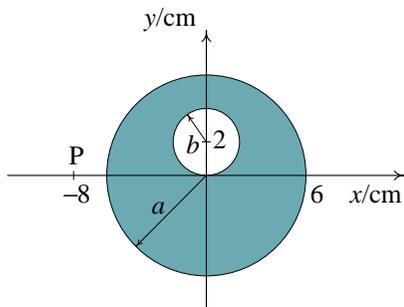


5. O campo elétrico numa dada região do espaço é

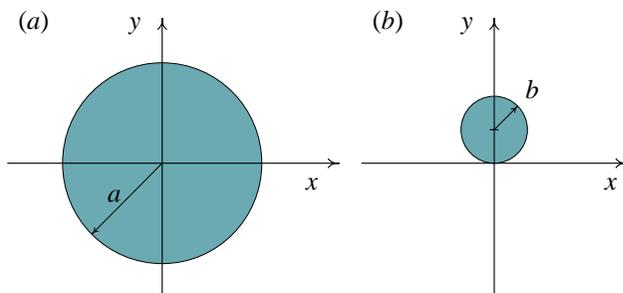
$$\vec{E} = 5 \frac{\vec{r}}{r^5}.$$

Calcule a carga total dentro de uma esfera de 6 cm de raio e centro na origem. (O raio é dado em cm e o campo em N/C.)

6. (a) Se uma bola de sabão for carregada eletricamente, o seu diâmetro vai aumentar, diminuir ou permanecer igual?  
 (b) Se colocarmos a bola de sabão num campo elétrico uniforme, o que acontece com a sua forma?
7. Considere o próton como uma pequena esfera sólida de raio  $10^{-15} \text{ m}$ , com carga distribuída uniformemente no seu interior. Calcule o campo elétrico na sua superfície e num ponto a  $0.5 \times 10^{-15} \text{ m}$  do centro.
8. A figura representa o corte transversal de um cilindro sólido, muito comprido, de raio  $a = 6 \text{ cm}$  e carga volúmica constante  $\rho = 25 \text{ nC/m}^3$  e com uma cavidade cilíndrica de raio  $b = 2 \text{ cm}$ . Calcule o campo elétrico no ponto P.



*Sugestão:* para calcular o campo, usando a lei de Gauss, é possível considerar o sistema como a sobreposição de um cilindro maciço, de raio  $a$  e centro na origem, com carga volúmica  $\rho$  (parte  $a$  da figura) e um cilindro, de raio  $b$  e centro no ponto  $(0, 2)$ , com carga volúmica  $-\rho$  (parte  $b$  da figura).



9. Calcule o campo elétrico produzido pela distribuição de carga (em unidades SI):

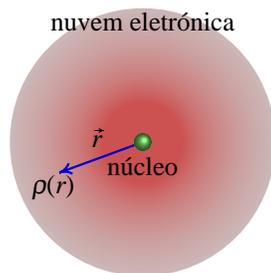
$$\rho(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{0.05}{r^2} e^{-3r} & 0 \leq r \leq 0.1 \\ 0 & 0.1 < r \end{cases}$$

10. No átomo de hidrogénio, o eletrão encontra-se em movimento muito rápido à volta do núcleo. O resultado médio no tempo é uma distribuição contínua de carga (**nuvem eletrónica**) com carga volúmica

$$\rho(r) = -\frac{e}{\pi a_0^3} e^{-2r/a_0}$$

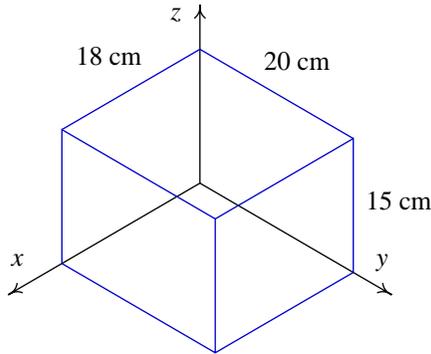
onde  $e$  é a carga elementar,  $a_0$  uma constante aproximadamente igual a  $5.3 \times 10^{-11}$  m, e  $r$  a distância desde o núcleo.

- (a) Mostre que a carga total da nuvem eletrónica é igual à carga do eletrão,  $-e$ .  
 (b) Calcule o campo elétrico produzido pela nuvem eletrónica.



(c) Calcule o campo total do átomo de hidrogênio. (*Sugestão:* o campo do núcleo é igual ao campo de uma partícula pontual de carga  $e$ , na origem.)

11. Calcule, em unidades SI, a carga total dentro do paralelepípedo representado na figura, sabendo que o campo elétrico no paralelepípedo é  $\vec{E} = 24x\hat{i}$  (paralelo ao eixo dos  $x$ ).



12. Considere uma esfera condutora de raio  $b$ , com carga total igual a zero. A esfera tem uma cavidade esférica de raio  $a$  centrada no seu interior. Coloca-se na carga pontual  $q$  no centro da cavidade.
- (a) Use a lei de Gauss e as propriedades dos condutores em equilíbrio para calcular o campo elétrico em cada uma das regiões  $r < a$ ,  $a < r < b$  e  $b < r$ .
- (b) Desenhe as linhas de campo elétrico nesta situação.
- (c) Descreva a distribuição de carga na superfície externa da esfera. Como seria alterada esta distribuição de carga se a carga pontual na cavidade fosse deslocada do centro? Desenhe as linhas de campo elétrico nesse caso.
13. Uma esfera de raio  $a$ , tem uma carga total  $q$  distribuída de tal forma que a carga volúmica é  $\rho = Ar$ , onde  $A$  é uma constante e  $r$  a distância ao centro da esfera.
- (a) Calcule o valor da constante  $A$  em função da carga  $q$ .
- (b) Calcule o campo elétrico no interior e no exterior da esfera, e faça o gráfico do módulo do campo  $E$  em função de  $r$ .
14. A carga volúmica no interior de um cilindro muito comprido de raio  $b$  é

$$\rho(r) = \begin{cases} 0 & r < a \\ \rho_0 & a \leq r \leq b \end{cases}$$

onde  $r$  é a distância ao eixo do cilindro e  $\rho_0$  é uma constante. Calcule o campo elétrico em qualquer ponto do espaço, em função dos parâmetros  $\rho_0$ ,  $a$  e  $b$ .

## Respostas

**Perguntas:** 1. B. 2. D. 3. C. 4. C. 5. B.

### Problemas

- $8 \text{ N} \cdot \text{cm}^2/\text{C}$ , no sentido negativo do eixo  $z$ .
- $7.99 \text{ N} \cdot \text{cm}^2/\text{C}$ .
- $(3/16)(5e^{-4} + 7)$ , no sentido desde o triângulo até à origem.
- $62.97^\circ$ .
- $154 \text{ nC}$ .
- (a) Aumenta, devido à repulsão electrostática entre as cargas na superfície.  
(b) O campo induz cargas positivas e negativas na bola; as forças sobre essas cargas deformam a bola, tornando-a num elipsóide com o eixo maior na direcção do campo.
- $1.44 \times 10^{21} \text{ N/C}$  e  $7.21 \times 10^{20} \text{ N/C}$ .
- $(-56.96 \hat{i} + 1.66 \hat{j}) \text{ N/C}$ .
- $$E(r) = \begin{cases} 1.88 \times 10^9 \frac{1 - e^{-3r}}{r^2}, & r < 0.1 \\ \frac{4.89 \times 10^8}{r^2}, & r \geq 0.1 \end{cases} \quad (r \text{ em m, } E \text{ em N/C}).$$
- (b)  $E(r) = -\frac{ke}{r^2} + ke\left(\frac{2}{a_0^2} + \frac{2}{a_0 r} + \frac{1}{r^2}\right)e^{-2r/a_0}$ .  
(c)  $E(r) = ke\left(\frac{2}{a_0^2} + \frac{2}{a_0 r} + \frac{1}{r^2}\right)e^{-2r/a_0}$ .
- $1.146 \text{ pC}$ .
- (a) 
$$E_r = \begin{cases} kq/r^2, & r < a \\ 0, & a < r < b \\ kq/r^2, & r > b. \end{cases}$$
  
(c)  $\sigma = q/4\pi b^2$ , uniforme; a carga superficial aumenta na região mais próxima da carga pontual e diminui na região oposta.
- (a)  $q/\pi a^4$ .  
(b) 
$$E_r = \begin{cases} kqr^2/a^4, & r < a \\ kq/r^2, & r > a. \end{cases}$$
- $$E(r) = \begin{cases} 0, & r < a \\ 2\pi k \rho_0(r^2 - a^2)/r, & a \leq r \leq b \\ 2\pi k \rho_0(b^2 - a^2)/r, & r > b \end{cases} \quad (\text{na direcção radial}).$$



## 3. Potencial eléctrico



**Alessandro Volta (1745–1827)**

Alessandro Volta nasceu em Como, Itália. Em 1780, Volta mostrou que a origem da corrente eléctrica, descoberta por Luigi Galvani, não estava nos seres vivos mas sim no contacto entre dois metais diferentes num meio ionizado. Volta contrariava assim as afirmações de Galvani apoiadas em experiências com órgãos de animais e eletricidade. Decorrente destas suas investigações construiu as primeiras pilhas químicas no final do século XVIII, marcando o início do estudo da eletricidade e dos circuitos eléctricos. Estes estudos foram as bases do rápido desenvolvimento da teoria eletromagnética nas décadas seguintes. Volta também descobriu e isolou o gás metano e inventou o eletróforo, aparelho que permite produzir cargas eletrostáticas por atrito. Em 1801 fez uma demonstração da pilha química a Napoleão, que o condecorou com o título de conde. Foi diretor da Faculdade de Filosofia da Universidade de Pádua.

### 3.1. Trabalho e energia

Depois de termos estudado o campo eléctrico nos capítulos anteriores, interessa-nos agora determinar o efeito que este campo terá sobre o movimento de partículas com carga. O problema fundamental da mecânica consiste na determinação da trajetória dos objetos, conhecidas as forças que sobre eles actuam, ou o problema inverso, o do cálculo das forças que actuam a partir da observação do movimento do objeto. A trajetória de uma partícula define-se por meio do vetor posição,  $\vec{r}$ ,

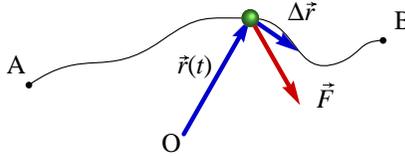
em função do tempo (Figura 3.1). A relação entre força e trajetória é dada pela segunda lei de Newton:

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = m \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}. \quad (3.1)$$

Se a força for constante, ou só depender do tempo, esta equação será fácil de integrar. No entanto, no caso de campos de força,  $\vec{F}$  é função da posição e a forma usual de resolver a equação de movimento consiste em calcular primeiro a velocidade em função da posição. Começamos por integrar os dois lados da equação, em função do deslocamento vetorial  $d\vec{r}$ , ao longo de um percurso qualquer entre os pontos A e B:

$$\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = m \int_A^B \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r}. \quad (3.2)$$

O termo no integral do lado direito da equação pode ser escrito só em função da



**Figura 3.1.:** Força resultante e deslocamento de uma partícula.

velocidade:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{v} \cdot \Delta\vec{r}}{\Delta t} = \vec{v} \cdot d\vec{v} = \frac{1}{2} d(v^2); \quad (3.3)$$

assim, o integral de linha de  $\vec{F}$  pode ser calculado em função da velocidade escalar  $v$ :

$$\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = m \int_A^B \vec{v} \cdot d\vec{v} = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2, \quad (3.4)$$

e define o **trabalho** entre os pontos A e B:

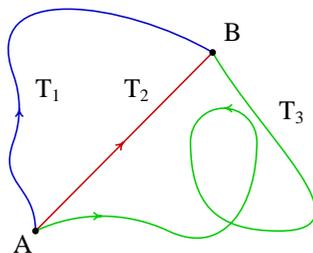
$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (3.5)$$

Sabendo que a **energia cinética** é definida por

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2, \quad (3.6)$$

e considerando as Equações (3.4) e (3.5) obtemos o chamado **teorema do trabalho e da energia**:

$$\boxed{W_{AB} = E_k(B) - E_k(A)}. \quad (3.7)$$



**Figura 3.2.:** Três possíveis percursos de integração entre dois pontos A e B.

O trabalho feito por uma força sobre uma partícula, ao longo de uma trajetória, é igual ao aumento da energia cinética da partícula.

Uma força diz-se **conservativa**, se o trabalho que realiza entre os pontos A e B é o mesmo, independentemente da trajetória entre os pontos (Figura 3.2). Neste caso é possível definir uma função  $E_p$  em cada ponto do espaço: começamos por definir arbitrariamente  $E_p(A)$  num ponto A; o valor de  $E_p(B)$ , em qualquer outro ponto B, define-se a partir do trabalho feito pela força, entre os pontos A e B:

$$\boxed{E_p(A) - E_p(B) = W_{AB}} . \quad (3.8)$$

Desta forma a definição de  $E_p(B)$  é consistente, já que o trabalho não depende do percurso de integração. A função  $E_p$  é a **energia potencial** associada à força conservativa. Combinando as Equações (3.4) e (3.8), obtém-se a **lei da conservação da energia mecânica**:

$$\boxed{E_k(A) + E_p(A) = E_k(B) + E_p(B)} . \quad (3.9)$$

A unidade usada para medir a energia, no sistema SI, é o joule ( $1 \text{ J} = 1 \text{ N} \cdot \text{m}$ ).

## 3.2. Diferença de potencial eletrostático

Vamos agora demonstrar que o campo elétrico é um campo conservativo, isto é, o trabalho realizado por um campo elétrico sobre uma carga pontual é independente do percurso. Começamos por considerar o campo elétrico mais simples, o campo produzido por uma carga pontual, e depois generalizaremos o resultado para campos mais complicados. O campo  $\vec{E}$  produzido por uma carga pontual  $q$ , na origem, é

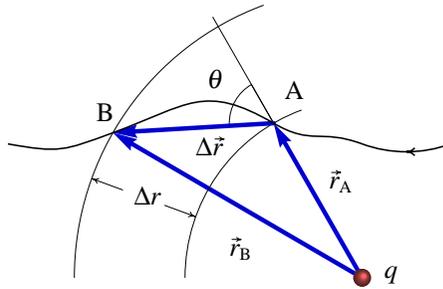
$$\vec{E} \cdot \Delta\vec{r} = \frac{kq}{r^2} (\hat{r} \cdot \Delta\vec{r}) . \quad (3.10)$$

Considerando o ângulo  $\theta$  que o deslocamento  $\Delta\vec{r}$  forma com o versor  $\hat{r}$  (Figura 3.3),  $\hat{r} \cdot \Delta\vec{r} = |\Delta\vec{r}| \cos \theta$  é aproximadamente igual a  $\Delta r$ . Assim, no limite  $\Delta s \rightarrow 0$ ,

$\hat{r} \cdot \Delta\vec{r} = dr$  e o trabalho feito pela força elétrica sobre uma carga de prova  $q_0$  é

$$W_{AB} = q_0 \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} = kq_0q \int_A^B \frac{dr}{r^2} = kq_0q \left( \frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right). \quad (3.11)$$

Este resultado não depende da trajetória, mas somente da posição dos pontos A e B, o que implica que o campo elétrico produzido por uma carga pontual é conservativo. Uma distribuição de cargas mais complexa pode ser simplificada se considerarmos que é igual à soma de pequenas cargas pontuais, sendo o resultado anterior válido para a força produzida por cada carga, e portanto, para a força total. Por conseguinte, o campo elétrico produzido por qualquer distribuição de carga é um campo conservativo<sup>1</sup>.



**Figura 3.3.:** Percurso entre dois pontos A e B separados na vizinhança de uma carga pontual.

Como o campo elétrico é conservativo, podemos definir a energia potencial elétrica de uma partícula pontual com carga  $q_0$ . Aplicando a Equação (3.8), obtemos

$$E_p(A) - E_p(B) = q_0 \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r}. \quad (3.12)$$

Definimos **potencial elétrico** como a energia potencial elétrica por unidade de carga:

$$V = \frac{E_p}{q_0}. \quad (3.13)$$

Assim, independentemente da carga de prova, a diferença de potencial elétrico entre os pontos A e B é

$$V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r}. \quad (3.14)$$

<sup>1</sup>Como veremos no Capítulo 10, as cargas elétricas não são as únicas fontes do campo elétrico; outra fonte do campo elétrico é a indução eletromagnética e, nesse caso, o campo não é conservativo.

A unidade SI de potencial elétrico é o volt (V), em homenagem ao físico italiano Alessandro Volta. Sendo o potencial definido como uma energia por unidade de carga, a relação entre o volt, o joule e o coulomb é

$$1 \text{ V} = 1 \frac{\text{J}}{\text{C}} = 1 \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{C}} . \quad (3.15)$$

Outra unidade de energia usada frequentemente é o **elétron-volt** (eV) definido como a energia adquirida por uma carga elementar  $e$  ao passar através de uma região onde existe uma diferença de potencial de 1 V:

$$1 \text{ eV} = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C} \cdot \text{V} = 1.6 \times 10^{-19} \text{ J} . \quad (3.16)$$

No caso de uma partícula pontual com carga  $q$  na origem, o potencial elétrico, considerando a Equação (3.11), é dado por

$$\boxed{V = \frac{kq}{r}} . \quad (3.17)$$

De notar que nesta equação podíamos somar qualquer constante arbitrária, sem contrariar a Equação (3.11), mas normalmente considera-se que  $V = 0$  para  $r \rightarrow \infty$  e, por isso, não incluímos a constante.

Para deslocar uma carga de prova  $q_0$  desde o ponto A até o ponto B, sem aceleração, é preciso aplicar uma força externa igual e oposta à força elétrica. O trabalho feito pela força externa é, nestas condições:

$$W_{AB}(\text{externo}) = -W_{AB}(\text{elétrico}) = q_0 V_B - q_0 V_A . \quad (3.18)$$

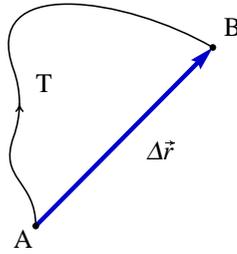
Se o ponto inicial A se encontrar a uma distância infinita, o potencial  $V_A$  será zero, por definição, e  $V_B$  será igual ao trabalho que a força externa tem de fazer para trazer a carga  $q_0 = 1$  desde o infinito até ao ponto B. O potencial elétrico  $V(\vec{r})$  é igual ao trabalho que deve ser feito para trazer uma unidade de carga positiva, desde o infinito até à posição  $\vec{r}$ .

O potencial  $V(\vec{r})$  constitui um campo escalar. Em cada ponto do espaço existe um valor numérico (escalar) do potencial.

### 3.3. Gradiente do potencial

A Equação (3.14) define o potencial elétrico associado a um determinado campo elétrico. O problema inverso, que abordaremos agora, é como calcular o campo elétrico dado um determinado potencial elétrico.

A diferença de potencial  $\Delta V = V_B - V_A$  entre dois pontos A e B é dada pelo integral de linha do campo elétrico, desde A até B, multiplicado por  $-1$ . Como o integral



**Figura 3.4.:** Percurso entre dois pontos separados pelo deslocamento  $\Delta\vec{r}$ .

pode ser calculado ao longo de qualquer percurso desde A até B, podemos usar o segmento de reta entre A e B (Figura 3.4). Quando os dois pontos se encontram muito perto um do outro, e admitindo que o campo  $\vec{E}$  é constante, podemos calcular o integral facilmente:

$$\Delta V \approx -\vec{E} \cdot \Delta\vec{r}, \quad (3.19)$$

onde  $\Delta\vec{r}$  é o deslocamento desde A até B, com módulo igual ao deslocamento escalar  $\Delta s$ .

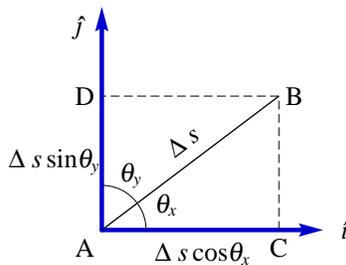
A aproximação torna-se exacta no limite  $\Delta s \rightarrow 0$ :

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta s} = -\vec{E} \cdot \hat{t}, \quad (3.20)$$

onde  $\hat{t}$  é o versor tangencial, na direcção e sentido do deslocamento de  $d\vec{r}$ . Este limite constitui a definição da derivada direccionada de uma função de várias variáveis, neste caso  $V$ , na direcção definida pelo versor  $\hat{t}$ . Temos então, o resultado importante

$$\boxed{\frac{dV}{ds} = -\vec{E} \cdot \hat{t}}. \quad (3.21)$$

A derivada do potencial eléctrico, em qualquer direcção  $\hat{t}$ , é igual a menos a componente do campo eléctrico nessa direcção.



**Figura 3.5.:** Projeções do deslocamento  $\Delta s$  nos eixos  $x$  e  $y$ .

Por simplicidade, considere-se que os pontos A e B estão num plano paralelo ao plano  $xy$ . As projeções do deslocamento sobre os eixos  $x$  e  $y$  são  $\Delta s \cos \theta_x$  e  $\Delta s \cos \theta_y$ , onde  $\theta_x$  e  $\theta_y$  são os ângulos que o versor  $\hat{i}$  faz com os versores  $\hat{i}$  e  $\hat{j}$ , respetivamente (Figura 3.5). O aumento do potencial ( $\Delta V$ ) desde A até B é igual à soma dos aumentos do potencial desde A até C, e desde C até B.

No limite  $\Delta s \rightarrow 0$ , se  $V$  for uma função contínua, o aumento de  $V$ , desde C até B, pode ser aproximado pelo aumento desde A até D (Figura 3.5). Os aumentos de  $V$ , por unidade de deslocamento, nas direções AC e AD, são as derivadas parciais de  $V$  em ordem a  $x$  e a  $y$ , respetivamente. Assim, temos

$$\Delta V \approx \Delta s \cos \theta_x \frac{\partial V}{\partial x} + \Delta s \cos \theta_y \frac{\partial V}{\partial y}. \quad (3.22)$$

Tendo em conta que:  $\cos \theta_x = \hat{i} \cdot \hat{i}$ ,  $\cos \theta_y = \hat{j} \cdot \hat{i}$ , então a derivada na direção de  $\hat{i}$  é

$$\frac{dV}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta s} = \left( \frac{\partial V}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \hat{j} \right) \cdot \hat{i}. \quad (3.23)$$

O cálculo anterior pode ser facilmente generalizado ao caso de três dimensões, e obtemos o resultado:

$$\frac{dV}{ds} = (\vec{\nabla} V) \cdot \hat{i}, \quad (3.24)$$

onde o vetor **gradiente do potencial**  $\vec{\nabla} V$  é definido como:

$$\vec{\nabla} V = \frac{\partial V}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{k}. \quad (3.25)$$

O resultado obtido é válido para qualquer campo escalar: a derivada direccional de um campo escalar (função de várias variáveis) contínuo é igual ao produto escalar entre o seu gradiente e o versor que define a direção. A Equação (3.25) define o gradiente em coordenadas cartesianas, mas, como o produto escalar é independente do sistema de coordenadas, a Equação (3.24) permite definir o gradiente em qualquer sistema de coordenadas.

No caso particular do potencial eletrostático, como vimos (Equação 3.21), a derivada direccional é também igual ao produto escalar entre  $-\vec{E}$  e o versor  $\hat{i}$ ; obtemos, assim, a relação que permite calcular o campo elétrico a partir do potencial:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V. \quad (3.26)$$

O valor máximo do produto escalar  $\vec{E} \cdot \hat{i}$  é igual ao módulo de  $\vec{E}$ , e obtém-se quando o versor  $\hat{i}$  tiver a direção do campo elétrico. Assim, dado um potencial  $V$ , o campo elétrico será na direção em que o potencial diminuir mais rapidamente, e o módulo do campo será igual ao valor absoluto da derivada nessa direção.

As linhas de campo elétrico estão sempre orientadas desde pontos de maior potencial para pontos de menor potencial. Uma vez que uma linha de campo passe por um ponto com um determinado potencial, não pode voltar a passar por pontos com um potencial igual ou superior. Esta é a razão pela qual as linhas de campo elétrico nunca podem ser fechadas.

Em coordenadas cartesianas, e considerando a Equação (3.26), as três componentes do campo elétrico, em função do potencial, são

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}. \quad (3.27)$$

A partir destas equações é fácil ver que as derivadas cruzadas do campo elétrico devem ser iguais:

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial E_z}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial z}. \quad (3.28)$$

A igualdade entre as derivadas cruzadas do campo elétrico é consequência direta da sua natureza conservativa; assim, uma forma rápida de descobrir se um campo vetorial qualquer é conservativo ou não, consiste em verificar a igualdade das suas derivadas cruzadas.

### Exemplo 3.1

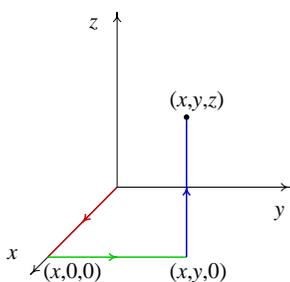
O campo elétrico numa região do espaço tem a forma

$$E_x = \frac{E}{A}(x - y), \quad E_y = -\frac{E}{A}(x + y), \quad E_z = 0,$$

onde  $A$  e  $E$  são duas constantes. Calcule o potencial num ponto qualquer dentro da região. (Admita  $V = 0$  na origem.)

Antes de calcular o potencial, convém verificar que o campo é conservativo, isto é,

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{E}{A}, \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial E_z}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0.$$



Existem duas formas de calcular o potencial eletrostático. A primeira consiste em calcular o integral de linha do campo; como o potencial é zero na origem, O, o potencial num ponto qualquer P é dado pelo integral

$$V_P = - \int_0^P \vec{E} \cdot d\vec{r} .$$

Usando o percurso representado na figura ao lado, composto por três segmentos de reta paralelos aos eixos, o integral de linha do campo é igual a:

$$V_P = - \int_0^x E_x(x, 0, 0) dx - \int_0^y E_y(x, y, 0) dy - \int_0^z E_z(x, y, z) dz ;$$

calculando os integrais, obtém-se

$$V_P = - \frac{E}{A} \left[ \int_0^x x dx - \int_0^y (x + y) dy \right] = \frac{E}{2A} (y^2 + 2xy - x^2) .$$

O segundo método para calcular o potencial elétrico consiste em escrever as três coordenadas do campo em função do potencial:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{E}{A}(y - x) , \quad \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{E}{A}(x + y) , \quad \frac{\partial V}{\partial z} = 0 , \quad (3.29)$$

e resolver o sistema de equações diferenciais. A terceira equação implica que  $V$  não depende de  $z$ :  $V = V(x, y)$ . Integrando a primeira equação em ordem a  $x$  obtemos

$$V(x, y) = \frac{E}{A} \int (y - x) dx = \frac{E}{A} (yx - \frac{x^2}{2}) + g(y) ,$$

onde  $g(y)$  é qualquer função arbitrária que só depende de  $y$ . A derivada parcial de  $V(x, y)$  em ordem a  $y$  é, então:

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{E}{A}x + \frac{dg}{dy} ,$$

e igualando à segunda equação no sistema de equações (3.29), obtemos

$$g = \frac{E}{2A}y^2 + C_1 ,$$

onde  $C_1$  é uma constante arbitrária.

O potencial é pois

$$V(x, y) = \frac{E}{2A} (y^2 + 2xy - x^2) + C_1 .$$

O valor da constante deve ser zero, se queremos que  $V$  seja nulo na origem.

**Exemplo 3.2**

Encontre as coordenadas esféricas do gradiente. Use o resultado para demonstrar que se o potencial depende unicamente da distância à origem,  $V = f(r)$  (sistemas com simetria esférica), o campo elétrico é  $\vec{E} = -f' \hat{r}$ .

Usando a Equação (3.24), vemos que as três coordenadas esféricas do gradiente são

$$\left(\frac{dV}{ds}\right)_{\hat{r}}, \quad \left(\frac{dV}{ds}\right)_{\hat{\theta}}, \quad \left(\frac{dV}{ds}\right)_{\hat{\phi}},$$

onde os versores  $\hat{r}$ ,  $\hat{\theta}$  e  $\hat{\phi}$  definem a direção em que cada coordenada ( $r$ ,  $\theta$ ,  $\phi$ ) aumenta (ver Apêndice A). Assim, o gradiente é igual a

$$\vec{\nabla}V = \left(\frac{dV}{ds}\right)_{\hat{r}} \hat{r} + \left(\frac{dV}{ds}\right)_{\hat{\theta}} \hat{\theta} + \left(\frac{dV}{ds}\right)_{\hat{\phi}} \hat{\phi}.$$

O deslocamento  $ds$ , na direção radial, é igual a  $dr$ . Na direção  $\hat{\phi}$ , em que unicamente  $\phi$  aumenta, o deslocamento  $ds$  é um arco de círculo de raio  $r$  e ângulo igual a  $d\phi$  e, portanto,  $ds = r d\phi$ . Na direção  $\hat{\theta}$ , em que unicamente  $\theta$  aumenta, o deslocamento infinitesimal é também um arco de círculo de raio  $r \sin \phi$  e ângulo igual a  $d\theta$ :  $ds = r \sin \phi d\theta$ . Substituindo na equação anterior, obtemos as coordenadas esféricas do gradiente:

$$\vec{\nabla}V = \frac{\partial V}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \phi} \hat{\phi} + \frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial V}{\partial \theta} \hat{\theta}.$$

O potencial com simetria esférica  $V = f(r)$  depende apenas de  $r$  e, portanto, as suas derivadas parciais em ordem a  $\phi$  e  $\theta$  são nulas; a derivada em ordem a  $r$  é uma derivada ordinária,  $f'$ . Nesse caso, o gradiente do potencial será

$$\vec{\nabla}V = f' \hat{r},$$

e, pela Equação (3.26), obtemos

$$\vec{E} = -f' \hat{r}. \quad (3.30)$$

As linhas de campo elétrico são na direção radial, mantendo a simetria esférica.

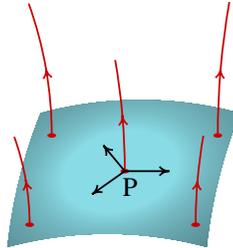
### 3.4. Superfícies equipotenciais

Os pontos do espaço nos quais o potencial tem o mesmo valor formam uma superfície contínua chamada **equipotencial**. Em cada ponto do espaço o potencial  $V$  tem um certo valor e, se o campo elétrico é diferente de zero, existe uma única superfície equipotencial que passa pelo ponto.

Considere-se um deslocamento na direção tangente à superfície equipotencial num ponto P (Figura 3.6). A derivada do potencial nessa direção é nula, pois o potencial não varia nessa direção:

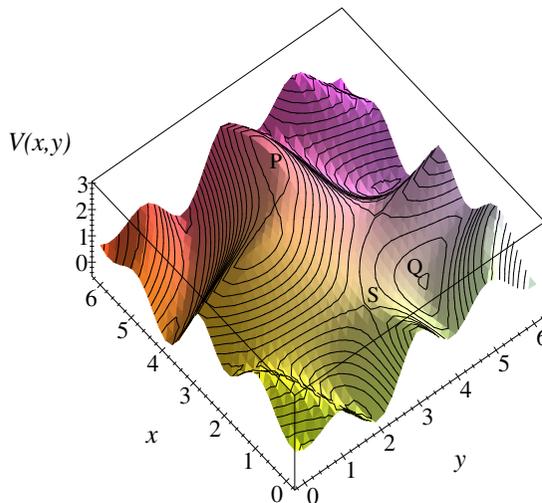
$$\frac{dV}{ds} = 0; \quad (3.31)$$

logo  $\vec{E} \cdot \hat{t} = 0$  e portanto as linhas de campo elétrico são perpendiculares às superfícies equipotenciais; as linhas apontarão para o lado da superfície equipotencial com menor potencial.



**Figura 3.6.:** Uma superfície equipotencial e 5 linhas de campo.

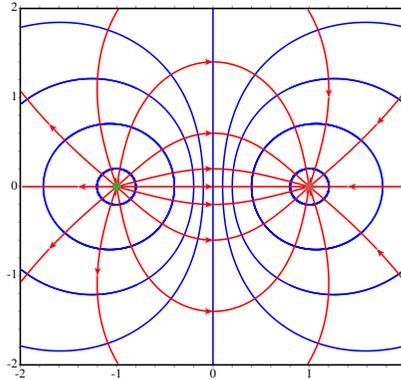
O potencial  $V(x, y)$ , sobre o plano  $xy$ , pode ser visualizado mais facilmente por meio de um gráfico onde o valor de  $V$  é representado no eixo  $z$  num sistema de eixos  $xyz$  (Figura 3.7). O potencial aparece como uma superfície geográfica com montanhas e vales. As curvas correspondentes a um determinado nível são as equipotenciais, e as linhas de campo são as trajetórias que a água seguiria ao descer pelas montanhas.



**Figura 3.7.:** Potencial no plano  $xy$ , representado num gráfico a 3 dimensões.

Os pontos críticos do potencial  $V(x, y, z)$  — onde a derivada em qualquer direção é nula — podem ser máximos, mínimos ou **pontos de sela**. Em todos estes pontos o campo elétrico é igual a zero.

Nos pontos máximos, o potencial diminui em qualquer direção e, portanto, as linhas de campo saem em todas as direções, existindo uma distribuição de carga positiva na vizinhança do ponto (ponto P na Figura 3.7).

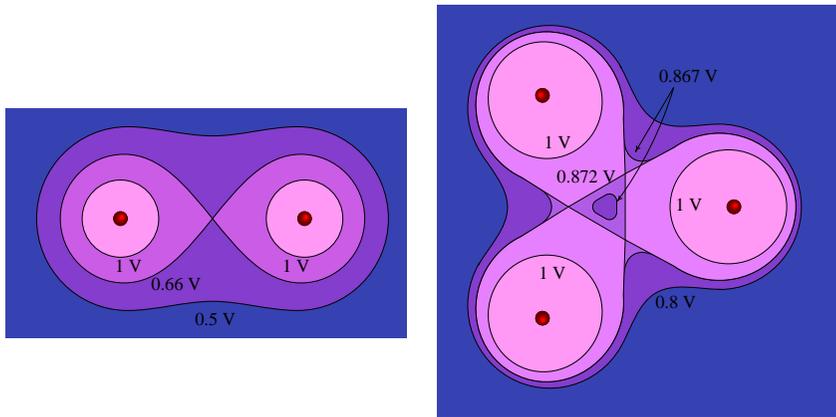


**Figura 3.8.:** Equipotenciais e campo de um dipolo elétrico.

Nos pontos mínimos, o potencial aumenta em todas as direções, e as linhas de campo apontam na direção do ponto, existindo uma distribuição de carga negativa na região (ponto Q na Figura 3.7). Um exemplo é o potencial de um dipolo elétrico (Figura 3.8); cada carga pontual é um ponto crítico onde  $V \rightarrow \infty$  ou  $V \rightarrow -\infty$ , consoante a carga seja positiva ou negativa, respetivamente.

O terceiro tipo de pontos críticos, pontos de sela, são pontos onde o potencial aumenta em algumas direções e diminui noutras, por exemplo, o ponto S na Figura 3.7. Nos pontos de sela existe um cruzamento de curvas equipotenciais e o campo elétrico é nulo; no Capítulo 1 já vimos que nesses pontos entram e saem linhas de campo elétrico.

Dois outros exemplos de pontos de sela são apresentados na Figura 3.9. O primeiro exemplo corresponde ao potencial de um sistema de duas cargas iguais; existe um ponto de sela no ponto equidistante às duas cargas, onde as duas superfícies equipotenciais se cruzam. O segundo exemplo é o potencial de três cargas idênticas localizadas nos vértices de um triângulo equilátero; existem quatro pontos de sela onde o campo elétrico é nulo; três dos pontos de sela são óbvios na Figura 3.9. O quarto ponto é o ponto equidistante às três cargas, onde também existe interseção de duas superfícies equipotenciais (como as duas superfícies se cruzam em direções fora do plano  $xy$  não aparecem na figura). Sobre o plano  $xy$  o potencial no ponto equidistante às três cargas é, como mostra a figura, menor que em qualquer outro ponto na sua vizinhança, o que não implica que o ponto seja um mínimo, já que na



**Figura 3.9.:** À esquerda, equipotenciais de duas cargas iguais e à direita equipotenciais de três cargas iguais.

direção  $z$  o potencial diminui.

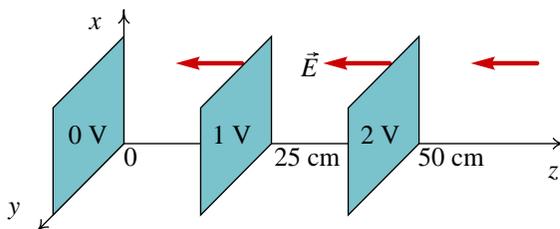
Podem também existir regiões do espaço onde o campo é nulo, sendo o potencial constante em toda a região. Nesse caso temos um **volume equipotencial**; um exemplo é o volume dentro de um condutor em equilíbrio eletrostático.

### Exemplo 3.3

Encontre o campo elétrico e as superfícies equipotenciais correspondentes ao potencial  $V(x, y, z) = az$ , com  $a = 4 \text{ V/m}$ .

A equação das superfícies equipotenciais é  $az = \text{constante}$ , a qual representa planos paralelos ao plano  $xy$ . Por exemplo, as superfícies equipotenciais com  $V = 0 \text{ V}$ ,  $1 \text{ V}$  e  $2 \text{ V}$ , são os planos  $z = 0$ ,  $z = 25 \text{ cm}$  e  $z = 50 \text{ cm}$  representados na Figura 3.10. O campo elétrico é uniforme:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V = -\frac{\partial V}{\partial z} \hat{k} = -4 \hat{k} \text{ V/m} .$$



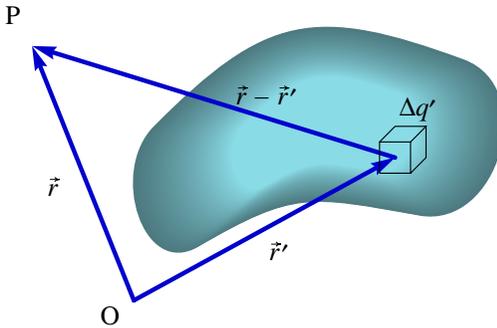
**Figura 3.10.:** Equipotenciais de um campo uniforme.

### 3.5. Cálculo do potencial elétrico

Para calcular o potencial produzido por uma distribuição de carga, podemos dividir o volume em  $n$  pequenos elementos com carga  $\Delta q_i$  (Figura 3.11). O potencial calcula-se como a sobreposição dos potenciais produzidos por cada elemento, considerado como uma carga pontual. O potencial devido a cada pequeno elemento é dado, aproximadamente, pela Equação (3.17). A aproximação será exacta no limite  $n \rightarrow \infty$  ( $\Delta q_i \rightarrow 0$ ), e o resultado obtido é

$$V = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{k \Delta q_i}{r_i}, \quad (3.32)$$

onde  $\Delta q_i$  é a carga dentro do elemento número  $i$ , e  $\vec{r}_i$  é o vetor que une o ponto onde se encontra a carga  $\Delta q_i$  ao ponto onde se pretende calcular o campo.



**Figura 3.11.:** Distribuição contínua de carga dividida em pequenas regiões.

Como já vimos no caso do campo elétrico (Secção 1.7), a carga pode estar distribuída num volume com carga volúmica  $\rho$ , sobre uma superfície com carga superficial  $\sigma$ , ou ao longo de uma curva com carga linear  $\lambda$ .

No caso de uma carga distribuída dentro de um volume, o potencial é um integral de volume:

$$V = k \iiint_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV', \quad (3.33)$$

onde  $\vec{r}'$  varia dentro da região de integração.

Se a carga estiver distribuída sobre uma superfície, o potencial será um integral de superfície:

$$V = k \iint_S \frac{\sigma(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dA'. \quad (3.34)$$

Finalmente, se a carga estiver distribuída sobre uma curva, o potencial será calcu-

lado através de um integral de linha:

$$V = k \int_L \frac{\lambda(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} ds' . \quad (3.35)$$

Os integrais que definem o potencial são semelhantes aos integrais usados para calcular o campo (Capítulo 1). No entanto, é preciso calcular um integral e não três (para as três componentes) como no caso do campo elétrico. Para calcular o campo elétrico de distribuições de carga é mais fácil calcular primeiro o potencial por integração, e obter o campo a partir do gradiente do potencial. Quando for possível calcular o campo elétrico usando a lei de Gauss, é mais conveniente calcular o potencial a partir do campo, através da Equação (3.14), usando qualquer percurso de integração.

### Exemplo 3.4

Calcule o potencial e o campo elétrico devidos a uma esfera condutora de raio  $a$ , com carga  $Q$ .

Como a esfera é condutora, a carga distribuir-se-á na superfície. Vamos calcular o potencial a partir da carga superficial, por meio do integral duplo da Equação (3.34). Por simetria, a carga superficial deve ser constante:

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi a^2} .$$

Podemos escolher o eixo  $z$  na direção do ponto  $P$  onde se pretende calcular o potencial, e usar coordenadas esféricas (Figura 3.12).

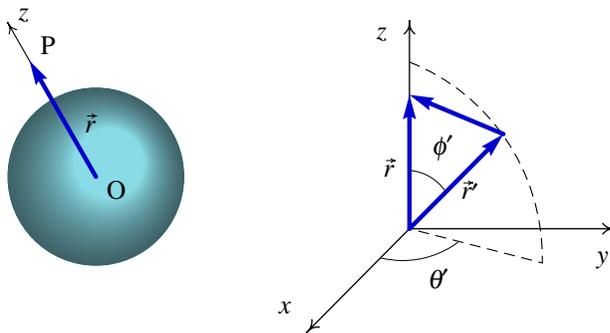


Figura 3.12.: Coordenadas esféricas.

O ponto  $P$  encontra-se na posição  $\vec{r} = r \hat{k}$  e o vetor  $\vec{r}'$ , que define qualquer ponto sobre a superfície da esfera, tem módulo constante igual a  $a$  e forma um ângulo  $\phi$

com o vetor  $\vec{r}$ , de maneira que

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = (a^2 + r^2 - 2ar \cos \phi')^{1/2}. \quad (3.36)$$

Em coordenadas esféricas, o elemento diferencial de superfície sobre a esfera é

$$dA' = a^2 \sin \phi' d\theta' d\phi',$$

e o integral do potencial é

$$V = \frac{kQ}{4\pi a^2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} a^2 \sin \phi' (a^2 + r^2 - 2ar \cos \phi')^{-1/2} d\theta' d\phi';$$

o integral em  $\theta'$  é igual a  $2\pi$ , logo obtemos

$$V = \frac{kQ}{2} \int_0^\pi \sin \phi' (a^2 + r^2 - 2ar \cos \phi')^{-1/2} d\phi'.$$

A primitiva calcula-se facilmente, já que a derivada do termo entre parênteses é igual a  $2ar \sin \phi'$ :

$$V = \frac{kQ}{2ar} \sqrt{a^2 + r^2 - 2ar \cos \phi'} \Big|_{\phi'=0}^{\phi'=\pi} = \frac{kQ}{2ar} (a+r - |a-r|).$$

Se o ponto P estiver no interior da esfera  $|a-r| = a-r$ , e o potencial é constante:

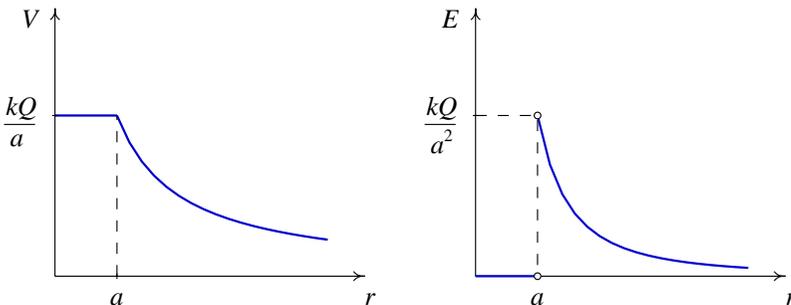
$$V = \frac{kQ}{a}.$$

Para pontos no exterior da esfera  $|a-r| = r-a$ , e o potencial é

$$V = \frac{kQ}{r}.$$

No interior da esfera, como o potencial é constante, o campo elétrico é nulo (Figura 3.13). No exterior da esfera, como o potencial só depende de  $r$ , podemos usar o resultado do Exemplo 3.2 para calcular o campo:

$$\vec{E} = -\frac{dV}{dr} \hat{r} = \frac{kQ}{r^2} \hat{r}.$$



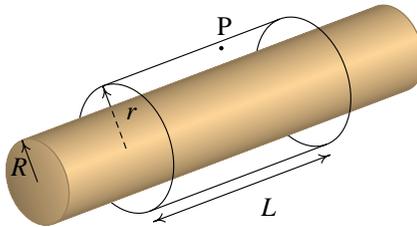
**Figura 3.13.:** Potencial e campo elétrico de uma esfera condutora.

O exemplo anterior podia também ser resolvido por outro método: calcula-se primeiro o campo por meio da lei de Gauss e a partir do campo obtém-se o potencial. O exemplo seguinte ilustra esse método.

**Exemplo 3.5**

Calcule o potencial produzido por um cilindro muito comprido, de raio  $R$ , com carga volúmica  $\rho$  constante.

Neste caso calcularemos primeiro o campo elétrico e a partir dele o potencial. As linhas de campo elétrico têm que sair na direção radial (simetria cilíndrica) e qualquer cilindro co-axial ao cilindro carregado constitui uma superfície gaussiana (Figura 3.14).



**Figura 3.14.:** Cilindro muito comprido e superfície gaussiana.

O fluxo através da superfície gaussiana é

$$\phi = 2\pi rLE ,$$

onde  $L$  e  $r$  são o comprimento e o raio do cilindro gaussiano, respetivamente. A carga no interior da superfície gaussiana é

$$q_{\text{int}} = \begin{cases} \pi R^2 L \rho , & r \leq R \\ \pi r^2 L \rho , & r > R . \end{cases}$$

Usando a lei de Gauss obtemos o campo elétrico:

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{2\pi k \rho R^2}{r} \hat{r} , & r \geq R \\ 2\pi k \rho r \hat{r} , & r \leq R . \end{cases}$$

Se escolhermos  $V = 0$  sobre o eixo do cilindro,  $r = 0$ , o potencial será

$$V(s) = - \int_0^s \vec{E} \cdot d\vec{r} .$$

Se o percurso de integração for o segmento de reta desde o eixo até ao ponto P, como o campo é radial,  $\vec{E} \cdot d\vec{r} = E dr$ , e o integral de linha será

$$\int_0^r E dr = \begin{cases} 2\pi k \rho R^2 \ln r, & s \geq R \\ \pi k \rho r^2, & r \leq R. \end{cases}$$

Para pontos no interior do cilindro,  $r < R$ , obtemos

$$V = - \int_0^s E dr = -\pi k \rho r^2,$$

enquanto que para pontos no exterior do cilindro,  $r \geq R$ , o resultado é

$$V = - \int_0^R E dr - \int_R^r E dr = -\pi k \rho R^2 - 2\pi k \rho R^2 (\ln r - \ln R).$$

Assim, o potencial em qualquer ponto é

$$V(\vec{r}) = \begin{cases} -\pi k \rho r^2, & r \leq R \\ -2\pi k \rho R^2 \ln\left(\frac{\sqrt{e} r}{R}\right), & r \geq R. \end{cases} \quad (3.37)$$

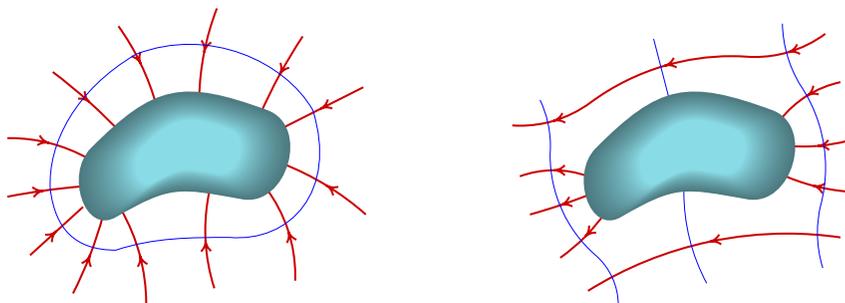
---

Neste exemplo, se tive-se sido escolhido  $V = 0$  em  $r \rightarrow \infty$  o integral do campo elétrico seria divergente, uma vez que o campo elétrico em  $r \rightarrow \infty$  não é nulo (o cilindro é infinito). Em sistemas físicos mais realistas, sem cargas no infinito, não existe esse problema e pode admitir-se sempre potencial nulo no infinito.

### 3.6. Potencial e carga nos condutores

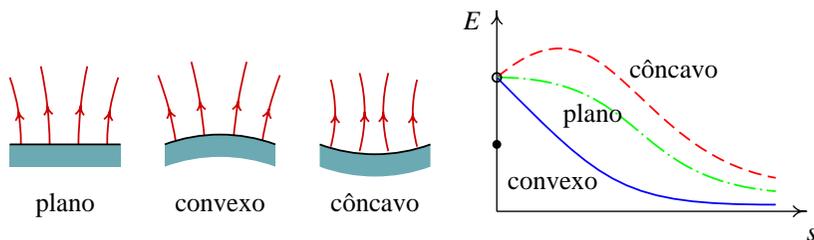
O campo elétrico na superfície de um condutor em equilíbrio é perpendicular à superfície, como já vimos no Capítulo 2. Como qualquer superfície perpendicular ao campo elétrico é necessariamente uma equipotencial, concluímos que a superfície do condutor é sempre uma superfície equipotencial. Dentro do condutor o campo elétrico é nulo, o que implica um potencial constante dentro do condutor (Figura 3.15).

Como também já vimos no Capítulo 2, num condutor em equilíbrio, qualquer excesso de carga distribui-se sempre sobre a superfície; não obstante, a distribuição de carga não pode ser uniforme como veremos já a seguir. Consideremos primeiro três condutores diferentes com a mesma carga superficial  $\sigma$ , como se mostra na Figura 3.16. Um dos condutores é plano, o outro convexo e o último é côncavo.



**Figura 3.15.:** Equipotenciais e campo de um condutor com carga negativa (à esquerda) e de um condutor sem carga, dentro de um campo externo (à direita).

Nos três casos a separação das linhas de campo sobre a superfície deve ser a mesma, e o campo é igual nos três casos quando a distância  $d$  a partir da superfície for igual a zero. À medida que  $d$  aumenta, como as linhas de campo são perpendiculares à superfície do condutor, a separação das linhas vai ser maior no caso do condutor convexo, e menor no caso do condutor côncavo; no caso do condutor côncavo, as linhas de campo acabam por se afastar à medida que  $d$  aumenta. Como o campo elétrico é inversamente proporcional à distância entre as linhas de campo, o campo produzido pelos três condutores é o representado na Figura 3.16.

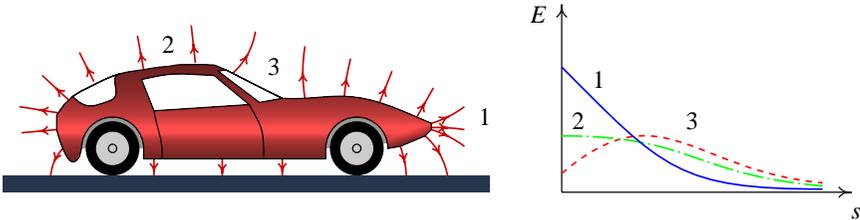


**Figura 3.16.:** Três condutores com a mesma carga superficial e o campo produzido em função da distância à superfície.

O potencial de cada um dos condutores na Figura 3.16 obtém-se integrando o campo elétrico desde a superfície ( $d = 0$ ) até o infinito (onde  $V = 0$ ). Na figura, os valores dos três potenciais correspondem às áreas abaixo das três curvas do campo elétrico. Vemos, claramente, que o condutor côncavo se encontra a um potencial maior que o condutor plano, e estes dois condutores estão a um potencial maior que o condutor convexo.

Em pontos diferentes da superfície de um condutor, o potencial é sempre o mesmo.

Portanto, a carga superficial não pode ser a mesma nos pontos onde o condutor é côncavo, convexo ou plano. A carga superficial tem que ser maior nas regiões convexas, menor nas regiões planas e ainda menor nas regiões côncavas. Desta forma obtém-se o mesmo valor para o integral do campo elétrico, como se mostra na Figura 3.17.



**Figura 3.17.:** Campo elétrico em três regiões de um automóvel carregado, em função da distância desde a superfície.

Nas regiões convexas, quanto menor for o raio da curvatura, maior será a carga superficial, e nas regiões côncavas quanto maior for o raio da curvatura, maior será a carga superficial. Este efeito é aproveitado nos pára-raios. Durante uma tempestade as nuvens acumulam cargas elevadas que, por sua vez, induzem cargas nos objetos que se encontram nas proximidades. Quando o campo é suficientemente forte ocorre uma descarga elétrica entre a nuvem e o ponto onde o campo for mais elevado. Uma vez que o campo será mais forte onde houver maior carga induzida, ou seja, nos objetos mais pontiagudos e mais próximos das nuvens (os pára-raios), as descargas elétricas atingirão o pára-raios, sendo conduzidas até à terra e minimizando os estragos.

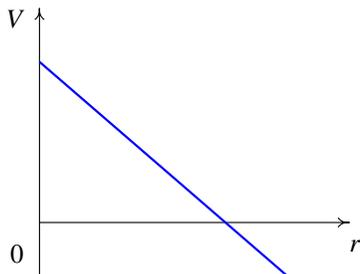
## Perguntas

- O potencial produzido por um sistema de duas cargas pontuais,  $Q$  e  $q$ , é nulo num ponto P (arbitrando potencial nulo a uma distância infinita das cargas). Isso implica que:
  - A força sobre uma carga de prova no ponto P é nula.
  - $Q$  e  $q$  têm o mesmo sinal.
  - O campo elétrico é nulo no ponto P.
  - O trabalho total necessário para trazer as cargas  $Q$  e  $q$  até às suas posições é nulo.
  - O trabalho necessário para trazer uma carga desde o infinito até o ponto P é nulo.
- Uma carga de  $4 \mu\text{C}$  encontra-se dentro de um campo elétrico com módulo igual a  $4 \times 10^5 \text{ N/C}$ . Qual é o trabalho necessário para deslocar essa

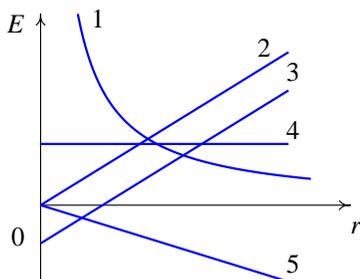
carga uma distância de 20 cm numa direção a  $60^\circ$  com o campo elétrico?

- A. 0.28 J                      D. 28 J  
 B. 160 mJ                      E. 16 J  
 C. 0.68 J

3. O potencial elétrico de um sistema, em função da distância ao longo de uma direção dada é representado pelo gráfico:

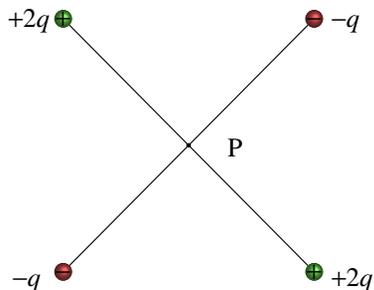


Qual das cinco funções no gráfico a seguir representa melhor a componente do campo ao longo da mesma direção?



- A. 1                      C. 3                      E. 5  
 B. 2                      D. 4

4. Quatro cargas pontuais, com valores  $+2q$  e  $-q$ , encontram-se nos vértices de um quadrado, como mostra a figura. O que é que possível afirmar acerca do potencial ( $V$ ) e do módulo do campo ( $E$ ) no centro do quadrado (P)?



- A.  $E \neq 0, V > 0$     D.  $E \neq 0, V < 0$   
 B.  $E = 0, V = 0$     E.  $E \neq 0, V \neq 0$   
 C.  $E = 0, V > 0$

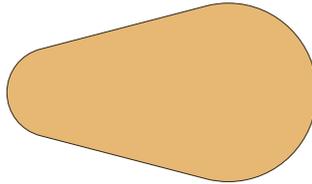
5. Perto de uma carga pontual existe um ponto onde o potencial elétrico produzido pela carga é 3 V (arbitrando potencial nulo no infinito) e o módulo do campo elétrico da carga é 200 N/C. Calcule a distância desde a carga até ao ponto.

- A. 3 m                      D. 0.67 cm  
 B. 3 cm                      E. 6.7 cm  
 C. 1.5 cm

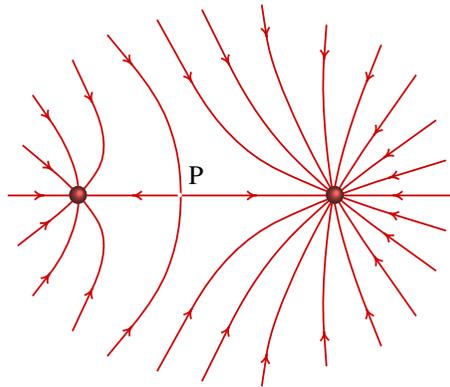
## Problemas

1. Quando um eletrão é acelerado, a partir do repouso, através de uma diferença de potencial de 220 V, fica com uma energia cinética de 220 eV. Calcule a velocidade final do eletrão.

2. Num tubo de raios  $x$  os elétrons são acelerados por meio de um campo elétrico. Os elétrons são libertados do repouso, deslocam-se no vácuo através de uma região onde existe uma diferença de potencial de 4 kV, e chocam com um alvo emitindo radiação  $x$ .
- (a) Calcule a energia e a velocidade com que chocam os elétrons no alvo.
- (b) Se a variação de potencial se estender por uma distância de 8 dm, calcule o valor médio do campo elétrico nessa região.
3. Trace as linhas de campo elétrico e as superfícies equipotenciais nas proximidades e nos pontos afastados do condutor representado na figura, admitindo que existe carga positiva nele.



4. A figura representa as linhas de campo eletrostático de duas partículas carregadas e separadas por uma distância de 7 cm.
- (a) Calcule a distância do ponto P às partículas.
- (b) Sabendo que a carga da partícula no lado direito é de  $-8$  nC, calcule o potencial no ponto P (arbitre  $V = 0$  no infinito).

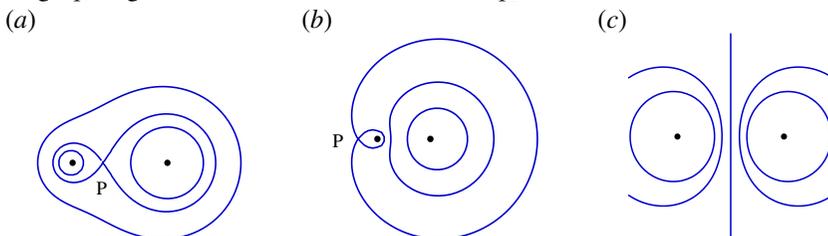


5. Duas superfícies condutoras esféricas e concêntricas têm raios de 5 cm e 7 cm. A superfície menor tem carga total de 3 nC e a carga total na superfície maior é  $-2$  nC. Qual é a diferença de potencial entre as duas superfícies?
6. O potencial sobre o plano  $xy$  é

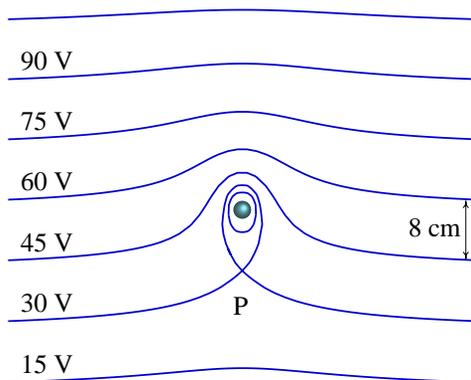
$$V = \frac{ax}{(x^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{b}{(x^2 + y^2)^{1/2}}$$

Determine a expressão do campo elétrico em qualquer ponto do plano  $xy$ .

7. Demonstre que o campo vetorial  $A\vec{r}$ , em que  $A$  é uma constante e  $\vec{r}$  o vetor posição, é conservativo. Calcule o potencial correspondente a esse campo.
8. A três figuras seguintes representam as superfícies equipotenciais de três sistemas de duas cargas pontuais  $q_1$  e  $q_2$ . Em todos os casos  $q_1 = 3 \text{ nC}$ , e a distância entre as duas cargas é 6 cm. Nas figuras (a) e (b) a distância entre o ponto P e a carga  $q_1$  é igual a 2 cm. Determine o valor de  $q_2$  nos três casos.



9. A figura mostra as superfícies equipotenciais de uma carga pontual no interior de um campo elétrico uniforme  $\vec{E}_{\text{ext}}$ . A grandes distâncias da carga pontual as superfícies são planos paralelos distanciados 8 cm.
- (a) Calcule o módulo e a direção do campo externo  $\vec{E}_{\text{ext}}$ .
- (b) Diga se a carga pontual é positiva ou negativa. Justifique.
- (c) Qual é a direção da força sobre a carga pontual?
- (d) Sabendo que a distância entre a carga pontual e o ponto P é 9 cm, calcule o valor da carga pontual.



10. Um dipolo elétrico é formado por uma carga  $+q$  na posição  $(a/2)\hat{i}$  e uma carga  $-q$  na posição  $-(a/2)\hat{i}$ .
- (a) Encontre a expressão do potencial  $V$  em qualquer ponto  $(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})$ .
- (b) Determine a expressão do campo elétrico em qualquer ponto a partir do gradiente do potencial:  $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$ .

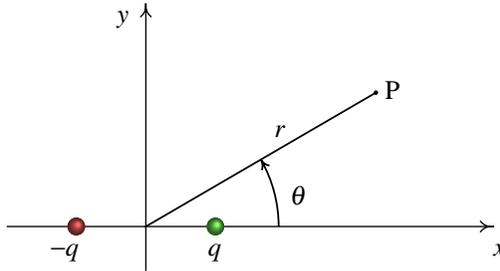
11. No dipolo do exemplo anterior, um ponto P sobre o plano do dipolo (plano  $xy$ ) tem coordenadas polares  $r$  e  $\theta$ , como se mostra na figura.

(a) Determine a expressão do potencial elétrico no ponto P em função das coordenadas polares.

(b) Para um valor fixo do ângulo  $\theta$  e para  $r \gg a/2$ , mostre que uma boa aproximação para o potencial é

$$V \approx \frac{k p \cos \theta}{r^2}$$

onde  $p = qa$  é o **momento dipolar**. (*Sugestão*: use a aproximação  $r^2 + a^2/4 \approx r^2$  e a expansão do binómio de Newton.)



12. Um disco de raio  $R$  tem carga superficial  $\sigma$  uniforme. Determine o potencial e o campo elétrico num ponto qualquer P sobre o eixo do disco.

13. O campo elétrico numa região do espaço é igual a

$$\vec{E} = C [(x-1)\hat{i} + x\hat{j} + x\hat{k}] e^{-x-y-z}$$

onde  $C = 5 \text{ V/cm}$ , e as coordenadas  $x$ ,  $y$  e  $z$  são medidas em centímetros.

(a) Demonstre que o campo  $\vec{E}$  é conservativo.

(b) Determine a expressão do potencial eletrostático.

(c) Determine a carga total dentro do cubo definido por  $0 \leq x \leq 2 \text{ cm}$ ,  $0 \leq y \leq 2 \text{ cm}$  e  $0 \leq z \leq 2 \text{ cm}$ . (*Sugestão*: calcule o fluxo elétrico nas seis faces do cubo e aplique a lei de Gauss.)

14. Determine a expressão do campo elétrico associado ao potencial

$$V(r, \theta, \phi) = \frac{a}{r} \cos \theta + \frac{b}{r^2}$$

onde  $a$  e  $b$  são constantes e  $(r, \theta, \phi)$  são as coordenadas esféricas.

15. Calcule as coordenadas cilíndricas do gradiente do potencial. Use o resultado para encontrar o campo elétrico correspondente ao potencial

$$V(R, \theta, z) = \frac{\sin \theta}{R} \exp(-z^2)$$

16. Determine as condições que devem cumprir as componentes esféricas de um campo vetorial para ser campo conservativo.

## Respostas

**Perguntas:** 1. E. 2. B. 3. D. 4. C. 5. C.

### Problemas

- $8.80 \times 10^6$  m/s.
- (a)  $E = 6.4 \times 10^{-16}$  J,  $v = 37.5$  Mm/s. (b) 5 kV/m.
- (a) 4.2 cm e 2.8 cm. (b)  $-2858.56$  V.
- 154.3 V.
- $E_x = \frac{2ax^2 - ay^2 + bx^3 + bxy^2}{(x^2 + y^2)^{5/2}}, E_y = \frac{y(3ax + bx^2 + by^2)}{(x^2 + y^2)^{5/2}},$   
 $E_z$  não pode ser calculado com a informação dada.
- $V = -Ar^2/2.$
- (a) 12 nC. (c)  $-3$  nC.  
(b)  $-48$  nC.
- (a) 187.5 V/m, para baixo. (c) para cima.  
(b) negativa. (d)  $-0.169$  nC.
- (a)  $V = \frac{kq}{\sqrt{(x-a/2)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{kq}{\sqrt{(x+a/2)^2 + y^2 + z^2}}.$   
(b)  $\vec{E} = \frac{kq[(x-a/2)\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}]}{[(x-a/2)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} - \frac{kq[(x+a/2)\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}]}{[(x+a/2)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}}.$
- (a)  $V = \frac{kq}{\sqrt{r^2 + a^2/4 - ar \cos \theta}} - \frac{kq}{\sqrt{r^2 + a^2/4 + ar \cos \theta}}.$
- $V = 2\pi k \sigma (\sqrt{r^2 + R^2} - r), \vec{E} = 2\pi k \sigma \left(1 - \frac{r}{\sqrt{r^2 + R^2}}\right) \hat{r}.$
- (b) Arbitrando  $V = 0$  no infinito,  $V = Cx e^{-x-y-z}.$   
(c)  $q = \epsilon_0 C(7e^{-6} - 15e^{-4} + 9e^{-2} - 1) = -0.174$  fC.
- $\vec{E} = \left(\frac{2a}{r^3} + \frac{b}{r^2}\right) \hat{r} + \frac{a \sin \theta}{r^3 \sin \phi} \hat{\theta}.$
- $\vec{\nabla}V = \frac{\partial V}{\partial R} \hat{R} + \frac{1}{R} \frac{\partial V}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{k},$

$$\vec{E} = \left( \frac{\sin \theta}{R^2} \hat{R} - \frac{\cos \theta}{R^2} \hat{\theta} + \frac{2z \sin \theta}{R} \hat{k} \right) \exp(-z^2).$$

16.  $\frac{\partial E_r}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial r}(r \sin \phi E_\theta), \quad \frac{\partial E_r}{\partial \phi} = \frac{\partial}{\partial r}(r E_\phi), \quad \frac{\partial}{\partial \theta}(r E_\phi) = \frac{\partial}{\partial \phi}(r \sin \phi E_\theta).$

## 4. Equações fundamentais da eletrostática

George Green (1793–1841)

Não existem retratos deste físico e matemático inglês. Uma vez que passou a maior parte da sua vida a trabalhar no moinho de seu pai em Nottingham, e que só frequentou dois anos do ensino elementar, não é claro como aprendeu a matemática. Com 30 anos, Green tornou-se membro da *Subscription Library*, Nottingham, instituição fundada em 1816 e que tinha como objetivo ser um ponto de reunião de não-acadêmicos para discutir os avanços da ciência. Aos 35 anos publicou a primeira e mais importante obra sobre a aplicação da análise matemática à teoria da eletricidade e ao magnetismo. Esta obra, de tiragem bastante reduzida, foi financiada pelo autor e por alguns membros da *Subscription Library*. Foi a primeira pessoa a usar o termo **potencial** na teoria do campo e introduziu vários teoremas de análise vetorial que permitiram calcular o potencial eletrostático. Com 40 anos ingressou na Universidade de Cambridge como estudante de licenciatura. Seis anos depois, saiu de Cambridge e voltou a Nottingham para tomar conta dos seus filhos e trabalhar no seu moinho. Posteriormente William Thomson (Lord Kelvin), descobriu o trabalho de Green e conseguiu que fosse publicado num jornal importante (1850 e 1854). Nessa altura, outros cientistas, entre eles Gauss, e de forma independente, tinham chegado a alguns dos resultados obtidos por Green. O trabalho de Green teve grande influência em Thomson, Stokes e Maxwell.

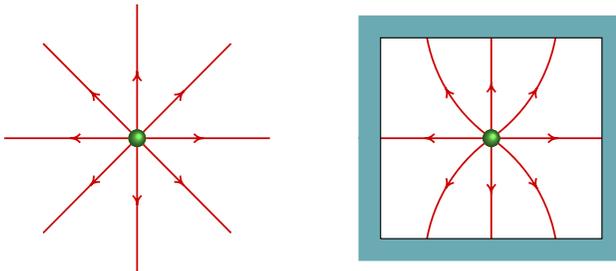
Para calcular a interação eletrostática entre objetos com carga, introduzimos no Capítulo 1 o campo elétrico como mediador da força elétrica. Os três primeiros capítulos têm apresentado diferentes métodos para calcular o campo elétrico de uma distribuição de carga. Vimos que em alguns casos simples podemos aproveitar a lei de Gauss para calcular o campo, mas, em geral, a lei de Gauss não é útil, e o único método geral consiste em calcular o integral que define o campo, ou o potencial, em função da carga volúmica. Veremos as limitações desse método e introduziremos as equações mais fundamentais da eletrostática que permitem o cálculo do campo elétrico em situações práticas.

## 4.1. Limitações da lei de Coulomb

O potencial devido a uma carga distribuída dentro de um volume, com carga volúmica  $\rho(\vec{r}')$ , é dado pelo integral

$$V(\vec{r}) = k \iiint \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' . \quad (4.1)$$

O integral tem de ser calculado sobre todo o espaço onde exista carga e, portanto, é preciso conhecer a carga volúmica em todos os pontos  $\vec{r}'$  onde  $\rho \neq 0$ , e não só nos pontos  $\vec{r}$  onde nos interessa calcular o campo. Em problemas práticos só temos informação acerca de uma determinada região, e esperamos poder calcular o campo pelo menos dentro dessa região.



**Figura 4.1.:** Campo elétrico de uma carga pontual livre e de uma carga pontual dentro de uma caixa metálica.

Considere-se, por exemplo, uma carga pontual  $q$  dentro de uma caixa metálica como mostra a Figura 4.1. Para calcular o campo elétrico a única carga existente dentro da caixa é a carga  $q$ , mas as linhas de campo dentro da caixa não correspondem às linhas de campo de uma carga pontual pois, como já vimos, as linhas de campo devem ser perpendiculares à superfície metálica. É claro que neste problema existem outras cargas induzidas na superfície metálica, as quais não podemos

calcular facilmente; além disso podem existir outras cargas no exterior da caixa metálica. Existe um método que permite calcular o campo elétrico no interior da caixa, sem precisar de qualquer informação sobre o que se passa no exterior, nem da carga induzida, sendo apenas necessário conhecer algumas condições na fronteira.

## 4.2. Divergência

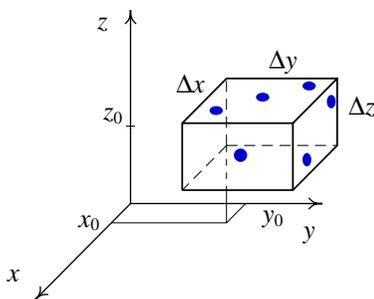
Uma função associada a qualquer campo vetorial é a chamada **divergência**, definida como o **fluxo por unidade de volume** num ponto. Consideremos um campo vetorial qualquer  $\vec{F}$  e as suas coordenadas cartesianas:

$$\vec{F}(\vec{r}) = F_x(\vec{r}) \hat{i} + F_y(\vec{r}) \hat{j} + F_z(\vec{r}) \hat{k} . \quad (4.2)$$

Consideremos também o paralelepípedo da Figura 4.2 de arestas  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  e  $\Delta z$  definido pelas condições:

$$|x - x_0| < \Delta x , \quad |y - y_0| < \Delta y , \quad |z - z_0| < \Delta z . \quad (4.3)$$

Queremos calcular o fluxo do campo  $\vec{F}$  através da superfície fechada do parale-



**Figura 4.2.:** Paralelepípedo com as suas 6 faces numeradas à semelhança de um dado.

lepípedo. Para facilitar o cálculo, numeremos as seis faces de forma que a soma dos números em faces opostas seja sempre 7, como se fosse um dado (ver Figura 4.2). Por exemplo, a face número 1 é formada por todos os pontos  $(x, y, z)$  com  $x = (x_0 + \Delta x)$  constante e  $(y, z)$  variando nos intervalos definidos pela Equação (4.3); o versor normal à superfície 1 é o versor  $\hat{1} = \hat{i}$ , logo, sobre a face 1 temos

$$\vec{F} \cdot \hat{1} = F_x(x_0 + \Delta x, y, z) , \quad (4.4)$$

e o fluxo através dessa face é

$$\Psi_1 = \iint_{S_1} (\vec{F} \cdot \hat{1}) \, dA_1 = \int_{z_0}^{z_0+\Delta z} \int_{y_0}^{y_0+\Delta y} F_x(x_0 + \Delta x, y, z) \, dy \, dz . \quad (4.5)$$

Se o campo  $\vec{F}$  é contínuo, podemos usar o teorema do valor médio:

$$\int_{y_0}^{y_0+\Delta y} F_x(x_0 + \Delta x, y, z) \, dy = F_x(x_0 + \Delta x, \bar{y}_1, z) \Delta y , \quad (4.6)$$

onde  $y_0 \leq \bar{y}_1 \leq y_0 + \Delta y$ . Usando novamente o teorema do valor médio para calcular o integral em  $z$ , obtemos o seguinte valor para o fluxo:

$$\Psi_1 = F_x(x_0 + \Delta x, \bar{y}_1, \bar{z}_1) \Delta y \Delta z , \quad (4.7)$$

em que  $z_0 \leq \bar{z}_1 \leq z_0 + \Delta z$ . É fácil verificar que utilizando o mesmo raciocínio obtemos para as outras cinco faces do paralelepípedo os seguintes resultados:

$$\begin{aligned} \Psi_2 &= F_y(\bar{x}_2, y_0 + \Delta y, \bar{z}_2) \Delta x \Delta z , \\ \Psi_3 &= F_z(\bar{x}_3, \bar{y}_3, z_0 + \Delta z) \Delta x \Delta y , \\ \Psi_4 &= -F_z(\bar{x}_4, \bar{y}_4, z_0) \Delta x \Delta y , \\ \Psi_5 &= -F_y(\bar{x}_5, y_0, \bar{z}_5) \Delta x \Delta z , \\ \Psi_6 &= -F_x(x_0, \bar{y}_6, \bar{z}_6) \Delta y \Delta z . \end{aligned} \quad (4.8)$$

De notar que os valores médios que aparecem nestas equações não são necessariamente iguais; por exemplo  $\bar{y}_3$  e  $\bar{y}_4$  pertencem ambos ao intervalo  $(y_0, y_0 + \Delta y)$ , mas não têm que ser iguais. Como todos os valores médios  $\bar{x}_i$  pertencem ao intervalo  $(x_0, x_0 + \Delta x)$ , no limite  $\Delta x \rightarrow 0$  todos eles se tornam iguais a  $x_0$ , isto é,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \bar{x}_i = x_0 .$$

De igual forma, os valores médios  $\bar{y}_i$  e  $\bar{z}_i$  tornar-se-ão iguais a  $y_0$  e  $z_0$ . O fluxo total,  $\Delta\Psi$ , através do paralelepípedo é igual à soma dos seis fluxos  $\Psi_i$ . A divergência do campo  $\vec{F}$  no ponto  $\vec{r}_0$  é igual a  $\Delta\Psi$  por unidade de volume quando este tende para 0 ( $\Delta V \rightarrow 0$ ,  $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ ). Assim, a divergência é igual a

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{F} &= \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta\Psi}{\Delta V} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F_x(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - F_x(x_0, y_0, z_0)}{\Delta x} + \\ &+ \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{F_y(x_0, y_0 + \Delta y, z_0) - F_y(x_0, y_0, z_0)}{\Delta y} + \\ &+ \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{F_z(x_0, y_0, z_0 + \Delta z) - F_z(x_0, y_0, z_0)}{\Delta z} . \end{aligned} \quad (4.9)$$

Cada um dos limites, do lado direito da equação anterior, corresponde à definição de derivada parcial. Portanto, num ponto qualquer  $\vec{r}$ , a divergência do campo  $\vec{F}$  é

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}. \quad (4.10)$$

Esta expressão apresenta alguma semelhança com a definição do gradiente de um campo escalar; poderemos usar uma notação semelhante para o gradiente e a divergência se definirmos o operador **nabla**:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k}. \quad (4.11)$$

Assim, a divergência de um campo vetorial  $\vec{F}$  é igual ao produto escalar entre o operador nabla e o campo:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}, \quad (4.12)$$

e o gradiente de um campo escalar  $V$  é obtido aplicando o operador nabla ao campo escalar:

$$\vec{\nabla} V = \frac{\partial V}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{k}. \quad (4.13)$$

### 4.3. Teorema da divergência

A divergência definida na seção anterior é útil para calcular fluxos através de superfícies fechadas. Consideremos uma superfície fechada  $S$  que delimita uma região  $R$ . Imaginemos agora que a região  $R$  é dividida em vários paralelepípedos (Figura 4.3), com volumes infinitesimais  $\Delta V_i$  (existirá algum erro perto da fronteira, já que os paralelepípedos não coincidem com a superfície  $S$ , mas este erro será nulo no limite em que os paralelepípedos sejam infinitesimais).



**Figura 4.3.:** Uma região aproximada por paralelepípedos.

Quanto menor forem os paralelepípedos, melhor será a aproximação.

Se somarmos os fluxos do campo  $\vec{F}$  através de dois paralelepípedos vizinhos, o resultado será igual ao fluxo através de um paralelepípedo maior que contenha os

dois iniciais, pois os fluxos na parede comum são iguais e de sinais opostos. Assim, a soma dos fluxos através de todos os paralelepípedos será igual ao fluxo através da fronteira S:

$$\oiint_S \vec{F} \cdot \hat{n} \, dA = \sum_{i=1}^{\infty} \Delta\Psi_i, \quad (4.14)$$

onde  $\Delta\Psi_i$  é o fluxo através do paralelepípedo número  $i$ . Como  $\Delta V_i \rightarrow 0$ , podemos usar a definição da divergência, Equação (4.9), e obtemos a expressão:

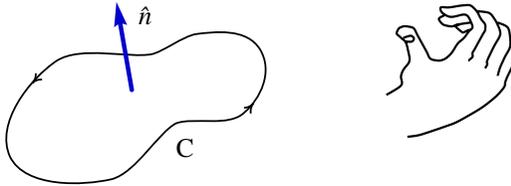
$$\Delta\Psi_i = \vec{\nabla} \cdot \vec{F}_i \, \Delta V_i. \quad (4.15)$$

Substituindo  $\Delta\Psi_i$  na Equação (4.14), a série obtida é o integral de volume da divergência de  $\vec{F}$ :

$$\oiint_S \vec{F} \cdot \hat{n} \, dA = \iiint_R \vec{\nabla} \cdot \vec{F} \, dV. \quad (4.16)$$

Este resultado é chamado **teorema da divergência**. O integral de volume no lado direito pode parecer mais complicado que o integral de superfície, mas geralmente até é mais simples, já que é mais fácil calcular a divergência de um campo do que calcular o vetor normal em todos os pontos da superfície.

## 4.4. Rotacional

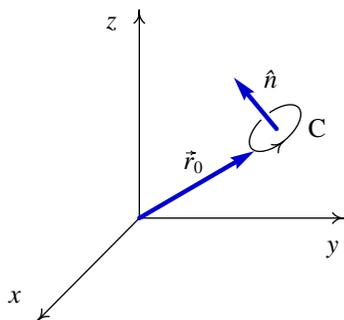


**Figura 4.4.:** Definição da direção positiva de uma curva fechada pela regra da mão direita.

Associado a qualquer campo vetorial  $\vec{F}$  existe um outro campo vetorial importante chamado **rotacional**. Antes de definir o rotacional, é preciso definir a direção positiva de uma curva fechada que, por definição, é a fronteira de uma superfície aberta. Como vimos no Capítulo 3, em cada ponto da superfície aberta existem dois versores normais, nos dois lados da superfície; se a superfície for **orientável** um dos lados define-se como o lado positivo e o versor normal correspondente define a direção positiva<sup>1</sup>. Uma vez definido o lado positivo da superfície, a direção

<sup>1</sup>Um exemplo de superfície não-orientável, com um único lado, é o anel de Möbius, construído com uma tira de papel à qual é dada uma torção de meia volta antes de se juntar os dois extremos formando um anel.

positiva da sua fronteira  $C$  será definida pela regra da mão direita: apontando com o dedo polegar da mão direita na direcção do vetor normal positivo, os outros dedos apontam na direcção positiva da curva  $C$ , como se mostra na Figura 4.4.



**Figura 4.5.:** Pequeno percurso fechado,  $C$ , com vetor normal  $\hat{n}$ .

Consideremos um ponto arbitrário com vetor posição  $\vec{r}_0 = x_0 \hat{i} + y_0 \hat{j} + z_0 \hat{k}$ , e uma curva fechada  $C$ , que passa pelo ponto e que envolve uma pequena área  $\Delta A$  (Figura 4.5). O integral de linha

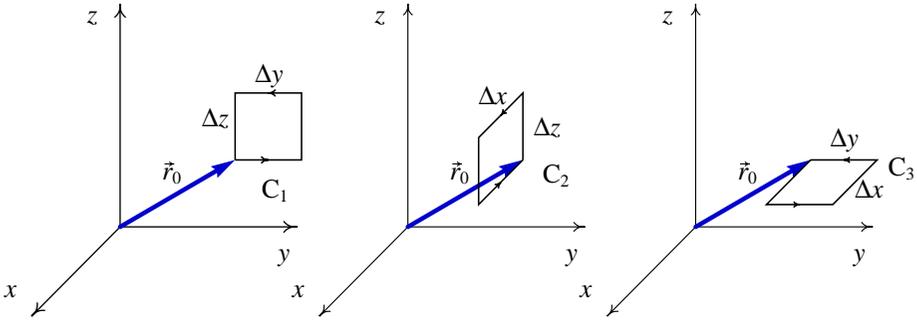
$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad (4.17)$$

será diferente para diferentes direcções do vetor  $\hat{n}$ , e diminuirá com a área  $\Delta A$ . Se o vetor  $\hat{n}$  tiver a mesma direcção do campo, o integral é nulo, já que o campo é perpendicular ao percurso. Vamos admitir que em qualquer ponto  $\vec{r}_0$  existe um vetor  $\text{rot}\vec{F}$ , chamado **rotacional** do campo, que verifica a seguinte propriedade:

$$(\text{rot}\vec{F}) \cdot \hat{n} \equiv \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta A} \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad (4.18)$$

para qualquer direcção  $\hat{n}$ , e qualquer curva fechada  $C$ , orientada na direcção do vetor  $\hat{n}$  e que passa pelo ponto  $\vec{r}_0$ .

Para demonstrar a Equação (4.18) vamos calcular as coordenadas cartesianas do vetor rotacional. Para encontrar as componentes do rotacional de um campo contínuo, vamos calcular o integral de linha do campo  $\vec{F}$  ao longo dos três retângulos representados na Figura 4.6, perpendiculares aos três eixos de coordenadas. Se o retângulo  $C_1$  for percorrido no sentido indicado na figura, o vetor normal será  $\hat{i}$ . Podemos dividir o retângulo  $C_1$  em quatro segmentos retos e paralelos aos eixos  $y$  e  $z$ :



**Figura 4.6.:** Três percursos retangulares com a mesma origem, orientados nas direcções perpendiculares aos três eixos

$$\oint_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{y_0}^{y_0+\Delta y} F_y(x_0, y, z_0) dy + \int_{z_0}^{z_0+\Delta z} F_z(x_0, y_0 + \Delta y, z) dz + \int_{y_0+\Delta y}^{y_0} F_y(x_0, y, z_0 + \Delta z) dy + \int_{z_0+\Delta z}^{z_0} F_z(x_0, y_0, z) dz . \quad (4.19)$$

Se o campo é contínuo, usando o teorema do valor médio, temos

$$\oint_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_y(x_0, \bar{y}_1, z_0)\Delta y + F_z(x_0, y_0 + \Delta y, \bar{z}_1)\Delta z - F_y(x_0, \bar{y}_2, z_0 + \Delta z)\Delta y - F_z(x_0, y_0, \bar{z}_2)\Delta z . \quad (4.20)$$

A área do retângulo  $C_1$  é  $\Delta A = \Delta y \Delta z$ . No limite,  $\Delta y \rightarrow 0$  e  $\Delta z \rightarrow 0$ , os valores médios  $\bar{y}_i$  tornam-se iguais a  $y_0$ , e os valores médios  $\bar{z}_i$  iguais a  $z_0$ ; logo, dividindo por  $\Delta A$ , obtemos a componente  $x$  do vetor rotacional:

$$(\text{rot} \vec{F})_x = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta A} \oint_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{\partial F_z(\vec{r}_0)}{\partial y} - \frac{\partial F_y(\vec{r}_0)}{\partial z} . \quad (4.21)$$

Assim, demonstramos que a componente  $x$  do vetor rotacional existe e que se obtém a partir das derivadas parciais de  $\vec{F}$ . De igual forma, podemos obter as componentes  $y$  e  $z$  do rotacional se calcularmos os integrais de linha ao longo de  $C_2$  e  $C_3$ , definidos na Figura 4.6, e dividirmos por  $\Delta A$ . O resultado é

$$\text{rot} \vec{F} = \left( \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \hat{i} + \left( \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \hat{j} + \left( \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \hat{k} . \quad (4.22)$$

Esta expressão tem exactamente a forma do produto vetorial entre dois vetores, onde o primeiro vetor é o operador nabla e o segundo vetor é o campo  $\vec{F}$ . Em

conclusão, o rotacional do campo  $\vec{F}$  é igual a  $\vec{\nabla} \times \vec{F}$ . Algumas propriedades da divergência e do rotacional são apresentadas no Apêndice A.

Outro operador importante é o operador **laplaciano**,  $\nabla^2$ , obtido no cálculo da divergência do gradiente de um campo escalar:

$$\nabla^2 f = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} f) = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) f. \quad (4.23)$$

A obtenção do rotacional foi feita usando retângulos, mas esta será estendida a qualquer curva, na próxima seção, conduzindo ao chamado teorema de Stokes ou de Green.

#### Exemplo 4.1

Demonstre que se um campo escalar  $f(r)$  depender apenas da distância à origem  $r$ , o seu Laplaciano é

$$\nabla^2 f(r) = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 f') = \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (rf).$$

Como  $f$  só depende da distância à origem, usando o resultado obtido no Exemplo 3.2 temos que:

$$\vec{\nabla} f = f' \hat{r},$$

e aplicando a propriedade distributiva da divergência de um produto (Apêndice A):

$$\nabla^2 f = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} f) = \vec{\nabla} \cdot \left( \frac{f'}{r} \vec{r} \right) = \vec{r} \cdot \vec{\nabla} \left( \frac{f'}{r} \right) + \frac{f'}{r} \vec{\nabla} \cdot \vec{r}. \quad (4.24)$$

A divergência de  $\vec{r}$  calcula-se facilmente em coordenadas cartesianas:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3.$$

Para calcular o gradiente de  $f'/r$  usamos, mais uma vez, o resultado do Exemplo 3.2:

$$\vec{\nabla} \left( \frac{f'}{r} \right) = \frac{d}{dr} \left( \frac{f'}{r} \right) \hat{r} = \left( \frac{f''}{r} - \frac{f'}{r^2} \right) \hat{r},$$

e substituindo na Equação (4.24) obtemos o laplaciano de  $f$ :

$$\nabla^2 f = f'' + 2 \frac{f'}{r}. \quad (4.25)$$

Este último resultado, multiplicado por  $r^2$ , corresponde à derivada de um produto:

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2} (r^2 f'' + 2r f') = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 f'). \quad (4.26)$$

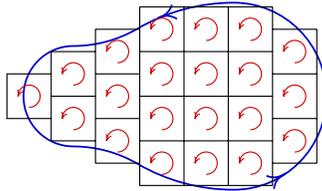
Podíamos também ter factorizado  $r$ , no denominador de (4.25), obtendo assim uma expressão com a forma da segunda derivada de um produto:

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r}(rf'' + 2f') = \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2}(rf). \quad (4.27)$$

## 4.5. Teorema de Stokes

Tal como a divergência permite calcular integrais de superfície de forma mais simples, o rotacional facilita o cálculo de integrais de linha em percursos fechados. Começamos por escolher uma superfície cuja fronteira seja o percurso fechado  $C$ ; esta superfície pode ser dividida em pequenos elementos retangulares  $R_i$  com áreas infinitesimais  $\Delta A_i$  (Figura 4.7). Cada percurso retangular é percorrido no mesmo sentido (sentido antihorário, na Figura 4.7); somando o integral de linha de  $\vec{F}$  em dois percursos vizinhos, o resultado é o integral de linha ao longo do retângulo maior que delimita os dois retângulos, já que, no lado comum dos dois retângulos, o integral de linha é calculado duas vezes, em sentidos contrários, sendo o resultado nesse lado nulo. Somando os integrais de linhas de  $\vec{F}$  em todos os percursos retangulares, o resultado é uma boa aproximação ao integral de linha em  $C$ :

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \sum_{i=1}^{\infty} \oint_{R_i} \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (4.28)$$



**Figura 4.7.:** A superfície delimitada por uma curva fechada, aproximada por retângulos.

Como a área de cada retângulo é muito pequena, usando a definição do rotacional (Equação 4.18), o integral de linha em cada percurso retangular é

$$\oint_{R_i} \vec{F} \cdot d\vec{r} = (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \hat{n} \Delta A_i \quad (4.29)$$

e a série na equação anterior constitui um integral de superfície:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{A}. \quad (4.30)$$

A superfície  $S$  pode ser qualquer superfície delimitada por  $C$ . O resultado anterior é o chamado **teorema de Stokes**.

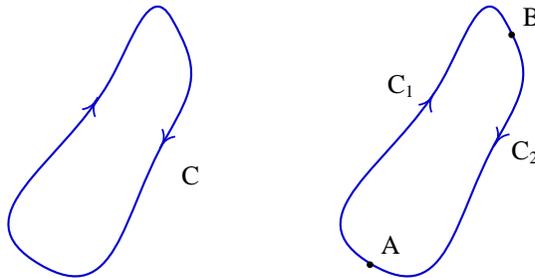
## 4.6. Equação de Poisson

Para calcular o rotacional do campo elétrico, comecemos por considerar o teorema de Stokes:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{A}. \quad (4.31)$$

O integral no percurso fechado  $C$ , pode ser calculado como a soma do integral desde  $A$  até  $B$ , ao longo da curva  $C_1$  e o integral desde  $B$  até  $A$  ao longo da curva  $C_2$  (Figura 4.8); o integral desde  $B$  até  $A$  é sempre igual e de sinal oposto ao integral desde  $A$  até  $B$  ao longo do mesmo percurso e, portanto, obtemos

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_A^B \vec{E}(C_1) \cdot d\vec{r}(C_1) - \int_A^B \vec{E}(C_2) \cdot d\vec{r}(C_2). \quad (4.32)$$



**Figura 4.8.:** Um percurso fechado  $C$  dividido em dois percursos abertos  $C_1$  e  $C_2$ .

Como o campo elétrico é conservativo, o integral de linha entre os pontos  $A$  e  $B$  é igual ao longo dos percursos  $C_1$  e  $C_2$ . Assim, o integral ao longo do percurso fechado  $C$  é zero:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0. \quad (4.33)$$

Substituindo este resultado na Equação (4.31), verificamos que o fluxo do rotacional do campo elétrico através de qualquer superfície  $S$ , orientada em qualquer direcção, é nulo. Para que este resultado seja válido é necessário que o rotacional do campo elétrico seja nulo:

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}}. \quad (4.34)$$

Em função das componentes cartesianas do rotacional, esta equação é exactamente igual ao sistema de três condições que já encontramos no capítulo anterior, para os campos conservativos (Equação 3.28).

Como vimos no Capítulo 2, a lei de Gauss relaciona o fluxo do campo eléctrico através de qualquer superfície fechada, com a carga no seu interior. Usando o teorema da divergência podemos calcular o fluxo como um integral de volume da divergência do campo, e podemos escrever a lei de Gauss numa outra forma, mais conveniente para o cálculo do campo eléctrico em geral. Consideremos uma região  $R$ , limitada por uma superfície fechada  $S$ . A lei de Gauss diz que

$$\oiint_S (\vec{E} \cdot \hat{n}) \, dA = 4\pi k \, \Delta q_{\text{int}} . \quad (4.35)$$

Usando o teorema da divergência e a relação entre a carga interna e a carga volúmica, obtemos

$$\iiint_R \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \, dV = 4\pi k \iiint_R \rho \, dV . \quad (4.36)$$

Os dois integrais de volume podem ser calculados como o produto do valor médio da função integrada pelo volume total  $\Delta V$ :

$$\overline{\vec{\nabla} \cdot \vec{E}} \, \Delta V = 4\pi k \bar{\rho} \, \Delta V . \quad (4.37)$$

No limite  $\Delta V \rightarrow 0$ , o interior da superfície  $S$  aproxima-se a um ponto e os valores médios  $\overline{\vec{E}}$  e  $\bar{\rho}$  são os valores de  $\vec{E}$  e  $\rho$  nesse ponto; portanto, em qualquer ponto:

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi k \rho} . \quad (4.38)$$

Esta é a forma diferencial da lei de Gauss. Conhecida a carga volúmica  $\rho$  dentro de uma região, obtém-se a divergência do campo em qualquer ponto da região (ou ao contrário). No entanto, a divergência de um campo vetorial não é suficiente para definir o campo; é preciso conhecer também o rotacional e algumas condições na fronteira da região.

As Equações (4.34) e (4.38) são as equações básicas da eletrostática, e permitem calcular o campo eléctrico numa região onde se conheça a carga volúmica  $\rho$ . Estas equações vectoriais podem ser reduzidas a uma única equação escalar, em função do potencial electrostático  $V$  introduzido no capítulo anterior:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V . \quad (4.39)$$

Com esta definição, a Equação (4.34) é trivial, já que o rotacional do gradiente de qualquer campo escalar é sempre nulo (Apêndice A). A Equação (4.38), em função do potencial  $V$  e usando o operador Laplaciano, toma a seguinte forma:

$$\boxed{\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}} . \quad (4.40)$$

Esta equação é chamada **equação de Poisson**. Existem, em geral, muitas soluções desta equação diferencial, para uma determinada carga volúmica  $\rho$  dentro de uma região. Para obter uma solução única é preciso impor alguma condição na fronteira, como por exemplo o valor do potencial ao longo da fronteira. Um caso particular é quando a região de interesse é todo o espaço, e a condição fronteira é  $V = 0$  no infinito; nesse caso, a solução é a Equação (4.1), que é também obtida a partir da lei de Coulomb.

A equação de Poisson permite-nos estudar também sistemas mais complicados nos quais a lei de Coulomb não ajuda muito. No entanto, para estudar a resolução da equação de Poisson é preciso entrar no campo das equações diferenciais parciais, o qual se encontra além dos objetivos deste livro. No capítulo sobre ondas eletromagnéticas (Capítulo 13) veremos alguns exemplos simples de resolução das equações de campo.

#### Exemplo 4.2

O potencial numa região do espaço é  $V = 5x^4 - 6z$ , onde as distâncias são medidas em metros e o potencial em volts. Calcule a carga total dentro de uma esfera com centro na origem e raio 3 m.

A carga volúmica calcula-se a partir da equação de Poisson (Equação 4.40):

$$\rho = -\epsilon_0 \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) (5x^4 - 6z) = -60\epsilon_0 x^2. \quad (4.41)$$

Para calcular a carga total dentro da esfera é preciso integrar  $\rho$  dentro do seu volume. O integral será mais fácil de calcular em coordenadas esféricas (Figura 4.9), em que  $x$  é igual a  $r \sin \phi \cos \theta$ ; logo a carga volúmica em coordenadas esféricas é

$$\rho = -60\epsilon_0 r^2 \sin^2 \phi \cos^2 \theta.$$

O elemento diferencial de volume  $dV$ , em coordenadas esféricas, é

$$dV = r^2 \sin \phi \, dr \, d\theta \, d\phi,$$

e a carga total obtém-se integrando a carga volúmica dentro da esfera:

$$Q = -60\epsilon_0 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^3 r^4 \sin^3 \phi \cos^2 \theta \, dr \, d\theta \, d\phi = -3888\pi\epsilon_0 = -108 \text{ nC}.$$

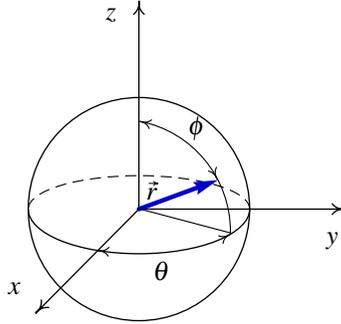


Figura 4.9.: Coordenadas esféricas.

### Problemas

1. Demonstre que para quaisquer campo escalar  $f$  e campo vetorial  $\vec{F}$ :

(a)  $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} f) = \vec{0}$ .

(b)  $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = 0$ .

(c)  $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) - \nabla^2 \vec{F}$ .

2. Se  $f$  é um campo escalar e  $\vec{F}$  um campo vetorial, demonstre que a divergência e o rotacional do produto  $f\vec{F}$  são, respectivamente:

$$\vec{\nabla} \cdot (f\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{\nabla} f + f \vec{\nabla} \cdot \vec{F} \quad \text{e} \quad \vec{\nabla} \times (f\vec{F}) = \vec{\nabla} f \times \vec{F} + f \vec{\nabla} \times \vec{F}.$$

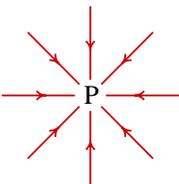
3. Demonstre que a divergência e o rotacional do produto vetorial de dois campos vetoriais  $\vec{F}$  e  $\vec{G}$  são, respectivamente:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{G} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) - \vec{F} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{G}),$$

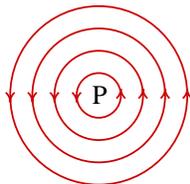
$$\vec{\nabla} \times (\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{F}(\vec{\nabla} \cdot \vec{G}) - \vec{G}(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) + (\vec{G} \cdot \vec{\nabla})\vec{F} - (\vec{F} \cdot \vec{\nabla})\vec{G}.$$

4. As figuras representam as linhas de campo de quatro campos vetoriais. Em cada caso diga se o rotacional do campo no ponto P é zero ou diferente de zero e determine se a divergência do campo no ponto P é positiva, negativa ou nula.

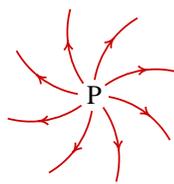
(a)



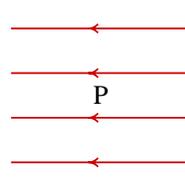
(b)



(c)



(d)



5. Represente as linhas de campo dos campos  $\vec{F} = \vec{r}$  e  $\vec{G} = \hat{k} \times \vec{r}$ , onde  $\vec{r}$  é o vetor posição,  $x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ . Demonstre que em qualquer ponto a divergência e o rotacional dos campos  $\vec{F}$  e  $\vec{G}$  são:

(a)  $\vec{\nabla} \cdot \vec{r} = 3$ .

(b)  $\vec{\nabla} \times \vec{r} = \vec{0}$ .

(c)  $\vec{\nabla} \cdot (\hat{k} \times \vec{r}) = 0$

(d)  $\vec{\nabla} \times (\hat{k} \times \vec{r}) = 2\hat{k}$ .

6. O potencial dentro do cubo  $1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2, 1 \leq z \leq 2$  é

$$V = ax^3z + \frac{bxy}{z^2}$$

onde  $a$  e  $b$  são constantes. Calcule a carga total dentro do cubo.

7. Diga quais dos seguintes campos podem ser campos eletrostáticos. Nos casos afirmativos, calcule a carga volúmica que produz o campo e a energia eletrostática volúmica ( $a$  e  $b$  são constantes):

(a)  $(3abyz^3 - 10bx^3y^2)\hat{i} + (3abxz^3 - 5bx^4y)\hat{j} + 9abxyz^2\hat{k}$ .

(b)  $(18aby^3 - 20bx^3y^2)\hat{i} + (18abxz^3 - 10bx^4y)\hat{j} + 6abxyz^2\hat{k}$ .

(c)  $a \sin(ax + bz^2)\hat{i} + 2bz \sin(ax + bz^2)\hat{k}$ .

8. Dado o potencial

$$V(x) = \begin{cases} V_0(2x/a - 1), & x \leq 0 \\ -V_0(x/a - 1)^2, & 0 \leq x \leq 2a \\ V_0(3 - 2x/a), & x \geq 2a \end{cases}$$

onde  $V_0$  e  $a$  são constantes positivas, determine:

- (a) O módulo do campo elétrico.  
 (b) A carga volúmica em qualquer ponto.  
 (c) Represente os gráficos das duas funções.
9. Considere o cubo definido no Problema 13 do Capítulo 3. Calcule novamente a carga dentro do cubo usando a equação de Poisson.

## Respostas

4. (a)  $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0, \vec{\nabla} \cdot \vec{F} < 0$ . (c)  $\vec{\nabla} \times \vec{F} \neq 0, \vec{\nabla} \cdot \vec{F} > 0$ .

(b)  $\vec{\nabla} \times \vec{F} \neq 0, \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 0$ . (d)  $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0, \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 0$ .

6.  $Q = -\frac{9\epsilon_0}{2} \left( 3a + \frac{7}{8}b \right)$ .

7. (a)  $\rho = \epsilon_0 b x (18 a y z - 5 x^3 - 30 x y^2)$ ,

$$u = \frac{\epsilon_0}{2} [9 a^2 b^2 z^6 (x^2 + y^2) + 25 b^2 x^4 y^2 (x^4 + 4 x^2 y^2) + 3 a b^2 x^2 y z^3 (27 a y z - 10 x^3 - 20 x y^2)].$$

(c)  $\rho = \epsilon_0 [(a^2 + 4 b^2 z^2) \cos(ax + bz^2) + 2 b \sin(ax + bz^2)]$ ,

$$u = \frac{\epsilon_0}{4} [a^2 + 4 b^2 z^2 - (a^2 + 4 b^2 z^2) \cos(2ax + 2bz^2)].$$

8. (a)  $E(x) = \begin{cases} 2V_0/a, & x \leq 0 \\ 2V_0|x-a|/a^2, & 0 \leq x \leq 2a \\ 2V_0/a, & x \geq 2a. \end{cases}$

(b)  $\rho(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 2V_0\epsilon_0/a^2, & 0 \leq x \leq 2a \\ 0, & x \geq 2a. \end{cases}$

9.  $q = \epsilon_0 C (7e^{-6} - 15e^{-4} + 9e^{-2} - 1) = -0.174 \text{ fC}$ .

## 5. Capacidade e energia eletrostática



**Michael Faraday (1791–1867)**

Michael Faraday nasceu perto de Londres. Aos 14 anos deixou a escola e começou a trabalhar. Durante oito anos foi aprendiz num encadernador, beneficiando da tolerância de seu patrão que lhe permitia ler os livros que encadernava. Em 1810 fez-se membro da *City Philosophical Society*, reunindo-se a um grupo de jovens que discutiam temas científicos. Em 1812, Humphry Davy ao fazer uma apresentação pública ganhou a admiração do jovem Faraday. Este, escreveu-lhe uma carta acabando por se tornar seu assistente um ano mais tarde. São muitas as contribuições de Faraday para física e para a química sendo provavelmente o maior físico experimental de todos os tempos. Faraday introduziu os conceitos de campo e de linhas de campo e descobriu a indução eletromagnética e o diamagnetismo. Construiu o primeiro gerador de corrente. Seguindo o trabalho de Davy, estudou a eletrólise estabelecendo as bases da eletroquímica. Sendo um cientista tão eclético, a biografia de Faraday abre este capítulo pela importância do seu trabalho no estudo dos condensadores e dos dielétricos.

## 5.1. Capacidade elétrica

No Capítulo 3 vimos que a carga num condutor isolado distribui-se sobre a superfície; a diferença de potencial entre o condutor e pontos muito afastados é igual em todo o condutor, e aumenta com o aumento da carga superficial. Se a mesma carga for introduzida em dois condutores diferentes, o que tiver uma maior superfície terá menor carga superficial e, portanto, menor potencial. Para aumentar a carga dos dois condutores será necessário mais energia no caso do condutor que está a maior potencial, já que nesse caso a força repulsiva sobre a carga a ser introduzida é maior. Assim, quanto maior for um condutor mais facilmente se introduzirão as cargas.

No Exemplo 3.4 vimos que o potencial na superfície de uma esfera condutora de raio  $a$  é  $kQ/a$ ; assim, para uma carga acumulada  $Q$  será mais fácil aumentar a carga quanto maior for o raio da esfera. Generalizando, a **capacidade** de acumular carga, de qualquer condutor, é diretamente proporcional ao seu tamanho. Define-se a capacidade elétrica como a relação entre a carga acumulada e o potencial na superfície de um condutor e representa-se pela letra  $C$ :

$$C = \frac{Q}{V}. \quad (5.1)$$

A unidade de capacidade, no sistema internacional de unidades, é o farad (F):

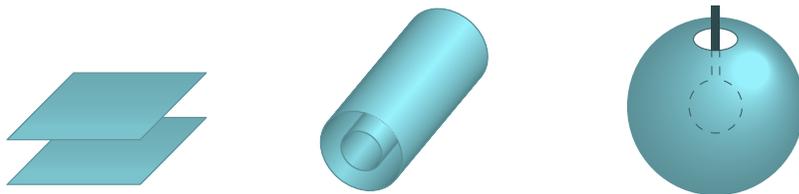
$$1 \text{ F} = \frac{1 \text{ C}}{1 \text{ V}}. \quad (5.2)$$

Quanto maior for a capacidade de um condutor, mais fácil será acumular carga na sua superfície. No entanto, a carga na superfície não pode aumentar indefinidamente, pois quando a carga for muito elevada as forças entre os eletrões serão tão fortes que se produzirá uma descarga brusca do condutor através de faíscas. A descarga elétrica acontece a um certo valor do potencial, próprio do material que rodeia o condutor. Num condutor a carga máxima à qual aparece o **potencial de rutura** é, segundo a Equação (5.1), diretamente proporcional à capacidade e, portanto, a capacidade é também uma medida da carga máxima que pode ser acumulada num condutor.

## 5.2. Condensadores

Uma das invenções mais importantes na física do século XVIII foi a chamada **garrafa de Leiden**, a qual consiste num condutor isolado dentro de uma garrafa de vidro. Ao introduzir um condutor carregado dentro de uma garrafa de vidro, o seu potencial diminui e conseqüentemente a sua capacidade aumenta. Uma versão

melhorada da garrafa de Leiden foi obtida cobrindo o interior e o exterior da garrafa com duas lâminas metálicas separadas pelas paredes da garrafa, com a lâmina interna em contacto com o condutor central. Desta forma consegue reduzir-se bastante o potencial do condutor e aumentar a sua capacidade. Em geral chama-se



**Figura 5.1.:** Condensadores de placas paralelas, cilíndrico e esférico.

**condensador** a qualquer dispositivo com duas armaduras metálicas que podem manter-se a potenciais diferentes. Os três tipos mais comuns de condensadores são o condensador de placas planas paralelas, o condensador cilíndrico e o condensador esférico (Figura 5.1). Quando as duas armaduras se encontram a diferentes potenciais  $V_1$  e  $V_2$ , existem linhas de campo elétrico a sair da lâmina a maior potencial e a entrar na outra lâmina. Isto significa que as duas lâminas têm cargas de sinais opostos; se a carga total for zero, as cargas das duas lâminas terão o mesmo valor absoluto:

$$Q \equiv |Q_1| = |Q_2|. \quad (5.3)$$

A **carga armazenada** no condensador é  $Q$ . A capacidade de um condensador define-se de forma análoga à capacidade de um condutor:

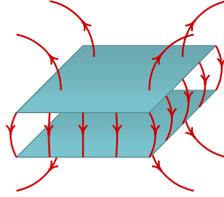
$$C = \frac{Q}{\Delta V}, \quad (5.4)$$

onde  $\Delta V = |V_1 - V_2|$  é a diferença de potencial entre as placas e  $Q$  é a carga armazenada no condensador.

Para calcular a capacidade de um condensador, admite-se que existe uma carga  $Q$  armazenada e calcula-se a diferença de potencial correspondente, usando algum dos métodos introduzidos no Capítulo 3. Veremos a seguir os três tipos mais comuns de condensadores.

### 5.2.1. Condensador de placas planas paralelas

Um condensador de placas planas paralelas é formado por duas placas metálicas com uma forma qualquer, paralelas e de área  $A$  (Figura 5.2). Na região central do condensador, as linhas de campo são aproximadamente paralelas e o campo produzido por cada placa pode ser aproximado pelo campo de um plano infinito



**Figura 5.2.:** Campo elétrico num condensador plano.

com carga,  $E = 2\pi k\sigma$ . Os campos das duas placas têm o mesmo sentido, de maneira que o campo total no centro do condensador é dado por

$$E = 4\pi k\sigma . \quad (5.5)$$

Para calcular a diferença de potencial  $\Delta V$ , usamos um percurso perpendicular às placas, seguindo o sentido do campo: do ponto com maior potencial A, até ao ponto com menor potencial B:

$$\Delta V = V_A - V_B = \int_A^B E \, ds = 4\pi k\sigma L , \quad (5.6)$$

onde  $L$  é a distância entre as placas. A capacidade é

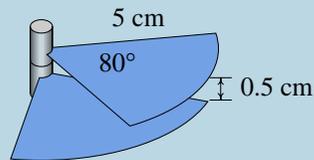
$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{4\pi k\sigma L} ; \quad (5.7)$$

se admitirmos que a carga superficial é uniforme, temos que  $\sigma = Q/A$  e a capacidade do condensador de placas planas paralelas é

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{L} . \quad (5.8)$$

### Exemplo 5.1

Um condensador variável é constituído por duas placas planas paralelas com forma de setor circular de ângulo  $80^\circ$  e raio 5 cm, que podem rodar à volta de um eixo comum, como mostra a figura. Se a distância entre as placas é 0.5 cm, calcule a capacidade máxima e a capacidade quando uma das placas roda  $30^\circ$  a partir da posição onde a capacidade é máxima.



A capacidade máxima obtém-se quando as duas placas estão uma em frente da outra, de forma que a carga se distribui ao longo de toda a superfície das placas. O ângulo de  $80^\circ$  é igual a  $4\pi/9$  radianos, assim, a área dos setores de círculo é

$$A = \iint dA = \int_0^5 \int_0^{4\pi/9} r \, dr \, d\theta = \frac{50\pi}{9} \text{ cm}^2 .$$

A capacidade é dada pela expressão obtida para o condensador de placas planas paralelas:

$$C_{\text{máx}} = \frac{A}{4\pi kL}$$

$$C_{\text{máx}} = \frac{0.005\pi/9 \text{ m}^2}{4\pi(9 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2})(0.005 \text{ m})} \approx 3.1 \text{ pF} .$$

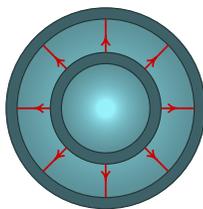
Quando uma das placas roda  $30^\circ$ , a área na qual a carga se distribui, corresponde apenas à área da parte das placas que se encontra em frente uma da outra, ou seja, um setor circular de ângulo  $50^\circ$ . Portanto a área é  $5/8$  da área das placas e a capacidade, sendo diretamente proporcional à área, será  $5/8$  da capacidade máxima:

$$C = \frac{5}{8} C_{\text{máx}} = 1.9 \text{ pF} .$$

### 5.2.2. Condensador esférico

Este tipo de condensador é formado por duas esferas condutoras concêntricas, com raios  $a$  e  $b$  ( $a < b$ ). O campo elétrico entre as duas esferas é radial (Figura 5.3) e calcula-se facilmente usando a lei de Gauss:

$$\vec{E} = \frac{kQ}{r^2} \hat{r} . \quad (5.9)$$



**Figura 5.3.:** Campo elétrico de um condensador esférico.

Ao longo de um percurso radial de  $r = a$  até  $r = b$ , o campo é paralelo a  $ds$  e a diferença de potencial entre as esferas A e B é

$$\Delta V = V_A - V_B = \int_a^b E \, dr = kQ \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) ; \quad (5.10)$$

o que demonstra que  $\Delta V$  é diretamente proporcional a  $Q$  e que a capacidade é dada pela seguinte equação:

$$C = \frac{ab}{k(b-a)}. \quad (5.11)$$

### Exemplo 5.2

Um condensador esférico tem uma esfera externa de raio 2 cm. Para calcular o raio da esfera interna, ligaram-se as duas esferas a uma diferença de potencial de 3 V e observou-se que a carga armazenada era 12 pC. Calcule o raio da esfera interna.

A capacidade do condensador é igual a

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{12 \times 10^{-12} \text{ C}}{3 \text{ V}} = 4 \text{ pF}.$$

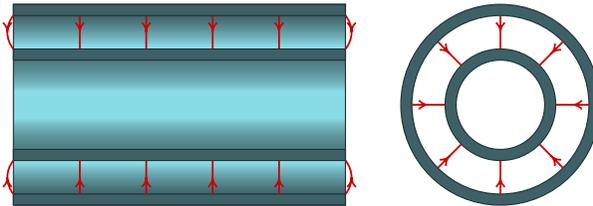
Por outro lado, a partir da Equação (5.11), temos que:

$$4 \times 10^{-12} = \frac{0.02 a}{9 \times 10^9 (0.02 - a)},$$

onde  $a$  é medido em centímetros. Resolvendo esta equação para  $a$ , obtemos

$$a = 1.29 \text{ cm}.$$

### 5.2.3. Condensador cilíndrico



**Figura 5.4.:** Campo elétrico num condensador cilíndrico; vista de lateral e frontal.

Um condensador cilíndrico é formado por duas armaduras cilíndricas coaxiais de raios  $a$  e  $b$  (Figura 5.4). O campo elétrico entre as armaduras não é exactamente na direção radial. No entanto, se o comprimento dos cilindros ( $L$ ) for maior que a

distância entre as armaduras, poderemos admitir que as linhas de campo na região central do condensador são paralelas e radiais, de maneira que um cilindro de raio  $r$  ( $a < r < b$ ) e comprimento  $l < L$  é uma superfície gaussiana. A carga dentro do cilindro gaussiano é

$$q_{\text{int}} = Q \frac{l}{L}, \quad (5.12)$$

e, usando a lei de Gauss, obtemos o campo elétrico:

$$E = \frac{2kQ}{Lr}. \quad (5.13)$$

A diferença de potencial obtém-se integrando o campo elétrico ao longo da direção radial, para facilitar o cálculo:

$$\Delta V = \int_a^b E \, dr = \frac{2kQ}{L} \ln(b/a), \quad (5.14)$$

o qual conduz à capacidade

$$C = \frac{L}{2k \ln(b/a)}. \quad (5.15)$$

### 5.3. Energia eletrostática

Para obter um sistema de  $n$  cargas pontuais  $q_1, q_2 \dots q_n$  nas posições  $\vec{r}_1, \vec{r}_2 \dots \vec{r}_n$ , podemos começar por colocar a carga  $q_1$  em  $\vec{r}_1$ . A seguir, para trazer a segunda carga até à posição  $\vec{r}_2$ , precisamos de realizar um trabalho

$$W_{12} = \frac{kq_1q_2}{r_{12}}, \quad (5.16)$$

onde  $\vec{r}_{12}$  é a posição da partícula 2 relativamente à partícula 1 ( $\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ ). Para trazer a terceira carga até à terceira posição, é agora preciso efetuar um trabalho

$$W_{13} + W_{23} = \frac{kq_1q_3}{r_{13}} + \frac{kq_2q_3}{r_{23}}. \quad (5.17)$$

Ao trabalho total necessário para trazer as  $n$  cargas até às suas posições respetivas chama-se **energia eletrostática** do sistema, e é igual a

$$U = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \frac{kq_iq_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{kq_iq_j}{r_{ij}}. \quad (5.18)$$

O factor  $1/2$  é incluído para que não se contabilize duas vezes o mesmo par, por exemplo, o par de partículas 3 e 5 aparecem duas vezes, quando  $(i, j)$  forem iguais a  $(3, 5)$  e  $(5, 3)$ .

No caso de uma distribuição contínua de carga, dentro de uma região  $R$ , a equação anterior pode ser usada no limite quando a distribuição de carga é dividida em muitos elementos pequenos. As cargas pontuais  $q_i$  e  $q_j$  serão substituídas por cargas  $\rho dv$  e  $\rho dv'$  nas vizinhanças de  $\vec{r}$  e  $\vec{r}'$ , respectivamente (usaremos  $v$  para o volume, para distingui-lo do potencial). Substituindo cada soma na Equação (5.18) por um integral triplo obtemos

$$U = \frac{k}{2} \iiint_R \iiint_R \frac{\rho(\vec{r})\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv dv' . \quad (5.19)$$

Apesar de ser uma expressão complicada, pelo elevado número de integrais, vemos que os três integrais do volume  $v'$  correspondem exactamente à Equação (4.1), para o potencial na posição  $\vec{r}$  e, portanto:

$$U = \frac{1}{2} \iiint_R \rho(\vec{r})V(\vec{r}) dv . \quad (5.20)$$

Esta é a energia eletrostática total dentro da região  $R$ . O integrando corresponde, então, à **energia volúmica eletrostática** no ponto  $\vec{r}$ , representada pela letra  $u$ :

$$u = \frac{1}{2} \rho V . \quad (5.21)$$

De notar que a condição  $j \neq i$  na Equação (5.18) servia para excluir a energia de auto-interacção das cargas que, no caso de cargas pontuais, é infinita. Na Equação (5.20) já não é excluída a interacção da distribuição de carga consigo própria.

O campo eléctrico foi introduzido no Capítulo 1 como uma forma de explicar a interacção entre cargas e, até agora, o campo tem sido interpretado como uma força por unidade de carga. No entanto, no Capítulo 13 veremos que pode existir campo eléctrico mesmo quando não existem cargas e o campo tem existência própria, independentemente das forças. Por essa razão, convém escrever também a energia eletrostática de uma distribuição de carga em função do campo eléctrico, para obter uma expressão que será válida mesmo na ausência de cargas.

Usando a Equação de Poisson (Equação 4.40), a carga volúmica  $\rho$  pode ser substituída na Equação (5.20) e obtemos

$$U = -\frac{\epsilon_0}{2} \iiint_R V \nabla^2 V dv . \quad (5.22)$$

O produto de um campo escalar e o seu Laplaciano verifica a seguinte identidade:

$$V \nabla^2 V = \vec{\nabla} \cdot (V \vec{\nabla} V) - \vec{\nabla} V \cdot \vec{\nabla} V , \quad (5.23)$$

que conduz ao resultado:

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \iiint_R [\vec{\nabla} V \cdot \vec{\nabla} V - \vec{\nabla} \cdot (V \vec{\nabla} V)] dv . \quad (5.24)$$

Em função do campo elétrico, e aplicando o teorema da divergência ao último termo:

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \iiint_R E^2 dV + \frac{\epsilon_0}{2} \oiint_S V \vec{E} \cdot d\vec{A}, \quad (5.25)$$

onde  $S$  é a fronteira da região  $R$ . O primeiro integral será sempre positivo ou zero e o segundo integral corresponde ao fluxo do campo  $V\vec{E}$  através da superfície fechada  $S$ .

Quando não existe carga total dentro da superfície  $S$ , o número de linhas de campo que entra e sai da superfície é igual, mas as linhas de campo entram por regiões onde o potencial é mais elevado. Obtém-se assim um resultado negativo para o fluxo de  $V\vec{E}$ , e a energia eletrostática  $U$  no interior da superfície é nula. A energia eletrostática em todo o espaço é sempre positiva, já que o potencial no infinito é zero, logo o segundo integral é nulo.

A Equação (5.25) permite-nos escrever a energia volúmica eletrostática em função do campo elétrico:

$$u = \frac{\epsilon_0}{2} [E^2 + \vec{\nabla} \cdot (V\vec{E})]. \quad (5.26)$$

Se o potencial ou a componente normal do campo são nulos na fronteira de uma região, a energia eletrostática pode ser calculada integrando o termo  $\epsilon_0 E^2/2$  dentro da região  $R$ .

## 5.4. Energia armazenada num condensador

Para carregar um condensador é preciso realizar um trabalho. À medida que se introduz a carga nas placas, a carga já armazenada no condensador opõe-se à introdução de mais carga. O trabalho para carregar o condensador é igual à energia eletrostática armazenada no condensador. Quando o condensador está carregado, existe um campo elétrico entre as armaduras e, portanto, uma energia eletrostática proporcional ao quadrado do campo, como vimos na secção anterior.

A energia armazenada pode ser calculada por qualquer um dos dois métodos propostos na secção anterior. O primeiro método consiste em calcular a energia volúmica, em função da carga volúmica, por meio da Equação (5.21). No caso do condensador, como a carga está distribuída sobre a superfície das armaduras,  $\rho$  deve ser substituída pela carga superficial:

$$u_s = \frac{1}{2} \sigma V. \quad (5.27)$$

A energia total obtém-se integrando sobre a superfície das duas armaduras, que é a única região onde  $\sigma$  não é nula:

$$U = \frac{1}{2} \iint_{S_1} \sigma V dA + \frac{1}{2} \iint_{S_2} \sigma V dA. \quad (5.28)$$

O potencial é constante em cada uma das superfícies, de maneira que integrando resulta:

$$U = \frac{1}{2}QV_1 - \frac{1}{2}QV_2 . \quad (5.29)$$

Obtemos assim a energia armazenada no condensador:

$$U = \frac{1}{2}Q\Delta V . \quad (5.30)$$

A equação anterior também se pode escrever em função da capacidade do condensador ( $C = Q/\Delta V$ ):

$$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}C(\Delta V)^2 . \quad (5.31)$$

### Exemplo 5.3

Calcule a energia armazenada num condensador plano de placas paralelas a partir da energia volúmica em função do campo elétrico.

As linhas de campo elétrico entre as placas são quase paralelas na região central, mas curvam-se, chegando a sair do condensador, nos extremos das placas. Para facilitar o cálculo desprezaremos a curvatura do campo nos extremos, admitindo que só existe campo no paralelepípedo delimitado pelas duas placas; a componente normal do campo elétrico na fronteira dessa região é nula e, conseqüentemente, a energia pode ser calculada integrando  $\epsilon_0 E^2/2$  dentro da região. O campo elétrico entre as placas é constante:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

e a energia eletrostática armazenada no condensador é

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \iiint_R E^2 dv = \frac{\sigma^2 AL}{2\epsilon_0} ,$$

onde  $A$  é a área das placas e  $L$  a distância entre elas. A carga volúmica (que assumimos constante) é  $Q/A$ , de maneira que

$$U = \frac{1}{2} \left( \frac{L}{\epsilon_0 A} \right) Q^2 .$$

A expressão dentro do parêntese é o inverso da capacidade do condensador e a energia armazenada é, portanto,  $U = Q^2/(2C)$ , corroborando a Equação(5.31).

No exemplo anterior admitiu-se que o campo elétrico era constante e só existia entre as placas do condensador. O resultado obtido para a energia é aproximado;

contudo, o resultado é idêntico à energia calculada através da capacidade, já que no cálculo da capacidade admitimos uma carga superficial uniforme, que é consistente com a aproximação de campo elétrico constante. Um cálculo mais preciso da capacidade do condensador deverá incluir o efeito das bordas, onde o campo não é constante (ver Problema 8).

#### Exemplo 5.4

Calcule a capacidade do condensador esférico, a partir do cálculo da energia armazenada.

As Equações 5.31 podem ser usadas também para definir a capacidade de um condensador: a energia armazenada num condensador é diretamente proporcional ao quadrado da carga armazenada e a constante de proporcionalidade é igual a  $1/(2C)$ . Calculemos pois a energia armazenada no condensador, a qual deve ser proporcional a  $Q^2$ .

No condensador esférico, o módulo do campo elétrico entre as esferas é igual a

$$E = \frac{kQ}{r^2} \quad (a < r < b).$$

Como no exterior da esfera maior e no interior da esfera menor o campo elétrico é nulo, a energia eletrostática dentro do condensador é

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \iiint_{\mathcal{R}} E^2 \, dv = \int_a^b \int_0^{4\pi} \left( \frac{\epsilon_0 k^2 Q^2}{2r^2} \right) d\Omega \, dr = \frac{kQ^2}{2} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right).$$

A constante que multiplica  $Q^2$  é  $1/(2C)$ . Portanto a capacidade do condensador esférico é

$$C = \frac{ab}{k(b-a)}.$$

## 5.5. Dielétricos

Qualquer substância que não seja condutora é chamada **dielétrico**. Nos dielétricos não existem elétrons livres de condução; todos os elétrons estão ligados aos átomos ou às moléculas do dielétrico. Existem dois tipos de moléculas: apolares, nas quais a nuvem de elétrons e os núcleos positivos têm o seu centro de massa no mesmo ponto, e moléculas polares, em que os centros de massa das cargas positivas e negativas não coincidem, o que faz com que a molécula seja um pequeno dipolo elétrico.

Nos dielétricos formados por moléculas polares, quando não existe nenhum campo elétrico externo, os pequenos dipolos encontram-se orientados aleatoriamente, pelo

que não se observa qualquer efeito de separação de cargas a nível macroscópico. Quando se introduz um campo elétrico, os dipolos moleculares orientam-se no sentido oposto ao campo e o corpo todo comporta-se como um grande dipolo elétrico. No caso de materiais constituídos por moléculas apolares, o campo externo polariza as moléculas no sentido oposto, produzindo também o mesmo efeito de um dipolo macroscópico, mas de menor intensidade do que no caso de moléculas polares.

Se o campo elétrico for muito forte, poderá acontecer que a separação entre eletrões e núcleos seja muito grande, podendo mesmo libertarem-se alguns eletrões, deixando as respetivas moléculas ionizadas. Este fenómeno constitui uma rutura do dielétrico, que faz com que apareçam cargas livres transformando-se o dielétrico num condutor; no entanto, as cargas livres desaparecem rapidamente devido à ação do campo.

Um exemplo típico de rutura de um dielétrico é um raio. As tempestades dão-se quando existem campos intensos entre as nuvens e os objetos na superfície da Terra. O ar é um dielétrico que não permite a passagem de cargas entre as nuvens e os objetos; quando o campo fica muito intenso, dá-se uma rutura de algumas moléculas do ar e uma descarga elétrica brusca com transferência de cargas elétricas. Se o dielétrico fosse um sólido, a rutura deixaria fissuras na matéria.

Cada dielétrico é caracterizado por um valor máximo do campo elétrico que pode suportar sem rutura, a que se dá o nome de **rigidez dielétrica** (Tabela 5.1).

**Tabela 5.1.:** Constante dielétrica e rigidez dielétrica de várias substâncias.

<b>Substância</b>	<b>Constante dielétrica, <math>K</math></b>	<b>Rigidez dielétrica <math>E_{\text{máx}}/ \text{kV} \cdot \text{mm}^{-1}</math></b>
Água (20° C)	80	—
Ar	1,000 59	3
Baquelite	4,9	24
Óleo de transformador	2,24	12
Papel	3,7	16
Acrílico	3,4	40
Vidro pirex	5,6	14
Porcelana	7	5,7
Poliestireno	2,55	24
Parafina	2,1-2,5	10

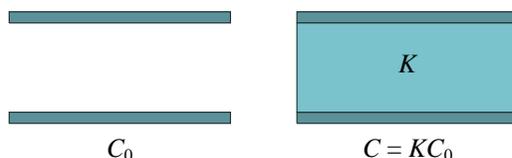
Fonte: Tipler, P.A. *Physics*, Worth Publishers, New York, 1976, pág. 778.

Outra constante característica dos dielétricos é a **constante dielétrica**. Ao introduzir-se um dielétrico entre as armaduras de um condensador (Figura 5.5), a sua capaci-

dade aumenta num factor  $K$ , próprio de cada dielétrico e independentemente da forma ou tamanho do condensador (fenómeno descoberto por Cavendish no século xviii e estudado por Michael Faraday no século xix). Se a capacidade do condensador na ausência de dielétrico for  $C_0$ , após a introdução daquele a capacidade aumentará até

$$C = K C_0, \quad (5.32)$$

sendo  $K > 1$  a constante dielétrica.



**Figura 5.5.:** Um dielétrico aumenta a capacidade de um condensador num factor  $K$ .

Em virtude do condensador estar isolado, a carga nas armaduras permanece constante durante a introdução de um dielétrico. Como a capacidade aumenta, a diferença de potencial deve, então, diminuir:

$$\Delta V = \frac{Q_0}{C} = \frac{Q_0}{K C_0} = \frac{V_0}{K}. \quad (5.33)$$

Na construção de um condensador é aconselhável usar um dielétrico entre as armaduras. O dielétrico cumpre três funções:

1. Aumenta a capacidade do condensador;
2. Actua como isolante entre as armaduras, evitando que elas entrem em contacto, e servindo ao mesmo tempo como suporte;
3. Aumenta o valor máximo do potencial que o condensador pode suportar sem se queimar (devido ao aumento da rigidez dielétrica).

## 5.6. Campo elétrico dentro da matéria

Já vimos que dentro dos condutores em equilíbrio eletrostático o campo elétrico é nulo. No vácuo, o campo elétrico é determinado pelas duas equações básicas da eletrostática que estudámos no capítulo anterior. Dentro de um dielétrico, o campo elétrico não é igual ao que existiria sem dielétrico já que, como vimos, a diferença de potencial entre as armaduras de um condensador diminui ao introduzir um dielétrico.

Vamos obter as equações básicas da eletrostática dentro de um dielétrico. Consideremos o caso simples do condensador de placas planas e paralelas. A capacidade sem dielétrico é dada pela Equação (5.8); ao introduzir um dielétrico de constante  $K$ , a capacidade será

$$C = \frac{K\epsilon_0 A}{d}. \quad (5.34)$$

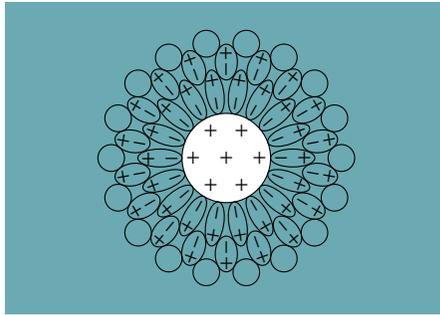
A diferença de potencial entre as placas é

$$\Delta V = \frac{Q}{C} = \frac{\sigma d}{K\epsilon_0}, \quad (5.35)$$

onde  $d$  é a distância entre placas e  $\sigma$  a carga superficial. Se admitirmos que o campo  $E$  é uniforme, obtemos

$$E = \frac{\Delta V}{d} = \frac{\sigma}{K\epsilon_0}. \quad (5.36)$$

No caso do vácuo já vimos que, como consequência da lei de Gauss, o campo na superfície dos condutores é  $\sigma/\epsilon_0$ ; logo nos dielétricos esta lei deverá ser modificada como veremos a seguir.



**Figura 5.6.:** Polarização das moléculas de um dielétrico à volta de cargas livres.

Um campo elétrico externo polariza as cargas dentro dos átomos ou moléculas de um dielétrico (ver Figura 5.6). A polarização dos átomos é sempre na mesma direção e sentido do campo elétrico externo; o resultado é um campo interno induzido  $\vec{E}_i$  oposto ao campo externo  $\vec{E}_0$ . O campo elétrico total dentro do dielétrico é

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_i. \quad (5.37)$$

O campo induzido é proporcional ao campo externo e, portanto, também proporcional ao campo total:

$$\vec{E}_i = -\chi_e \vec{E}, \quad (5.38)$$

onde  $\chi_e$  é uma constante positiva chamada **susceptibilidade elétrica**. Substituindo  $\vec{E}_i$  na Equação (5.37), obtemos a relação entre o campo, com e sem dielétrico:

$$\vec{E} = \frac{1}{1 + \chi_e} \vec{E}_0, \quad (5.39)$$

e comparando com a relação obtida experimentalmente num condensador, vemos que a constante dielétrica é igual a

$$K = 1 + \chi_e. \quad (5.40)$$

O campo  $\vec{E}_0$  é produzido por todas as **cargas livres** (cargas que não são devidas à polarização), e as cargas induzidas são responsáveis pelo campo  $\vec{E}_i$ . O campo  $\vec{E}_0$  é o campo que existiria se não houvesse dielétrico.

Na ausência do dielétrico o campo elétrico verifica a lei de Gauss, na forma introduzida no Capítulo 2:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_0 = \frac{\rho_0}{\epsilon_0}, \quad (5.41)$$

onde  $\rho_0$  é a carga volúmica livre e  $\epsilon_0$  a permissividade elétrica no vácuo. Resolvendo a Equação (5.39) em ordem a  $\vec{E}_0$  e substituindo na Equação (5.41) obtemos

$$\vec{\nabla} \cdot [(1 + \chi_e)\vec{E}] = \frac{\rho_0}{\epsilon_0}. \quad (5.42)$$

Este último resultado pode ser escrito na forma simples

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_0}, \quad (5.43)$$

onde  $\vec{D}$  é o chamado **deslocamento elétrico**, e define-se como

$$\boxed{\vec{D} \equiv \epsilon \vec{E}}. \quad (5.44)$$

A **permissividade elétrica**  $\epsilon$  do material é definida na seguinte forma:

$$\epsilon = (1 + \chi_e)\epsilon_0 = K\epsilon_0. \quad (5.45)$$

A permissividade é, assim, uma constante positiva maior que a permissividade do vácuo. Um condutor perfeito teria uma susceptibilidade e uma permissividade infinitas. No caso de campos variáveis, a permissividade depende da frequência de oscilação do campo elétrico. A polarização dos átomos ou moléculas não acontece em forma instantânea e, portanto, a oscilação das cargas induzidas apresenta um atraso em relação à oscilação do campo.

De qualquer forma, a lei de Gauss, na forma que já conhecíamos, continua válida para o campo dentro do meio dielétrico em função da carga volúmica total (livre mais induzida):

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (5.46)$$

Esta última equação designa-se forma **microscópica** da lei de Gauss; esta forma não é muito útil pois as cargas induzidas dependem do campo no dielétrico, e para calcular o campo no dielétrico seria preciso conhecer as cargas induzidas. Assim, a forma **macroscópica** (Equação 5.43) é mais apropriada, pois permite calcular o deslocamento eléctrico (conhecidas algumas condições fronteira) a partir da carga volúmica livre; o campo eléctrico calcula-se em função do deslocamento e, finalmente, a carga volúmica induzida.

## Perguntas

1. A capacidade eléctrica de um condutor isolado:
  - A. Diminui se o condutor tiver um dielétrico à sua volta.
  - B. Não depende do seu tamanho.
  - C. Mede-se em unidades de J/C.
  - D. É igual ao trabalho necessário para deslocar uma carga desde o infinito até o condutor.
  - E. É independente da carga acumulada no condutor.
2. Qual é a capacidade de um condensador que quando se liga a uma diferença de potencial de 9.0 V armazenar carga equivalente a  $10^{10}$  eletrões na armadura negativa?
  - A. 14 nF
  - B. 178 nF
  - C. 178 pF
  - D. 14 pF
  - E. 5.6 pF
3. Qual é a capacidade de um condensador de placas paralelas circulares, com 5 cm de raio, separadas de 1 cm?
  - A. 6.9 pF
  - B. 22.0 pF
  - C. 2.2 pF
  - D. 0.22 nF
  - E. 0.69 nF
4. Aumentando a carga de um condensador de placas paralelas de  $3 \mu\text{C}$  para  $9 \mu\text{C}$  e aumentando a separação entre as placas de 1 mm para 3 mm, a energia armazenada no condensador varia de um fator
  - A. 9
  - B. 3
  - C. 8
  - D. 27
  - E. 1/3
5. Num sistema de dois condensadores ligados em paralelo, qual das seguintes afirmações é verdadeira?
  - A. A capacidade equivalente é menor que as capacidades dos dois condensadores.
  - B. A carga armazenada nos dois condensadores é a mesma.
  - C. A carga armazenada será maior no condensador com maior capacidade.
  - D. A diferença de potencial será maior no condensador com maior capacidade.
  - E. A diferença de potencial será maior no condensador com menor capacidade.

## Problemas

1. Que quantidade de carga deve ser removida de um condensador de 850 pF para o seu potencial diminuir 5 V?
2. Um condensador de placas planas e paralelas distanciadas 1 cm e de 12 cm<sup>2</sup> de área, está totalmente preenchido por dois dielétricos, cada um com espessura igual a 0,5 cm e a mesma área das placas. Calcule a capacidade do condensador sabendo que as constantes dos dielétricos são 4,9 e 5,6.
3. Um condensador de placas planas paralelas tem duas placas de área  $A$  separadas uma distância  $x$ .
  - (a) Se a carga armazenada é  $Q$ , calcule a energia armazenada em função de  $x$ .
  - (b) Calcule o aumento da energia eletrostática ( $dU$ ) devido a um aumento infinitesimal da distância entre as placas ( $dx$ ).
  - (c) Calcule a força entre as placas e diga se é atractiva ou repulsiva. (Sugestão: o trabalho realizado pela força entre as placas é igual à diminuição da energia eletrostática.)
  - (d) Mostre que o módulo da força calculada na alínea  $c$  é igual a  $QE/2$ , onde  $E$  é o campo entre as placas. A força sobre uma carga  $Q$  dentro de um campo  $E$  é  $QE$ ; porque aparece o factor 1/2 no resultado anterior?
4. Calcule a energia armazenada num condensador cilíndrico a partir da energia volúmica, em função do campo elétrico. Mostre que o resultado verifica a Equação (5.31).
5.
  - (a) Qual é a carga superficial máxima ( $\sigma_{\max}$ ) que pode existir na superfície de um condutor isolado, rodeado por ar, sem se produzir uma descarga elétrica?
  - (b) Qual é o raio mínimo ( $r_{\min}$ ) de uma esfera metálica para que possa estar ao potencial de  $10^6$  V sem se descarregar?
  - (c) Calcule o potencial máximo que pode alcançar uma esfera metálica de raio 1 cm.
6. Considere um condensador de placas planas e paralelas, de área 0,3 m<sup>2</sup> e distanciadas 0,5 cm. Entre as placas encontra-se uma chapa de acrílico com a mesma área e espessura igual a 0,5 cm. O condensador é carregado até a diferença de potencial ser igual a 12 V e, de seguida, é desligado da fonte usada para o carregar. Qual é o trabalho necessário para retirar a chapa de acrílico de entre as placas do condensador?
7. No condensador do problema anterior, calcule o potencial de rutura com dielétrico e depois de este ser removido.
8. A capacidade de um condensador plano é normalmente calculada desprezando-se os efeitos das bordas, isto é, supondo o campo interno uniforme e o campo externo nulo. Quando se consideram os efeitos das bordas, o valor exacto da capacidade é superior ou inferior a este valor aproximado?

9. Quando o núcleo de urânio ( ${}_{92}\text{U}$ ) captura um neutrão, fissiona-se em dois outros núcleos, emitindo vários neutrões que, por sua vez, podem provocar a fissão de outros núcleos. Admitindo que os produtos de fissão são núcleos com cargas iguais a  $+46e$  e que, depois da fissão, os dois núcleos estão em repouso e separados por uma distância igual ao dobro dos respectivos raios  $2R \approx 1.3 \times 10^{-14}$  m, calcule:
- A energia libertada na fissão, admitindo que esta é igual à energia potencial eletrostática dos fragmentos da fissão.
  - Quantas fissões por segundo são necessárias para gerar uma potência de 1 MW num reactor de urânio?
  - Por quantos dias funcionaria o reactor da alínea *b* se tivesse uma mole de núcleos de urânio?

## Respostas

Perguntas: 1. E. 2. C. 3. A. 4. D. 5. C.

### Problemas

- 4.25 nC.
- 5.55 pF.
- (a)  $Q^2 x / 2\epsilon_0 A$ .                      (c)  $Q^2 / 2\epsilon_0 A$ , atractiva.  
(b)  $Q^2 dx / 2\epsilon_0 A$ .
- $(kQ^2/L) \ln(b/a)$ .
- (a) 2.6 nC/cm<sup>2</sup>.                      (c) 30 kV.  
(b) 1/3 m.
- $3.12 \times 10^{-7}$  J
- Sem dieléctrico, 15 kV; com dieléctrico 200 kV.
- Maior.
- (a)  $3.76 \times 10^{-11}$  J.                      (c) 261 dias.  
(b)  $2.66 \times 10^{16}$ .

## 6. Corrente elétrica



**Georg Simon Ohm (1789–1854)**

Físico e matemático alemão, nasceu em Erlangen, na Baviera. Foi professor de matemática em Colónia e em Nuremberga. Entre 1825 e 1827, Ohm desenvolveu a primeira teoria matemática da condução elétrica nos circuitos, baseando-se no estudo da condução do calor de Fourier e fabricando os fios metálicos de diferentes comprimentos e diâmetros usados nos seus estudos da condução elétrica. Este seu trabalho não recebeu o merecido reconhecimento na sua época, tendo a famosa lei de Ohm permanecido desconhecida até 1841 quando recebeu a medalha Copley da *Royal Society* britânica. Até essa data os empregos que teve em Colónia e Nuremberga não eram permanentes não lhe permitindo manter um nível de vida médio. Só depois de 1852, dois anos antes de morrer, conseguiu uma posição estável como professor de física na Universidade de Munique.

No ano de 1800 o italiano Alessandro Volta construiu a primeira pilha química, a qual desencadeou uma intensa investigação dos fenômenos elétricos e magnéticos. Pela primeira vez na história da ciência era possível produzir um fluxo contínuo de cargas elétricas.

Nos capítulos anteriores estudamos condutores isolados, em equilíbrio eletrostático, e, portanto, a potencial constante. Qualquer carga introduzida num condutor isolado distribui-se rapidamente na sua superfície, regressando o condutor ao seu estado de equilíbrio. Uma pilha mantém um condutor em estado de desequilíbrio. A pilha introduz uma diferença de potencial nos extremos do condutor; o extremo que estiver ligado ao elétrodo **positivo** da pilha, terá um potencial  $V_A$  maior do que o potencial  $V_B$  do extremo ligado ao elétrodo **negativo**. Os eletrões livres do condutor deslocar-se-ão na direção do extremo A com maior potencial, como se mostra na Figura 6.1.

Para conseguir manter a diferença de potencial entre os pontos A e B, a pilha deve extrair os eletrões livres no ponto A (elétrodo positivo), e injetar eletrões no ponto B (elétrodo negativo). Desta forma não se acumulam cargas negativas e positivas em A e em B, respetivamente, e o condutor não recupera o estado de equilíbrio; mantém-se um fluxo contínuo de carga negativa entrando no condutor pelo extremo B e saindo por A.

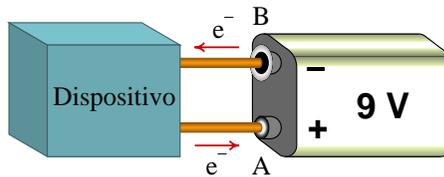


Figura 6.1.: Pilha ligada a um dispositivo.

O fluxo de carga constitui a **corrente elétrica**; a intensidade da corrente através de uma superfície é igual à carga transferida através da superfície, por unidade de tempo:

$$I \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t}. \quad (6.1)$$

A corrente não deverá ser interpretada como a “derivada” da carga em função do tempo, o que pode conduzir a confusões; na equação anterior  $\Delta Q$  está distribuída sobre uma superfície e não é simplesmente o aumento de uma função  $Q$  devido ao aumento da variável  $t$ . O que por vezes acontece é que para uma superfície fixa é possível encontrar uma relação direta entre a carga que atravessa a superfície a partir de um instante fixo e o intervalo de tempo a partir do instante inicial; nesse caso, se  $t$  representa o intervalo de tempo,  $Q$  não pode ser qualquer função, mas será necessariamente crescente a partir de zero, e a sua derivada será igual à corrente instantânea. A carga total que atravessa a superfície entre  $t_1$  e  $t_2$  é sempre

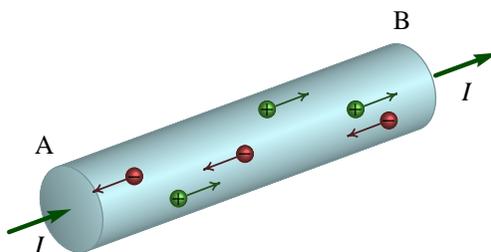
dada pelo integral

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} I dt . \quad (6.2)$$

A unidade de corrente elétrica usada no Sistema Internacional de unidades é o **ampere**, representado pela letra A ( $1 \text{ A} = 1 \text{ C/s}$ ). Por exemplo, se a corrente num condutor fosse 3 A, a carga dos eletrões que saem do eléctrodo negativo e entram no eléctrodo positivo da bateria, durante 5 segundos, seria  $-15$  coulombs. De igual forma podemos considerar que nos 5 segundos a bateria perdeu  $+15 \text{ C}$  no eléctrodo positivo e recebeu  $+15 \text{ C}$  no eléctrodo negativo, já que, ao perder eletrões, o eléctrodo negativo fica carregado positivamente. Por convenção definimos o sentido da corrente  $I$  como o sentido da transferência de carga positiva. A corrente num condutor é sempre dirigida do ponto com maior potencial para o ponto com menor potencial.

### Exemplo 6.1

Numa lâmpada fluorescente de 3 cm de diâmetro, considere que existe um fluxo de  $2 \times 10^{18}$  eletrões por segundo, e um fluxo de  $0,5 \times 10^{18}$  iões (de carga  $+e$ ) por segundo. Calcule a corrente.



**Figura 6.2.:** Movimento de cargas dentro de uma lâmpada fluorescente.

O gás ionizado dentro da lâmpada é um condutor com portadores de carga positiva e negativa (Figura 6.2). Quando existe uma diferença de potencial entre os terminais da lâmpada, os eletrões deslocam-se para o terminal com maior potencial, enquanto os iões se deslocam em sentido contrário. As duas correntes, eletrónica e iónica, têm assim o mesmo sentido (o deslocamento de iões e eletrões deixa um excesso de carga positiva no ponto B). A corrente total é a soma das correntes eletrónica ( $I_e$ ) e iónica ( $I_i$ ):

$$I = I_e + I_i .$$

Calcula-se cada uma das correntes multiplicando o fluxo dos portadores de carga pela sua carga; neste caso, o valor absoluto da carga dos iões e eletrões é igual à

carga elementar:

$$I_e = 2 \times 10^{18} \cdot 1.6 \times 10^{-19} \text{ A} = 0.32 \text{ A} ,$$

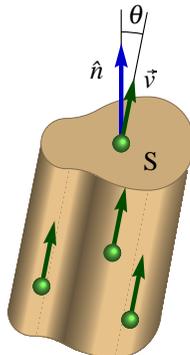
$$I_i = 0.5 \times 10^{18} \cdot 1.6 \times 10^{-19} \text{ A} = 0.08 \text{ A} ,$$

$$I = 0.32 \text{ A} + 0.08 \text{ A} = 0.4 \text{ A} .$$

O fluxo de elétrons é maior do que o fluxo de íões uma vez que no condutor que liga a lâmpada à fonte existe um fluxo de elétrons correspondente à corrente total 0,4 A, ou seja  $2.5 \times 10^{18} \text{ e}^-/\text{s}$ . Em cada segundo entram na lâmpada  $2.5 \times 10^{18}$  elétrons no ponto B;  $2 \times 10^{18}$  percorrem a lâmpada e os restantes  $0.5 \times 10^{18}$  recombinam-se com os  $0.5 \times 10^{18}$  íões que se deslocam desde o ponto A até o ponto B. Em cada segundo, o mesmo número ( $0.5 \times 10^{18}$ ) de átomos neutros são ionizados no ponto A. Os  $0.5 \times 10^{18}$  elétrons libertados na ionização de átomos neutros, mais os  $2 \times 10^{18}$  elétrons que entram na lâmpada em B, saem pelo ponto A. Se o sistema estiver em equilíbrio, existirá também um fluxo de  $0.5 \times 10^{18}$  átomos neutros por segundo, desde o ponto B até o ponto A; o fluxo total de massa é  $2.5 \times 10^{18}$  elétrons por segundo, desde o ponto B até o ponto A ( $2 \times 10^{18}$  elétrons de condução mais  $0.5 \times 10^{18}$  transportados pelos átomos neutros).

## 6.1. Densidade de corrente

Além dos condutores, existem muitos outros sistemas onde pode existir corrente eléctrica. Sempre que existam partículas carregadas em movimento existirão fluxo de carga e corrente eléctrica. Consideremos uma substância que tem  $n$  partículas portadoras de carga por unidade de volume, todas elas com a mesma carga  $q$  e velocidade  $\vec{v}$ . As partículas que passam num intervalo de tempo  $\Delta t$ , através de uma superfície  $S$ , formam um sólido de base  $S$  e altura  $d = v\Delta t \cos \theta$ , onde  $\theta$  é o ângulo formado pelo vetor velocidade ( $\vec{v}$ ) e a normal ( $\hat{n}$ ) à superfície (Figura 6.3).



**Figura 6.3.:** Velocidade média  $\vec{v}$  das cargas de condução num condutor.

No topo do sólido encontram-se as partículas que passaram no instante inicial

$t_0$ , e na base estão as partículas que acabam de chegar a  $S$  no instante  $t_0 + \Delta t$ . O número total de portadores de carga dentro do sólido é dado pelo produto do **número volúmico** de partículas ( $n$ ) pelo volume do sólido:

$$N = nAv\Delta t \cos \theta, \quad (6.3)$$

e a sua carga total é dada por  $\Delta Q$  que passa através de  $S$  no intervalo  $\Delta t$ :

$$\Delta Q = qnAv\Delta t \cos \theta. \quad (6.4)$$

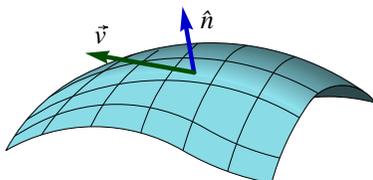
Em função do vetor  $\hat{n}$ , normal à superfície, a corrente através de  $S$  é

$$I = \rho A(\vec{v} \cdot \hat{n}), \quad (6.5)$$

onde  $\rho = nq$  é a carga volúmica devida às partículas portadoras de carga.

Podemos generalizar o resultado anterior ao caso em que a velocidade e o número volúmico de portadores de carga não sejam constantes, mas variem com a posição. Neste caso, para calcular a corrente  $I$ , dividimos a superfície em pequenos elementos (Figura 6.4). Em cada elemento tanto  $\vec{v}$  como  $\hat{n}$  variam mas, como a área é pequena, obteremos uma boa aproximação se usarmos os seus valores médios e a Equação (6.5); deste modo, a corrente  $dI$  através de cada um dos elementos de superfície de área  $dA$ , é

$$dI = \rho \vec{v} \cdot d\vec{A}. \quad (6.6)$$



**Figura 6.4.:** Superfície com densidade de corrente e vetor normal variáveis.

Integrando  $dI$  sobre toda a superfície  $S$  obtém-se a corrente total:

$$I = \iint_S \rho \vec{v} \cdot d\vec{A}. \quad (6.7)$$

Define-se a **densidade de corrente**  $\vec{J}$  como o vetor  $\rho\vec{v}$ , no sentido do fluxo da carga positiva:

$$\boxed{\vec{J} = \rho\vec{v}}. \quad (6.8)$$

A densidade de corrente é no sentido da velocidade dos portadores de carga, se a carga destes for positiva, ou no sentido oposto à velocidade se a carga dos

portadores é negativa. A corrente é o fluxo de carga através de uma superfície e é igual ao integral de superfície do campo  $\vec{J}$ :

$$I = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{A} . \quad (6.9)$$

Num condutor podem existir vários tipos diferentes de portadores de carga (como no Exemplo 6.1). Nesses casos existe uma densidade de corrente  $\vec{J}$  associada a cada “espécie” de portadores, e a densidade de corrente total é a soma de todas elas. Um caso particular é quando a densidade de corrente é constante e normal à superfície, ou seja,  $I = JA$ .

Se a superfície  $S$  na Equação (6.9) for uma superfície fechada, o integral de superfície de  $\vec{J}$  será igual à carga total que sai da superfície, por unidade de tempo. Devido à conservação da carga, a carga que sai através da superfície fechada  $S$ , será igual à diminuição da carga interna dentro do volume delimitado por  $S$ :

$$- \frac{dq_{\text{int}}}{dt} = \oiint_S \vec{J} \cdot d\vec{A} . \quad (6.10)$$

A carga interna é igual ao integral da carga volúmica na região  $R$  delimitada por  $S$ , e o termo do lado direito da equação anterior pode ser calculado como um integral de volume, por meio do teorema da divergência:

$$- \iiint_R \frac{d\rho}{dt} dV = \iiint_R \vec{\nabla} \cdot \vec{J} dV ; \quad (6.11)$$

logo, para que este resultado seja válido em qualquer volume, é necessário que as funções dentro dos integrais sejam iguais:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = - \frac{d\rho}{dt} . \quad (6.12)$$

Esta equação é consequência direta da conservação da carga, e é chamada **equação de continuidade**. Quando a divergência da densidade de corrente for zero, a corrente é **estacionária**; nesse caso não existe acumulação de carga em nenhum ponto.

### Exemplo 6.2

Um fio de cobre de raio 0.0815 cm transporta uma corrente de 1 A. Calcule a densidade de corrente e a velocidade média dos elétrons de condução. (A massa atômica do cobre é 63.5, e a sua massa volúmica 8.92 g/cm<sup>3</sup>, e por cada átomo de cobre existe aproximadamente um elétron de condução.)

Num fio de raio constante, com corrente constante, a densidade de corrente pode variar ao longo da seção transversal e, por isso, podemos apenas calcular a densidade de corrente média. Admitindo que  $\vec{J}$  é constante e paralela ao eixo do fio, obtemos

$$J = \frac{I}{A} = \frac{I}{\pi r^2} = \frac{1 \text{ A}}{\pi(0.0815 \text{ cm})^2} \approx 48 \frac{\text{A}}{\text{cm}^2}.$$

Por cada átomo de cobre existe um elétron de condução, logo, por cada mole de átomos de cobre existem  $6,022 \times 10^{23}$  elétrons de condução. O número de elétrons de condução por grama de cobre é

$$\frac{6.022 \times 10^{23}}{63.5 \text{ g}} \approx 9.48 \times 10^{21} \text{ g}^{-1}.$$

Multiplicando pela massa volúmica do cobre, obtemos o número volúmico de elétrons de condução:

$$n = 9.48 \times 10^{21} \text{ g}^{-1} \cdot 8.92 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \approx 8.46 \times 10^{22} \text{ cm}^{-3}.$$

A carga volúmica do gás de elétrons de condução é

$$\rho = ne = 13.5 \frac{\text{kC}}{\text{cm}^3}.$$

Finalmente, podemos calcular a velocidade média dos elétrons de condução:

$$v = \frac{J}{\rho} = \frac{48 \text{ A/cm}^2}{13.5 \text{ kC/cm}^3} \approx 3.6 \times 10^{-3} \frac{\text{cm}}{\text{s}} = 12.96 \frac{\text{cm}}{\text{h}}.$$

Tal como mostra o exemplo anterior, os elétrons de condução num fio com corrente elétrica têm uma velocidade média de poucos centímetros por hora. No entanto, a nossa experiência quotidiana diz-nos que correntes elétricas dentro de fios metálicos se propagam de maneira instantânea. Devemos lembrar que estamos a tratar com um gás de elétrons com carga volúmica bastante elevada ( $13.5 \text{ kC/cm}^3$  no Exemplo 6.2) e no instante em que aceleramos o gás num extremo do condutor, começam a sair imediatamente cargas negativas no extremo oposto, qualquer que seja o comprimento do fio. É uma situação análoga à abertura de uma torneira ligada a uma mangueira; se esta já está cheia de água, no momento em que se abre a torneira começa logo a sair água no extremo oposto da mangueira, mesmo no caso da velocidade da água ser muito pequena.

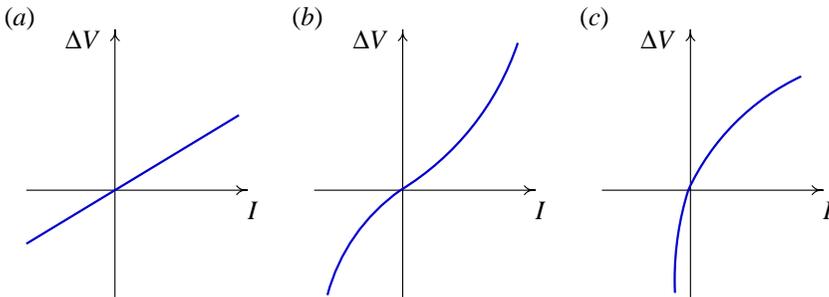
## 6.2. Resistência e lei de Ohm

Sempre que existe transporte de carga positiva de um ponto A até outro ponto B (que consideramos equivalente ao transporte de carga negativa de B para A), existe

uma corrente associada  $I$  dirigida de A para B. Se o transporte de cargas é devido à ação de um campo elétrico  $E$ , existe uma diferença de potencial  $\Delta V = V_A - V_B > 0$  entre os dois pontos<sup>1</sup>. Define-se a resistência  $R$  entre os pontos A e B como

$$R \equiv \frac{\Delta V}{I}. \quad (6.13)$$

A unidade de resistência no Sistema Internacional, é o **ohm** ( $1 \Omega = 1 \text{ V}/1 \text{ A}$ ). O valor da resistência  $R$  não é necessariamente constante. A curva que representa a corrente  $I$  obtida num material, como resultado da aplicação de uma diferença de potencial  $\Delta V$ , é chamada **caraterística tensão-corrente** do material. A resistência representa o valor do declive da caraterística em cada ponto. A Figura 6.5 mostra as curvas caraterísticas de três materiais. Quando a caraterística tensão-corrente é uma reta, isto é, quando a resistência é independente da corrente, diz-se que os materiais são **ohmicos** (como por exemplo qualquer metal) e verificam a **lei de Ohm**.



**Figura 6.5.:** Caraterísticas tensão-corrente de uma barra metálica (a), de uma lâmpada incandescente (b) e de um díodo (c).

A lei de Ohm é uma consequência da proporcionalidade entre a densidade de corrente e o campo elétrico e é dada pela expressão:

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}, \quad (6.14)$$

onde a constante de proporcionalidade  $\sigma$  é uma constante própria de cada condutor ohmico, e recebe o nome de **condutividade**.

Nos materiais ohmicos, quando se introduz um campo elétrico, a velocidade média dos portadores de carga é constante e diretamente proporcional ao valor do campo; se os portadores de carga fossem livres, seriam acelerados pelo campo. Deve pois existir um mecanismo oposto à aceleração do gás de eletrões. Este mecanismo

<sup>1</sup>O campo eletrostático não é a única causa da corrente. A corrente pode ser o resultado de reações químicas ou de processos mecânicos.

não pode ser explicado, satisfatoriamente, pela física clássica; o movimento dos elétrons dentro do condutor é um fenómeno quântico no qual é patente a natureza ondulatória dos elétrons. O gás de elétrons não é um **gás ideal**. Aceitaremos a lei de Ohm simplesmente como uma lei empírica, sem tentar explicar as suas causas.

Em seguida demonstraremos que a proporcionalidade entre a densidade de corrente e o campo elétrico implica uma resistência constante (com respeito a  $I$  e  $\Delta V$ ). Consideremos um fio de material ohmico e seja  $A$  a área da secção transversal, e  $L$  o comprimento do fio. Se existir uma diferença de potencial  $\Delta V$  entre os extremos do fio, existirá também um campo elétrico  $\vec{E}$ . A densidade de corrente é dada pela lei de Ohm (Equação 6.14) e a corrente no fio será o produto de  $J$  pela área  $A$ :

$$I = \sigma EA . \quad (6.15)$$

Se a corrente for constante, a densidade de corrente e o campo elétrico também serão constantes e, portanto,

$$E = \frac{\Delta V}{L} . \quad (6.16)$$

Eliminando o campo  $E$  nas duas últimas equações e calculando  $R = \Delta V/I$  obtemos

$$R = \frac{L}{\sigma A} = \frac{\rho L}{A} , \quad (6.17)$$

onde a **resistividade**  $\rho$  é definida como o inverso da condutividade. No caso de condutores com uma forma mais complexa, o cálculo da resistência é mais complicado, mas o resultado é sempre o produto entre  $\rho$  e uma constante que depende da forma geométrica<sup>2</sup>. Assim, a lei de Ohm costuma ser escrita na forma da Equação (6.13), com  $R$  constante, ou na forma mais fundamental da Equação (6.14).

O transporte de elétrons através de um metal é um fenómeno quântico (em consequência da elevada densidade da nuvem eletrónica) que não pode ser explicado corretamente por meio de modelos clássicos. Assim, limitar-nos-emos a relacionar a condutividade com a mobilidade dos elétrons dentro do metal. Na lei de Ohm, Equação (6.14), podemos substituir a definição da densidade de corrente,  $J = \rho v$ , para obter

$$\sigma = \frac{J}{E} = \frac{\rho v}{E} . \quad (6.18)$$

O coeficiente  $v/E$  é uma medida da resposta dos portadores de carga ao campo elétrico, e denomina-se **mobilidade elétrica**,  $\mu_e$ . Temos pois que a condutividade é diretamente proporcional ao número volúmico de portadores de carga e à mobilidade do condutor:

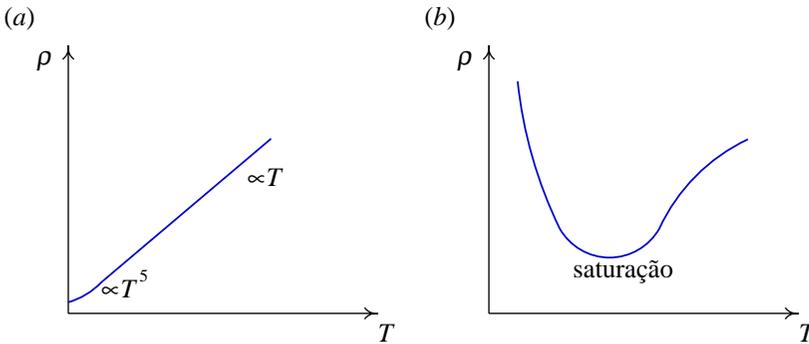
$$\sigma = \frac{1}{\rho} = \rho \mu_e . \quad (6.19)$$

<sup>2</sup>A resistividade  $\rho$  não deverá ser confundida com a carga volúmica  $\rho$ .

Nos materiais ôhmicos tanto o número volúmico de portadores de carga como a mobilidade são constantes. Num metal, o número de elétrons de condução não é alterado significativamente pela ação do campo elétrico. Os elétrons de condução deslocam-se rapidamente em todas as direções; no entanto, em condições de equilíbrio a velocidade média do gás de elétrons é nula. Na presença de um campo elétrico, os elétrons são acelerados na direção do campo, mas as colisões com a rede iónica produzem uma distribuição de velocidades em todas as direções, com um valor médio diferente de zero; esse valor médio  $v$  define a mobilidade  $\mu_e = v/E$ .

### 6.3. Resistência e temperatura

A discussão da seção anterior é apenas válida quando a temperatura é constante. Quando a temperatura aumenta num metal, embora o número de elétrons de condução permaneça quase constante, o seu número volúmico diminui, devido à dilatação do metal. Esta variação é pequena comparada com a variação da mobilidade; a temperaturas mais elevadas, as vibrações da rede iónica são mais bruscas o que dificulta o movimento do gás de elétrons, diminuindo a mobilidade  $\mu_e$ . A diminuição da mobilidade conduz a um aumento da resistividade. A dependência da resistividade com a temperatura nos metais é linear, excepto a temperaturas muito baixas, perto do zero absoluto (Figura 6.6).



**Figura 6.6.:** Dependência da resistividade com a temperatura, num metal (a) e num semiconductor (b).

O aumento linear da resistividade pode expressar-se por meio da equação

$$\rho = \rho(20^\circ\text{C})[1 + \alpha(20^\circ\text{C})(T - 20)], \quad (6.20)$$

onde  $\rho(20^\circ\text{C})$  é o valor da resistividade à temperatura ambiente de  $20^\circ\text{C}$ ,  $\alpha(20^\circ\text{C})$  é uma constante chamada **coeficiente de temperatura** e  $T$  a temperatura medida

em °C. Na Tabela 6.1 encontram-se os valores da resistividade e o coeficiente de temperatura de alguns metais. De notar que, embora  $\alpha(20^\circ\text{C})$  dependa da escolha arbitrária de uma temperatura padrão, neste caso  $20^\circ\text{C}$ , o produto  $\rho(20^\circ\text{C})\alpha(20^\circ\text{C})$  é constante e igual ao declive da reta resistividade-temperatura.

**Tabela 6.1.:** Resistividade e coeficiente de temperatura de metais a  $20^\circ\text{C}$ .

<b>Metal</b>	$\rho(20^\circ\text{C})/\text{n}\Omega \cdot \text{m}$	$\alpha(20^\circ\text{C})/^\circ\text{C}^{-1}$
Alumínio	28	0,0039
Cobre	17	0,0039
Chumbo	220	0,0043
Ferro	100	0,0050
Mercúrio	960	0,0009
Níquel-cromo	1000	0,0004
Prata	16	0,0038
Tungsténio	55	0,0045

Fonte: Tipler, P. A. *Physics*, Worth Publishers, New York, 1976, pág. 793.

Nos materiais **semicondutores**, por exemplo o silício e o germânio, os portadores de carga são positivos e negativos, e o seu número volúmico aumenta rapidamente com a temperatura, o que faz com que a resistividade diminua. Para uma determinada temperatura o semicondutor atinge um nível de saturação a partir do qual o número volúmico de portadores de carga não aumenta mais, e a resistividade começa a aumentar (Figura 6.6).

### Exemplo 6.3

Considere o fio do Exemplo 6.2, com uma corrente de 1 A. Calcule o campo elétrico dentro do fio e a diferença de potencial nos extremos, se o comprimento do fio for 40 cm, e a temperatura  $30^\circ\text{C}$ .

A resistividade no fio calcula-se usando os valores para o cobre (Tabela 6.1)

$$\rho(30^\circ\text{C}) = 1.7 \times 10^{-8} (1 + 0.0039 \cdot 10) \Omega \cdot \text{m} \approx 1.766 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m} ;$$

a resistência do fio é

$$R(30^\circ\text{C}) = \frac{\rho(30^\circ\text{C})L}{A} = \frac{1.766 \times 10^{-8} \cdot 0.4}{\pi(0.000815)^2} \Omega \approx 3.39 \text{ m}\Omega .$$

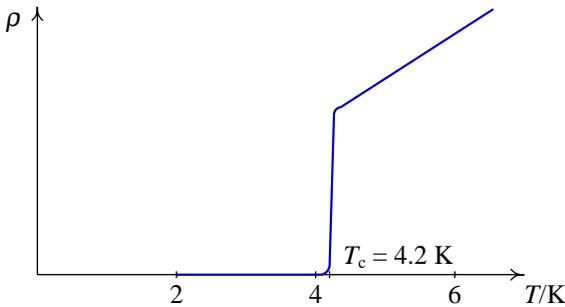
A diferença de potencial obtém-se a partir da lei de Ohm:

$$\Delta V = IR = 3.39 \text{ mV} .$$

Como a densidade de corrente é constante, o campo elétrico também deve ser constante e, portanto, pode ser calculado como

$$E = \frac{\Delta V}{\Delta s} = \frac{3.39 \text{ mV}}{0.4 \text{ m}} = 8.475 \frac{\text{mV}}{\text{m}} .$$

## 6.4. Supercondutividade



**Figura 6.7.:** Resistividade do mercúrio em função da temperatura.

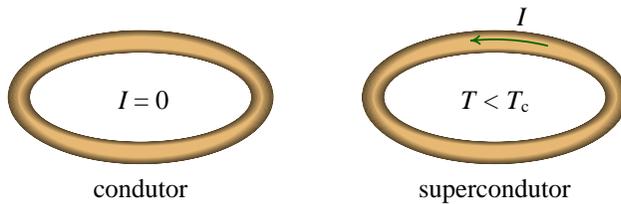
Em 1911, o físico holandês H. Kamerlingh Onnes descobriu que em alguns metais a resistividade diminuía bruscamente, tornando-se quase nula, a temperaturas muito baixas perto do zero absoluto. Por exemplo, no mercúrio a resistência decresce 4 ordens de grandeza quando a temperatura é igual a 4,2 K; esta temperatura é chamada **temperatura crítica**,  $T_c$  (Figura 6.7). A este fenómeno chama-se supercondutividade, e os materiais que apresentam este comportamento são conhecidos como supercondutores.

Não há muito tempo, as aplicações práticas da supercondutividade eram bastante limitadas, devido às temperaturas críticas serem difíceis de obter por serem muito baixas. Na década de 80 vários novos materiais foram descobertos, nos quais a temperatura crítica é muito mais elevada, sendo possível obter-se por meio de azoto líquido. A temperatura crítica mais alta pertence a um cristal composto por Hg, Ba, Ca, Cu e O, obtido em 1993, com uma temperatura crítica da ordem dos 135 K.

A supercondutividade é um fenómeno quântico, devido ao acoplamento dos eletrões a baixas temperaturas, formando os chamados **pares de Cooper**, que podem atravessar o supercondutor sem nenhuma oposição da rede iónica. Os eletrões têm *spin* de  $1/2$ , podendo agruparem-se em pares com *spin* 0. A supercondutividade nos

novos materiais de temperatura crítica elevada parece ser devida a um mecanismo diferente da formação dos pares de Cooper.

Num fio condutor fechado não pode existir corrente já que se o potencial diminuir ao longo do fio, terá que voltar a aumentar antes de se chegar ao mesmo ponto inicial, e uma corrente implicaria uma queda contínua de potencial ao longo do fio. No entanto, num fio supercondutor fechado pode existir corrente já que quando a resistência é nula, a corrente pode ser diferente de zero mesmo quando não existe diferença de potencial (Figura 6.8). Um fio supercondutor fechado pode manter uma corrente por muito tempo, sem a intervenção de nenhuma bateria, enquanto a temperatura for menor que a temperatura crítica.



**Figura 6.8.:** Um anel condutor não pode ter corrente, mas um anel supercondutor sim.

## 6.5. Energia dissipada num condutor

Em qualquer condutor onde existe uma corrente  $I$ , a corrente está sempre dirigida no sentido de maior para menor potencial. Por exemplo, no condutor da Figura 6.9, o sentido do movimento dos eletrões implica que o potencial  $V_B$  é maior que o potencial  $V_A$ . Num intervalo de tempo  $\Delta t$  entra no extremo A uma carga

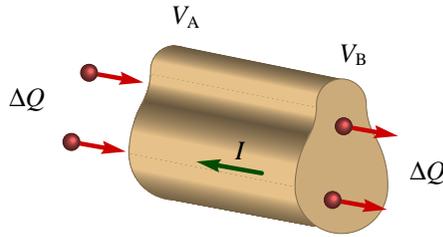
$$\Delta Q = I\Delta t, \quad (6.21)$$

com energia eletrostática  $U_A = V_A\Delta Q$ , e sai a mesma quantidade de carga, mas com uma energia  $U_B = V_B\Delta Q$  (Figura 6.9). Como  $V_B > V_A$  e  $\Delta Q$  é negativa, concluímos que  $U_B < U_A$  e, portanto,

$$\Delta U = U_B - U_A = \Delta V\Delta Q < 0. \quad (6.22)$$

O mesmo resultado obtém-se no caso de portadores de carga positiva. Os portadores de carga num condutor com corrente perdem continuamente energia eletrostática. A potência dissipada no condutor define-se como a energia dissipada por unidade de tempo e é igual a

$$\boxed{P = \Delta V I}. \quad (6.23)$$



**Figura 6.9.:** Cargas livres num condutor com corrente.

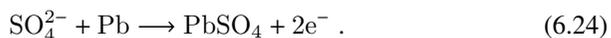
O movimento de portadores de carga é uniforme e não acelerado. Existe no sistema um mecanismo que absorve a energia cinética que os portadores de carga receberiam caso fossem realmente livres de acelerar dentro do campo elétrico. No caso dos materiais ôhmicos, o mecanismo de dissipação de energia são as colisões com a rede iônica, que transformam a energia elétrica em calor. Este fenômeno de aquecimento dos condutores com a corrente é chamado **efeito Joule**. Na lâmpada fluorescente do Exemplo 6.1, o mecanismo são também as colisões, mas desta vez com átomos; a maior parte da energia dissipada é transformada em luz como resultado das colisões.

## 6.6. Fontes de força eletromotriz

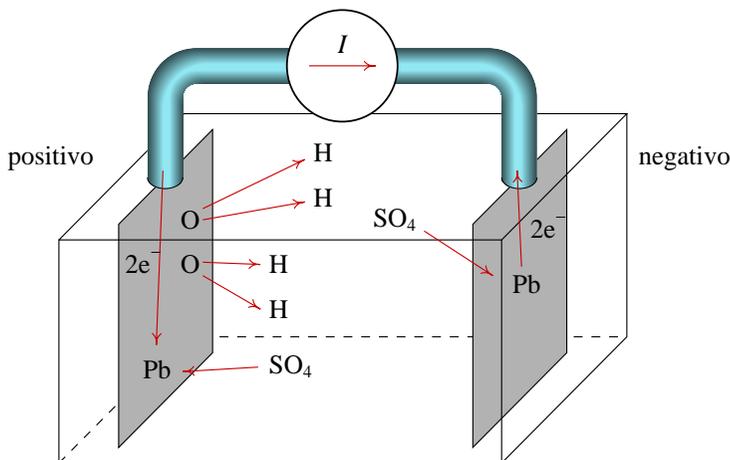
Uma fonte de tensão deve fornecer carga positiva pelo terminal a maior potencial, e receber carga positiva no terminal a menor potencial. Dentro da fonte devem existir forças diferentes da força elétrica, pois a carga positiva desloca-se no sentido de menor para maior potencial, e em sentido oposto ao campo elétrico. Nas pilhas químicas o movimento de cargas é o resultado de reações químicas, e em outro tipo de fontes o deslocamento das cargas é devido a forças mecânicas.

Um exemplo de uma pilha química é a bateria de um automóvel (representada esquematicamente na Figura 6.10). O eletrólito dentro da bateria é uma solução de ácido sulfúrico ( $\text{H}_2\text{SO}_4$ ) e água ( $\text{H}_2\text{O}$ ). Na solução, as moléculas do ácido separam-se em íons positivos  $\text{H}^+$  e em íons negativos  $\text{SO}_4^{2-}$ . O eletrodo negativo é composto por chumbo ( $\text{Pb}$ ) e o eletrodo positivo por dióxido de chumbo ( $\text{PbO}_2$ ).

Os íons  $\text{SO}_4^{2-}$  atacam o eletrodo negativo, combinando-se com o chumbo para formar sulfato de chumbo ( $\text{PbSO}_4$ ):

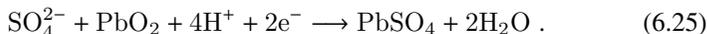


Na reação libertam-se dois elétrons que fazem diminuir o potencial do eletrodo negativo. Quando algum dispositivo é ligado à bateria, os elétrons que entram no eletrodo positivo combinam-se com o dióxido de chumbo e o ácido sulfúrico do



**Figura 6.10.:** Reações químicas dentro de uma bateria de carro.

eletrólito, para produzir água e sulfato de chumbo:



Por cada dois elétrons que circulam no circuito, duas moléculas de ácido sulfúrico do eletrólito da bateria reagem com o metal dos eletrodos, produzindo duas moléculas de água e duas moléculas de sulfato de chumbo. A bateria vai descarregando-se à medida que a concentração de ácido no eletrólito diminui.

As reações numa bateria de carro são reversíveis, sendo possível recarregá-la com uma corrente em sentido inverso: elétrons a entrar no eletrodo negativo e a sair do eletrodo positivo. Nesta situação, as reações nos eletrodos positivo e negativo são respectivamente:



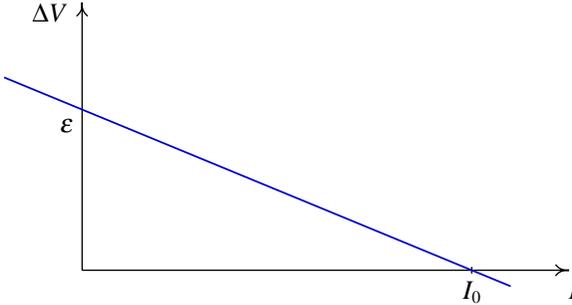
Ao recarregar a bateria, o sulfato acumulado nos eletrodos desaparece, e a concentração de ácido no eletrólito aumenta.

A energia fornecida pela fonte, por unidade de carga elétrica transportada através da fonte, tem unidades de diferença de potencial e é chamada **força eletromotriz**, ou simplesmente f.e.m., representada pela letra  $\varepsilon$  e medida em volts.

A característica tensão-corrente de uma fonte é, normalmente, uma reta com declive negativo (Figura 6.11); o declive tem unidades de resistência, e constitui a **resistência interna** da fonte. A energia fornecida pela fonte é igual ao produto da f.e.m.

pela carga total  $\Delta Q$  transportada durante o intervalo  $\Delta t$ . A potência fornecida é igual à energia fornecida por unidade de tempo:

$$P = \varepsilon I . \quad (6.28)$$



**Figura 6.11.:** Característica tensão-corrente de uma fonte de tensão.

A potência fornecida ao circuito,  $VI$ , é menor que a potência total fornecida pela fonte devido à potência dissipada dentro da própria fonte:

$$P_{\text{diss}} = (\varepsilon - V)I = (\varepsilon - \varepsilon + rI)I = rI^2 . \quad (6.29)$$

## Problemas

- Uma aluna preocupada com a elevada conta de eletricidade fez uma estimativa do consumo elétrico associado a cada um dos dispositivos que usa em casa. A tabela seguinte mostra os tempos médios de uso diário e a potência média de cada um dos dispositivos.
  - Admitindo que o custo de 1 kW·h em Portugal é €0.213, complete a tabela (1 mês = 30 dias) e determine o custo total do consumo elétrico mensal.
  - Qual é o consumo mensal de energia em joules?
  - Se a aluna dispensar a telenovela diária (1/2 hora, de segunda a sexta), quanto dinheiro poupará por mês?

Dispositivo	Potência média /W	$t$ médio diário /horas	Energia por mês /kW·h	Custo mensal /€
4 lâmpadas	60 (cada)	3 (cada)		
televisão	80	4		
aquecedor	2000	5		
fogão	1200	1		
cilindro água quente	1500	3		

2. Um fio condutor de 1 m de comprimento tem uma resistência de  $0,3 \Omega$ . O fio é esticado até o seu comprimento ser 2 m. Qual é a nova resistência?
3. A temperatura num dado momento é  $12^\circ\text{C}$ . Quanto deve aumentar a temperatura para que a resistência de um fio de cobre aumente 10 %?
4. Um disco de 18 cm de raio roda a 33 rotações por minuto num gira-discos. A superfície do disco tem uma carga superficial constante igual a  $0,82 \text{ nC/cm}^2$ . Calcule a corrente elétrica associada à rotação do disco.
5. A resistência de uma lâmpada incandescente de 60 W e 230 V, à temperatura ambiente de  $20^\circ\text{C}$ , é  $R = 65 \Omega$ . No entanto, as especificações do fabricante (60 W e 230 V) conduzem a um valor muito mais elevado da resistência. Justifique, calculando a temperatura do filamento de tungsténio quando a lâmpada se encontra acesa.
6. Uma bateria de automóvel tem uma carga de 50 Ah. Calcule a massa total de ácido sulfúrico que reage no eletrólito, e a massa de sulfato de chumbo acumulado nos eletrodos, após a bateria descarregar, ficando com 70 % da carga máxima.
7. Uma bateria de automóvel tem escrito o valor 250 Ah, que corresponde à carga disponível quando a bateria está carregada a 100%.
  - (a) Depois de algum uso, a bateria descarrega-se até 60%. A que carga corresponde este valor no sistema internacional de unidades?
  - (b) Para recarregar a bateria, esta foi ligada a um carregador de 12 V. Inicialmente a corrente que passou do carregador para a bateria foi 7 A, e ao fim de 6 horas diminuiu até 3 A. Admitindo que a corrente diminuiu linearmente, com que percentagem da sua carga máxima fica a bateria ao fim das 6 horas?
8. Um fio condutor de cobre de 1,29 mm de diâmetro e isolamento de borracha pode suportar, com segurança, uma corrente máxima de 6 A.
  - (a) Qual é a diferença de potencial que pode ser aplicada a 40 m deste fio?
  - (b) Calcule a densidade de corrente e o campo elétrico no fio atravessado por uma corrente de 6 A.
  - (c) Calcule a potência dissipada no fio quando conduz uma corrente de 6 A.
9. Um metal tem uma carga volúmica negativa ( $\rho_e$ ) devida aos eletrões livres, e uma carga volúmica positiva ( $\rho_i$ ) devida à carga total dos núcleos e dos eletrões ligados a eles. Em qualquer instante, a carga volúmica no metal é  $\rho = \rho_e + \rho_i$ .
  - (a) Dentro do metal,  $\rho_e$  verifica a equação de continuidade e  $\rho$  verifica a lei de

Gauss. Demonstre que

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}\rho.$$

(b) Encontre a solução geral da equação anterior e explique o seu significado.

(c) Mostre que a constante  $\epsilon_0/\sigma$  tem unidades de tempo.

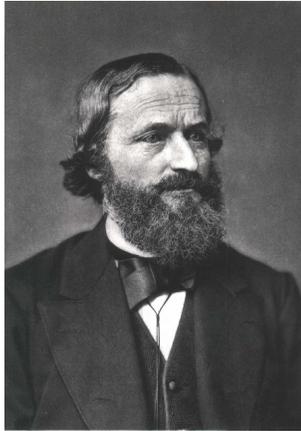
(d) Faça uma estimativa da ordem de grandeza da constante de tempo  $\epsilon_0/\sigma$  de metais como o cobre e o alumínio.

10. Um fio de níquel-cromo de 1,8 mm de diâmetro vai ser usado para construir uma caldeira de água que produza 8 g de vapor de água por segundo. A fonte de alimentação a ser usada fornece tensão contínua de 220 V. Calcule o comprimento que deve ter o fio. (O calor de evaporação da água é de 2257,2 J/g.)

## Respostas

- (a) €106,97 (sem ter em conta a taxa fixa de potência contratada).  
(b)  $1,8 \times 10^9$  J. (c) €0,19.
- 1,2  $\Omega$ .
- 24,8°C.
- 2812°C.
- 54,9 g de ácido sulfúrico e 169,7 g de sulfato de chumbo.
- (a)  $5,4 \times 10^5$  C. (b) 72 %.
- (a) 3,12 V. (b)  $J = 4,59$  MA/m<sup>2</sup>;  $E = 7,8 \times 10^{-2}$  V/m. (c) 18,7 W.
- $\rho = \rho_0 e^{-\sigma t/\epsilon_0}$ ,  $\epsilon_0/\sigma \sim 10^{-19}$  s.
- 6,6 m.

## 7. Circuitos de corrente contínua



**Gustav Robert Kirchhoff (1824–1887)**

Nasceu na actual cidade de Kaliningrad na Rússia. A pesar de maior parte da sua vida ter andado de muletas ou cadeira de rodas foi um cientista muito produtivo. Começou por ser aluno de Gauss tendo trabalhado nas Universidades de Berlim, sem auferir ordenado, e de Breslau. Em 1854 foi contratado pela Universidade de Heidelberg onde colaborou com Bunsen no desenvolvimento da técnica de espectroscopia, técnica esta que permite analisar a composição química de uma substância a partir da luz que esta emite. Aplicou esta técnica no estudo da composição química do Sol explicando a origem do seu espectro de absorção. No mesmo ano, publicou as chamadas leis de Kirchhoff como resultado do desenvolvimento do trabalho de Ohm sobre a teoria de circuitos. Teve um papel importante no estudo da radiação do corpo negro, uma das bases da futura teoria quântica. Entre outras das suas famosas obras destacam-se os 4 volumes sobre física- -matemática e o Tratado de Mecânica (1876) que em conjunto com os trabalhos de Mach e Hertz, marcaram uma nova era na interpretação da mecânica.

Neste capítulo estudam-se os circuitos elétricos com resistências, condensadores e fontes de f.e.m. constantes. No Capítulo 11 esse estudo estende-se ao caso de fontes de corrente alternada e circuitos com auto-indução magnética. Na Tabela 7.1 apresenta-se a forma esquemática de representar alguns elementos de um circuito.

**Tabela 7.1.:** Diagramas usados para alguns elementos de circuitos.

Dispositivo	Diagrama
condensador	
resistência	
fonte ideal	
interruptor	
resistência variável	
condensador variável	

A maior parte dos elementos num circuito moderno são microscópicos e estão integrados dentro de blocos; no entanto, existem alguns elementos não integrados que podem ser identificados facilmente. As resistências usadas nos circuitos são pequenos cilindros cerâmicos (aproximadamente com 0,5 cm a 1,0 cm de comprimento) com três riscas de cores e uma possível quarta risca dourada ou prateada. As três primeiras riscas representam três algarismos que indicam o valor da resistência em ohms (Tabela 7.2). Os três algarismos correspondentes às três riscas devem ser lidos por ordem começando na risca que se encontra mais próxima de um dos extremos da resistência. Os primeiros dois algarismos representam um número de 1 a 99; por exemplo, se as duas primeiras riscas fossem vermelho e roxo, representariam o número 27. A terceira risca é a potência de dez pela qual se deve multiplicar o número anterior. No mesmo exemplo, se a terceira risca fosse azul, o valor da resistência seria  $27 \times 10^6 \Omega$ . Se não existir uma quarta risca, o valor da tolerância será de 20%, isto é, o valor dado da resistência tem uma margem de erro de 20%. Uma quarta risca prateada ou dourada representa uma tolerância de 10% ou 5%, respetivamente.

Os condensadores são de formas e tamanhos muito variados. Podem ser pequenos cilindros semelhantes às resistências, cilindros maiores com blindagem metálica, pequenos discos cerâmicos, etc. Identificam-se facilmente porque costumam trazer escrito o valor da capacidade e da diferença de potencial máxima que suportam sem rutura do dielétrico. O tipo mais comum de condensador consiste em duas lâminas metálicas intercaladas com duas lâminas de papel (dielétrico) enroladas

**Tabela 7.2.:** Código de cores.

Cor	Algarismo
preto	0
castanho	1
vermelho	2
laranja	3
amarelo	4
verde	5
azul	6
roxo	7
cinzento	8
branco	9

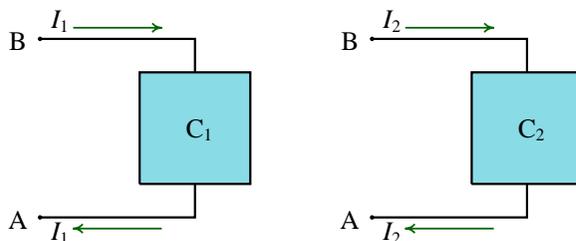
formando um cilindro; desta forma a superfície das armaduras pode ser muito maior do que a superfície do cilindro.

## 7.1. Circuitos equivalentes

Dois circuitos,  $C_1$  e  $C_2$ , com dois terminais A e B, são considerados equivalentes se, para qualquer valor da diferença de potencial  $\Delta V = V_A - V_B$ , a corrente que entra num terminal e sai no outro terminal é a mesma nos dois circuitos (Figura 7.1). Para representar diferenças de potencial entre dois pontos usaremos a mesma convenção de índices usada no Capítulo 1 para os vetores de posição:

$$V_{BA} \equiv V_A - V_B, \quad (7.1)$$

isto é,  $V_{BA}$  é o aumento do potencial quando passamos do ponto B para o ponto A (positivo se  $V_A > V_B$ ), ou a diminuição do potencial ao passar de A para B.

**Figura 7.1.:** Circuitos equivalentes entre dois pontos A e B.

Dois circuitos podem ser equivalentes entre dois pontos A e B, mas não serem equivalentes entre outro par de pontos. Um primeiro exemplo simples de circuitos equivalentes é um conjunto de elementos ligados em **série**: cada terminal de um dos elementos está ligado ao terminal de um outro elemento, formando uma cadeia entre dois pontos A e B, como se mostra na Figura 7.2. Um circuito equivalente é qualquer permuta na ordem dos elementos. A corrente que circula por cada elemento é necessariamente a mesma, independentemente da ordem em que se encontrarem os elementos; a diferença de potencial  $V_{AB}$  também é independente da ordem dos elementos.

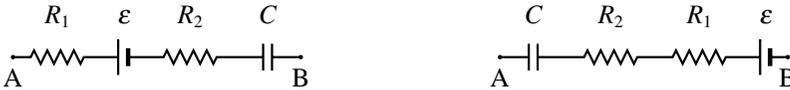


Figura 7.2.: Circuitos em série equivalentes.

Um segundo exemplo são os circuitos equivalentes a uma fonte de f.e.m. Já vimos no fim do capítulo anterior que a característica tensão-corrente de uma fonte é uma reta com declive negativo:

$$V_{AB} = \varepsilon - rI. \quad (7.2)$$

O mesmo resultado é obtido com qualquer dos circuitos da Figura 7.3, onde  $I_0 = \varepsilon/r$ . No **equivalente de Thévenin** (Figura 7.3a) a diferença de potencial entre os pontos A e B é igual à diferença entre  $\varepsilon$  e a queda de potencial na resistência interna,  $rI$ . No **equivalente de Norton** (Figura 7.3b) a corrente que passa pela resistência interna será unicamente  $I - I_0$  e, portanto, a diferença de potencial entre A e B é a mesma e igual a

$$V_{AB} = -r(I - I_0) = \varepsilon - rI. \quad (7.3)$$

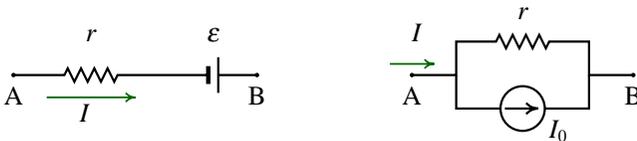


Figura 7.3.: Equivalentes de Thévenin (esquerda) e de Norton (direita).

Os equivalentes de Thévenin e de Norton representam diferentes mecanismos de produção de força eletromotriz. O equivalente de Thévenin corresponde a uma **fonte de tensão**; quando o circuito entre A e B está aberto, não circula corrente dentro da fonte; este tipo de comportamento é característico das pilhas químicas. O equivalente de Norton representa uma **fonte de corrente**; quando o circuito externo está aberto, circula uma certa corrente dentro da fonte; este tipo de comportamento é mais parecido com o que acontece num **gerador de van der Graff**, no qual a

corrente é produzida pelo movimento mecânico de cargas sobre uma fita que roda entrando dentro de uma esfera condutora que retira o excesso de carga na fita. No entanto, seja qual for a fonte, do ponto de vista do circuito externo, pode ser substituída pelo equivalente de Thévenin ou de Norton, e o resultado será o mesmo nos dois casos.

Qualquer combinação de resistências e fontes lineares (característica tensão-corrente linear) entre dois pontos A e B, conduz a uma relação linear entre  $V_{AB}$  e  $I$ , que pode ser representada por um equivalente de Thévenin ou de Norton.

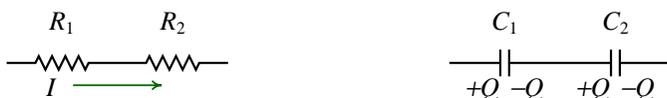
## 7.2. Associação de resistências e condensadores

Quando duas resistências,  $R_1$  e  $R_2$ , estão ligadas em série (Figura 7.4), a corrente que passa pelas duas resistências é a mesma  $I_1 = I_2 = I$ . A diferença de potencial  $V_{AB}$  entre os terminais do circuito em série é igual à soma das diferenças de potencial nas duas resistências, e usando a lei de Ohm obtemos

$$V_{BA} = V_{CA} + V_{BC} = IR_1 + IR_2. \quad (7.4)$$

Esta seria a mesma relação entre  $V_{AB}$  e  $I$  que se obteria se tivéssemos uma resistência  $R_1 + R_2$  entre A e B. O resultado pode ser generalizado facilmente para  $n$  resistências, e a resistência equivalente a um sistema de  $n$  resistências em série é

$$R_s = \sum_{i=1}^n R_i. \quad (7.5)$$



**Figura 7.4.:** Resistências e condensadores em série.

No caso de  $n$  condensadores em série (Figura 7.4), a carga armazenada em cada um é a mesma carga  $Q$ , enquanto que a diferença de potencial em cada condensador é  $Q/C_i$ . A diferença de potencial total é

$$V_{BA} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \cdots + \frac{Q}{C_n} = Q \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}; \quad (7.6)$$

Um circuito equivalente mais simples consiste em apenas um condensador com capacidade  $C_s$  definida pela equação

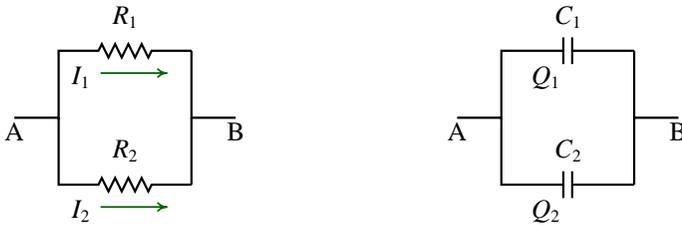
$$\frac{1}{C_s} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}. \quad (7.7)$$

Num sistema de resistências em paralelo (Figura 7.5), todas as resistências estão ligadas entre os mesmos pontos A e B, de maneira que a diferença de potencial em todas as resistências é  $V_{AB}$ ; a corrente  $I$  que entra no circuito é repartida entre as  $n$  resistências:

$$I = \sum_{i=1}^n I_i = V_{BA} \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}. \quad (7.8)$$

A resistência equivalente  $R_p$ , define-se pela equação:

$$\frac{1}{R_p} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}. \quad (7.9)$$



**Figura 7.5.:** Resistências e condensadores em paralelo.

A diferença de potencial nos condensadores ligados em paralelo (Figura 7.5), também é igual em todos eles. A carga total armazenada é igual à soma das cargas em cada um dos condensadores:

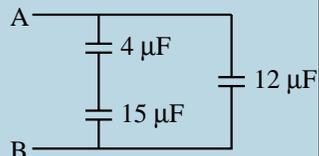
$$Q = \sum_{i=1}^n Q_i = V_{BA} \sum_{i=1}^n C_i, \quad (7.10)$$

a qual conduz à capacidade equivalente:

$$C_p = \sum_{i=1}^n C_i. \quad (7.11)$$

### Exemplo 7.1

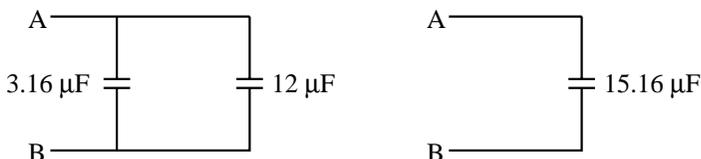
No circuito representado na figura calcule:  
 (a) A capacidade equivalente entre A e B.  
 (b) A carga armazenada em cada condensador e (c) a energia total no circuito, quando a diferença de potencial  $V_{BA}$  é de 200 V. .



Os condensadores de  $4 \mu\text{F}$  e  $15 \mu\text{F}$  encontram-se em série e, portanto, podem ser substituídos por um só condensador de capacidade

$$C_{\text{eq}} = \frac{4 \cdot 15}{4 + 15} \mu\text{F} = 3.16 \mu\text{F} ;$$

este condensador está ligado em paralelo com o condensador de  $12 \mu\text{F}$ , de maneira que a capacidade total é  $15,16 \mu\text{F}$ .



Como tanto no condensador de  $12 \mu\text{F}$  como no de  $3,16 \mu\text{F}$  a diferença de potencial é igual a  $V_{\text{BA}}$ , as cargas armazenadas nestes condensadores são

$$Q_{12} = (200 \text{ V})(12 \mu\text{F}) = 2.4 \text{ mC} ,$$

$$Q_{3.16} = (200 \text{ V})(3.16 \mu\text{F}) = 632 \mu\text{C} .$$

As cargas nos condensadores de  $4 \mu\text{F}$  e  $15 \mu\text{F}$  devem ser iguais por estes estarem ligados em série:

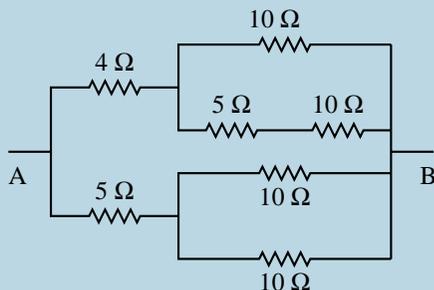
$$Q_4 = Q_{15} = 632 \mu\text{C} .$$

A energia total pode ser calculada somando as energias armazenadas em cada um dos condensadores; a resposta deve ser a mesma em qualquer dos circuitos equivalentes. Usando o circuito mais simples, com um só condensador de  $15,16 \mu\text{F}$ , obtemos

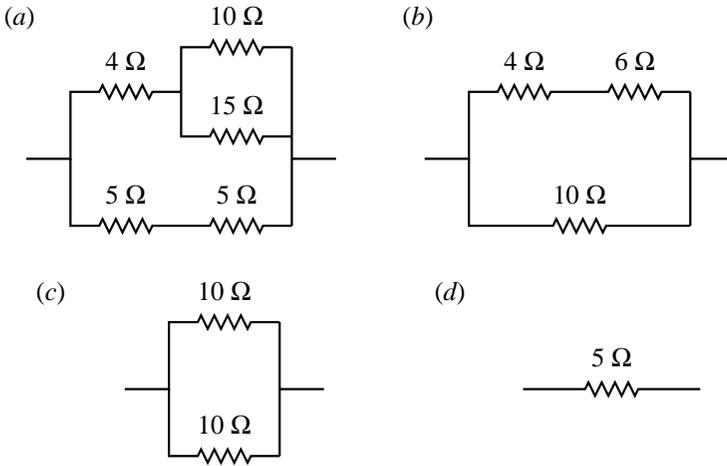
$$U_t = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} (15,16 \mu\text{F})(200 \text{ V})^2 = 0.303 \text{ J} .$$

### Exemplo 7.2

No circuito da figura, determine o valor da resistência equivalente entre os pontos A e B, e a corrente em cada resistência quando a diferença de potencial  $V_{\text{AB}}$  é igual a  $12 \text{ V}$ .



Se substituirmos as resistências ligadas em série e em paralelo, o circuito entre A e B pode ser simplificado da seguinte forma:



Conhecida a resistência equivalente  $R_{\text{eq}} = 5 \Omega$ , a corrente entre os pontos A e B pode ser facilmente calculada:

$$I = \frac{12 \text{ V}}{5 \Omega} = 2.4 \text{ A} .$$

No circuito da figura (c), a corrente de 2.4 A distribuir-se-á uniformemente pelas duas resistências de  $10 \Omega$ , e a corrente em cada uma delas será 1.2 A. No circuito da figura (b), a corrente em cada uma das 3 resistências será a mesma e igual a 1.2 A. No circuito (a) esta corrente repartir-se-á pelas resistências em paralelo ( $10 \Omega$  e  $5 \Omega$ ) sendo inversamente proporcional ao valor das resistências (ver Problema 1):

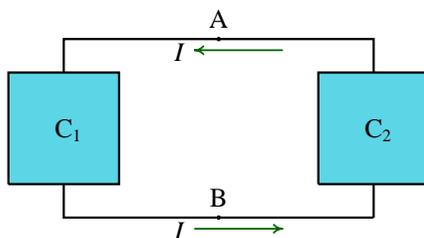
$$I_{10} = \frac{15}{10 + 15} 1.2 \text{ A} = 0.72 \text{ A} ,$$

$$I_{15} = \frac{10}{10 + 15} 1.2 \text{ A} = 0.48 \text{ A} .$$

Assim, do ponto A saem duas correntes de 1.2 A das resistências de  $4 \Omega$  e  $5 \Omega$ . Em B entram quatro correntes: uma corrente de 0.72 A na resistência de  $10 \Omega$  na parte superior, uma corrente de 0.48 A que percorre as resistências de  $10 \Omega$  e  $5 \Omega$  em série, e duas correntes de 0.6 A que passam por cada uma das resistências de  $10 \Omega$  em paralelo. A corrente total que entra por B e sai por A é 2.4 A.

### 7.3. Energia nos circuitos

Em qualquer circuito existem alguns elementos que fornecem energia elétrica aos portadores de carga, o que faz com que existam correntes. A energia fornecida é dissipada ou armazenada nos restantes elementos do circuito.



**Figura 7.6.:** Um circuito dividido em dois sub-circuitos  $C_1$  e  $C_2$ . Um deles fornece energia que é absorvida ou armazenada no outro.

Imaginemos dois pontos A e B num circuito; entre estes dois pontos temos dois sub-circuitos  $C_1$  e  $C_2$  em série (Figura 7.6). Admitamos que o ponto a maior potencial é o ponto A, de maneira que a diferença de potencial  $V_{BA}$  é positiva e a energia dos portadores de carga positiva aumenta de B para A e diminui de A para B. Se a corrente  $I$  no ponto A estiver dirigida do circuito  $C_2$  para o circuito  $C_1$ , como na Figura 7.6, os portadores de carga perdem energia no circuito  $C_1$  e ganham a mesma energia em  $C_2$ : o circuito  $C_1$  absorve energia enquanto o circuito  $C_2$  fornece energia.

Numa resistência, a corrente é sempre dirigida do terminal a maior potencial para o terminal a menor potencial, de maneira que uma resistência absorve sempre energia, a qual é dissipada em calor por efeito Joule. Num condensador, embora não exista transferência de carga entre as armaduras, pode ainda existir uma corrente elétrica entrando por um dos terminais e saindo pelo outro; esta corrente aumenta ou diminui a carga armazenada dependendo do sentido da corrente. Se a corrente entra pelo terminal a maior potencial, a carga no condensador aumenta, e este absorve energia do circuito, a qual é armazenada no condensador. No caso contrário, o condensador fornece energia diminuindo a sua energia armazenada e a sua carga.

Uma fonte de f.e.m. pode também fornecer ou absorver energia elétrica. No fim do Capítulo 6 vimos a característica tensão-corrente de uma fonte com f.e.m.  $\varepsilon$  e resistência interna  $r$  (Figura 6.11); quando o potencial do terminal positivo é maior que o potencial do terminal negativo ( $\Delta V > 0$ ), e  $\Delta V < \varepsilon$ , a fonte fornece energia. No chamado modo inverso,  $\Delta V > \varepsilon$ , a corrente entra na fonte pelo terminal positivo e sai pelo terminal negativo (corrente negativa). Como  $\Delta V > 0$ , a fonte absorve energia, energia essa que pode ser dissipada por efeito Joule ou absorvida em reações químicas, como no caso de uma pilha química. Se as reações na pilha forem reversíveis, este processo poderá ser usado para recarregar a pilha: entre os terminais liga-se uma bateria que produza uma diferença de potencial maior que  $\varepsilon$ .

Finalmente, na região  $I > \varepsilon/r$  a corrente é positiva mas a diferença de potencial  $\Delta V$  é negativa; a fonte absorve energia. No entanto, a corrente é ainda na direção da f.e.m., o que implica que a f.e.m. fornece energia! Toda a energia fornecida pela f.e.m., mais a energia fornecida pelo circuito externo, é dissipada por efeito Joule

na resistência interna.

## 7.4. Regras de Kirchhoff

As regras de Kirchhoff são duas regras que se verificam em qualquer circuito elétrico. Num circuito existem pontos chamados **nós** onde a corrente pode seguir vários caminhos diferentes, e circuitos fechados chamados **malhas**.

Consideremos uma malha e quatro pontos A, B, C e D (Figura 7.7). O aumento de potencial de A para C é igual a  $V_{AB} + V_{BC}$ ; a soma  $V_{AB} + V_{BC} + V_{CD}$  é igual ao aumento de potencial do ponto A até o ponto D ( $V_{AD}$ ). De igual forma:

$$V_{AB} + V_{BC} + V_{CD} + V_{DA} = 0, \quad (7.12)$$

Este resultado é a **regra das malhas**: a soma algébrica dos aumentos e diminuições de potencial ao longo de qualquer malha fechada num circuito, deve ser igual a zero. O sinal da diferença de potencial  $V_{AB}$  será positivo ou negativo, conforme o potencial aumente ou diminua ao passar de A para B.

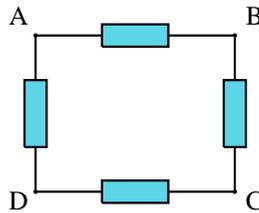


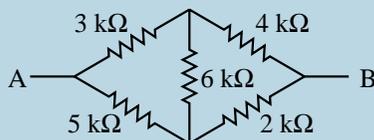
Figura 7.7.: Malha com quatro elementos.

A outra regra de Kirchhoff é a **regra dos nós**: em qualquer nó, a diferença entre a soma das correntes que entram no ponto e a soma das correntes que saem é igual a zero. Esta segunda regra, apenas válida para correntes estacionárias, é uma consequência direta da conservação da carga: para que não haja acumulação de carga, a corrente que entra no nó por unidade de tempo deverá ser igual à que sai do nó por unidade de tempo.

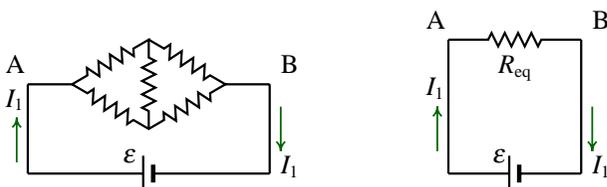
As duas regras de Kirchhoff permitem resolver qualquer circuito com condensadores, resistências e fontes; **resolver** significa encontrar qualquer corrente ou carga armazenada em qualquer dos elementos do circuito. Um método usado para resolver circuitos, que ilustraremos com os dois exemplos seguintes, é o chamado método das malhas. O método consiste em dividir o circuito em malhas contíguas e admitir que em cada malha circula uma corrente independente das outras; a corrente que realmente circula por cada elemento é obtida posteriormente somando as correntes das malhas às quais pertence o elemento.

**Exemplo 7.3**

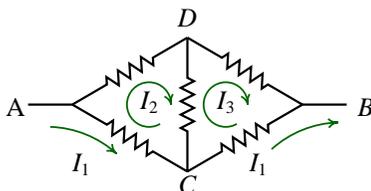
Determine a resistência equivalente entre os pontos A e B no circuito da figura.



Nenhum par de resistências entre A e B se encontra em série ou em paralelo e, portanto, não podemos usar o método do exemplo anterior. Por definição, o circuito equivalente deve produzir a mesma corrente em A e B, quando ligado à mesma diferença de potencial e  $R_{\text{eq}} = \varepsilon/I_1$ :



Temos, pois, que encontrar o valor de  $I_1$  correspondente à f.e.m.  $\varepsilon$ . Uma forma fácil de garantir que a regra dos nós se cumpra em todos os nós do circuito consiste em admitir que dentro de cada malha circula uma corrente independente das correntes nas outras malhas:  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$  na figura seguinte:



Nas resistências que se encontram entre duas malhas vizinhas, a corrente será a soma algébrica das correntes nas duas malhas. Por exemplo, no diagrama anterior a corrente através da resistência entre A e C será  $I_1 - I_2$ , no sentido de A para C (ou  $I_2 - I_1$  no sentido oposto).

Com este método a regra dos nós é garantida em cada nó e basta aplicar a regra das malhas a cada uma das três malhas para calcular as três correntes. No circuito temos as seguintes diferenças de potencial:

$$\begin{aligned} V_{AC} &= -5000(I_1 - I_2), & V_{CB} &= -2000(I_1 - I_3), & V_{AB} &= \varepsilon, \\ V_{AD} &= -3000I_2, & V_{DC} &= -6000(I_2 - I_3), & V_{BD} &= 4000I_3, \end{aligned}$$

e as três equações das malhas serão

$$\begin{aligned}V_{AC} + V_{CB} + V_{BA} &= 0, \\V_{AD} + V_{DC} + V_{CA} &= 0, \\V_{BD} + V_{DC} + V_{CB} &= 0.\end{aligned}$$

Substituindo os valores obtidos no sistema de equações acima, obtemos, na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 7 & -5 & -2 \\ 5 & 14 & -6 \\ 2 & -6 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon/1000 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Obtivemos as equações seguindo todos os passos para maior clareza, mas é possível escrever o sistema matricial imediatamente por observação do circuito: os termos na diagonal são a soma das resistências nas respectivas malhas, os termos não diagonais são negativos e correspondem às resistências entre malhas vizinhas; os termos do lado direito das equações são as f.e.m. totais em cada malha, no sentido da corrente da malha. Neste caso só estamos interessados na solução para  $I_1$ , que pode ser obtida usando a regra de Cramer:

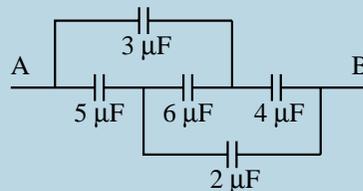
$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} \varepsilon/1000 & -5 & -2 \\ 0 & 14 & -6 \\ 0 & -6 & 12 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & -5 & -2 \\ -5 & 14 & -6 \\ 2 & -6 & 12 \end{vmatrix}} = \frac{132}{448} \left( \frac{\varepsilon}{1000} \right).$$

Finalmente, a resistência equivalente é

$$R_{eq} = \frac{\varepsilon}{I_1} = 3,39 \text{ k}\Omega.$$

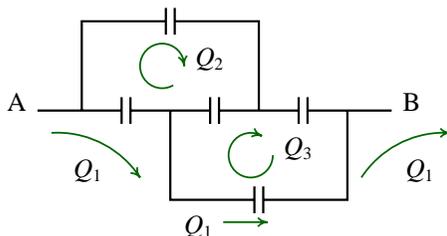
#### Exemplo 7.4

Determine a capacidade equivalente entre os pontos A e B no circuito da figura.



Mais uma vez, nenhum dos elementos do circuito está ligado em série ou em paralelo. Admitamos que existe uma diferença de potencial  $V_{AB}$  (provavelmente produzida por uma f.e.m.). Ao introduzir a diferença de potencial  $V_{AB}$ , aparecem correntes nos circuitos que desaparecerão quando as cargas nos capacitores alcançarem valores estacionários. Em qualquer instante as cargas nos capacitores são iguais ao integral das respectivas correntes; assim, a regra dos nós conduz às mesmas condições para as cargas ou para as correntes. Para garantir a regra dos

nós podemos proceder como no exemplo anterior, admitindo que em cada malha circula uma carga total  $Q_i$ , independente das outras malhas:



A diferença de potencial em cada condensador é  $Q/C$  e, por isso, a matriz obtida a partir das regras das malhas terá termos diagonais iguais à soma dos inversos das capacidades em cada malha e, como as correntes foram escolhidas com o mesmo sentido (horário), os termos não-diagonais na matriz são negativos e iguais a  $1/C$ , em que  $C$  é a capacidade entre as duas malhas em questão:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{5} + \frac{1}{2} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{BA} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Na equação anterior as capacidades estão em  $\mu\text{F}$ , as cargas em  $\mu\text{C}$ , e  $V_{BA}$  em volts. Para trabalhar com números inteiros, convém multiplicar a primeira equação por 10, a segunda por 30 e a terceira por 12:

$$\begin{bmatrix} 7 & -2 & -5 \\ 6 & 21 & -5 \\ 6 & -2 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 V_{BA} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

e a solução para  $Q_1$  é

$$Q_1 = \frac{2210}{665} V_{BA}.$$

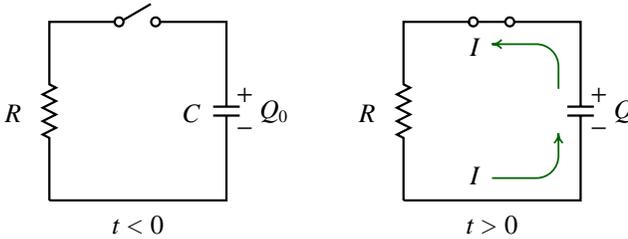
A capacidade do condensador equivalente é

$$C_{\text{eq}} = \frac{|Q_1|}{|V_{BA}|} = \frac{2210}{665} \mu\text{F} \approx 3.323 \mu\text{F}.$$

## 7.5. Circuito RC

O circuito da Figura 7.8 com um condensador e uma resistência é chamado circuito RC. Consideremos o caso em que o condensador tem uma carga inicial  $Q_0$  e, num

instante que arbitraremos como  $t = 0$ , o interruptor é fechado permitindo que as cargas negativas e positivas nas armaduras do condensador se recombinem. Na prática, as armaduras do condensador apresentam uma pequena resistência que no circuito da Figura 7.8 está incluída na resistência total  $R$ . A partir do instante  $t = 0$  aparece uma corrente  $I$  através da resistência.



**Figura 7.8.:** Circuito  $RC$ .

Para  $t > 0$ , a carga  $Q$  no condensador e a corrente  $I$  no circuito são funções de  $t$ . A regra da malha implica que em qualquer instante  $t$ :

$$IR - \frac{Q}{C} = 0; \quad (7.13)$$

no instante inicial a carga é igual a  $Q_0$  e, portanto, a corrente inicial será  $Q_0/RC$ . Em qualquer instante posterior,  $Q$  é igual à carga inicial  $Q_0$  menos a carga que saiu, que por sua vez é igual ao integral da corrente desde o instante em que o condensador começa a descarregar ( $t = 0$ ):

$$IR - \frac{1}{C} \left[ Q_0 - \int_0^t I dt \right] = 0. \quad (7.14)$$

Derivando os dois termos em função do tempo e dividindo por  $R$ , obtemos

$$\boxed{\frac{dI}{dt} = -\frac{1}{RC} I}, \quad (7.15)$$

isto é, a equação diferencial que determina a corrente em função do tempo. Para a resolver, agrupamos num lado da equação os termos que dependem de  $I$  e no outro lado os termos que dependem de  $t$ :

$$\frac{dI}{I} = -\frac{1}{RC} dt; \quad (7.16)$$

primitivando obtemos

$$\ln I = -\frac{t}{RC} + A, \quad (7.17)$$

onde  $A$  pode ser qualquer constante. Contudo, para que a equação anterior seja válida também para  $t = 0$ , quando  $I$  é igual a  $Q_0/RC$ , será necessário que  $A$  seja igual a  $\ln(Q_0/RC)$ :

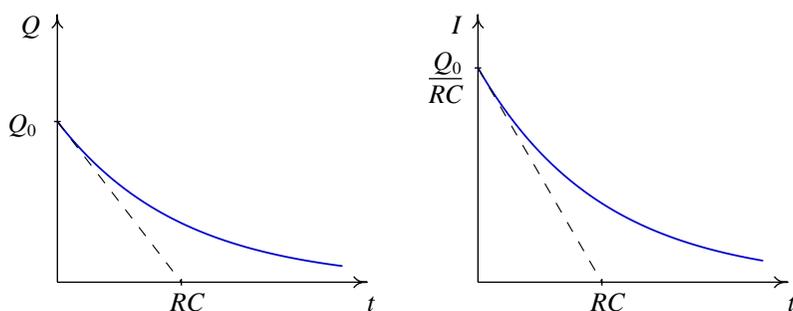
$$\frac{t}{RC} = \ln\left(\frac{Q_0}{RC I}\right). \quad (7.18)$$

Escrevendo  $I$  em função do tempo obtemos

$$I = \frac{Q_0}{RC} e^{-t/RC}; \quad (7.19)$$

e a carga no condensador, igual a  $RCI$ , será

$$Q = Q_0 e^{-t/RC}. \quad (7.20)$$



**Figura 7.9.:** Carga e corrente em função do tempo, no circuito RC.

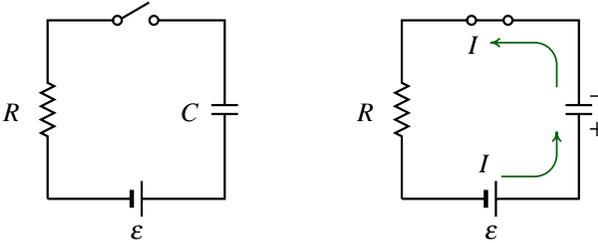
A **constante de tempo**  $t_c = RC$  tem unidades de tempo (ver tabela C.2 no Apêndice C). No instante  $t = t_c$ , a carga diminui desde o seu valor inicial  $Q_0$  até  $0.37Q_0$ . Como podemos ver na Figura 7.9, a constante de tempo é também o intervalo de tempo que demoraria o condensador a descarregar-se, se a corrente se mantivesse constante no seu valor inicial  $I_0$ . Como a corrente não se mantém constante mas diminui, o condensador, teoricamente, demora um tempo infinito a descarregar-se. Na prática, a carga atinge o valor mínimo possível num tempo finito.

A equação diferencial (7.15) é importante porque aparece sempre que existam funções cuja derivada seja diretamente proporcional à própria função; se a constante de proporcionalidade for negativa, o resultado será um **decaimento exponencial**. Se a constante de proporcionalidade for positiva, a função aumentará exponencialmente.

## 7.6. Circuito RC com fonte

Quando um condensador é ligado a uma fonte, a sua carga aumenta até ao valor  $\varepsilon C$ ; no entanto, o aumento da carga no condensador não é instantâneo, mas depende

dos valores de  $C$  e da resistência da fonte, como veremos. A Figura 7.10 mostra o diagrama de um circuito  $RC$  com fonte, onde a resistência  $R$  corresponde à soma de todas as resistências presentes no circuito: resistência interna da fonte, resistência dos fios usados para ligar a fonte e resistência das armaduras do condensador (usualmente quase nula).



**Figura 7.10.:** Circuito  $RC$  com fonte.

Considerando que em  $t = 0$  fechamos o interruptor, para  $t > 0$  existe uma corrente  $I$  e uma carga  $Q$  no condensador. Aplicando a regra das malhas, vemos que em qualquer instante:

$$IR + \frac{Q}{C} = \varepsilon ; \quad (7.21)$$

em particular, para  $t = 0$  a carga é nula e, portanto, a corrente inicial será igual a  $\varepsilon/R$ . Em instantes posteriores a carga acumulada já não será nula, mas igual ao integral da corrente, desde  $t = 0$ :

$$IR + \frac{1}{C} \int_0^t I dt = \varepsilon . \quad (7.22)$$

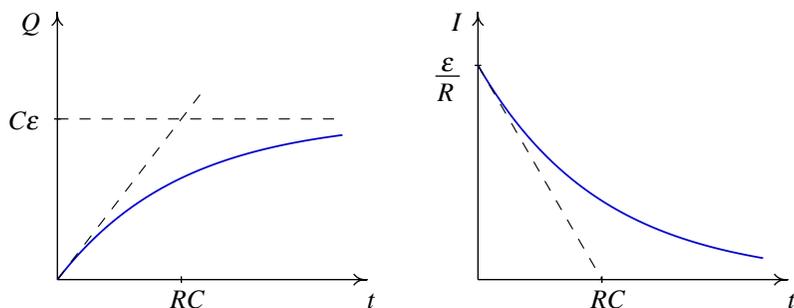
Derivando esta equação em função do tempo, obtemos exactamente a mesma equação diferencial (7.15) cuja solução já sabemos que é um decaimento exponencial, desde o valor inicial de  $I$ , com a constante de tempo igual a  $RC$ :

$$I = \frac{\varepsilon}{R} e^{-t/RC} . \quad (7.23)$$

A carga obtém-se a partir da equação da malha (7.21):

$$Q = \varepsilon C(1 - e^{-t/RC}) . \quad (7.24)$$

Representando graficamente (Figura 7.11) podemos verificar que a carga aumenta exponencialmente até ao valor assintótico  $\varepsilon C$ , enquanto a corrente diminui exponencialmente a partir do valor inicial  $\varepsilon/R$ . O aumento de  $Q$  (e a diminuição de  $I$ ) depende da constante de tempo  $RC$ . Quanto maior for  $RC$ , mais lentamente será



**Figura 7.11.:** Carga e corrente no circuito RC com fonte.

carregado o condensador. No instante  $t = 0$ , a corrente  $I$  pode ser calculada como se o condensador fosse um bom condutor com resistência  $R = 0$ , e em  $t \gg RC$  o condensador comporta-se como um interruptor aberto ( $R \rightarrow \infty$ ).

Em  $t \gg RC$  a carga total armazenada no condensador é  $C\varepsilon$ . Portanto, a energia armazenada é igual a

$$U_C = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} C\varepsilon^2; \quad (7.25)$$

toda a carga que entra no condensador é fornecida pela f.e.m. O trabalho realizado pela f.e.m. para fornecer a carga  $C\varepsilon$  é

$$W_{\text{fem}} = Q\varepsilon = C\varepsilon^2, \quad (7.26)$$

o qual é o dobro de  $U_C$ . A parte da energia fornecida pela fonte que não fica armazenada no condensador é dissipada, por efeito Joule, na resistência.

Para demonstrar que metade da energia fornecida pela fonte é dissipada na resistência, consideremos a potência  $P_R$  e a energia total  $E_R$  dissipadas pela resistência:

$$\frac{dE_R}{dt} = P_R = I^2 R = \frac{\varepsilon^2}{R} e^{-2t/RC}, \quad (7.27)$$

$$E_R = \int_0^{\infty} P_R dt = \frac{\varepsilon^2}{R} \int_0^{\infty} e^{-2t/RC} dt = \frac{1}{2} C\varepsilon^2, \quad (7.28)$$

O balanço de trabalho e energia é

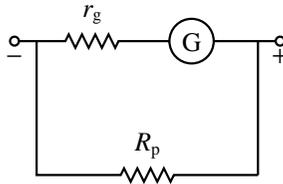
$$W_{\text{fem}} = U_C + E_R, \quad (7.29)$$

como queremos demonstrar.

No Capítulo 11 veremos um método que permite calcular as correntes e as cargas em circuitos mais complicados com condensadores e resistências e estudaremos também a resposta destes circuitos a tensões alternadas.

## 7.7. Amperímetros, voltímetros e ohmímetros

O galvanómetro é um aparelho que permite medir a corrente  $I$  num circuito. No entanto, como o valor máximo de corrente permitida num galvanómetro é muito baixo, utiliza-se um amperímetro (Figura 7.12), que não é mais do que um galvanómetro (G) ao qual foi ligada uma resistência em paralelo ( $R_p$ ) para que se possa medir correntes mais elevadas.



**Figura 7.12.:** Amperímetro.

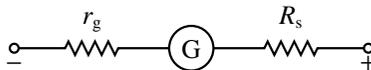
Quando pelo galvanómetro circula a corrente máxima  $I_{\text{máx}}$ , a corrente total,  $I_A$ , que entra no amperímetro é

$$I_A = \frac{R_p + r_g}{R_p} I_{\text{máx}} \quad (7.30)$$

onde  $r_g$  é a resistência interna do galvanómetro, que normalmente é pequena. Utilizando diferentes valores de  $R_p$  é possível obter a corrente máxima desejada para o amperímetro.

Para medir a corrente num circuito com um amperímetro, é necessário abrir o circuito no ponto onde se pretende medir a corrente, e ligar o amperímetro em série. A resistência interna do amperímetro não poderá ser muito elevada, para não alterar a corrente a medir.

Para determinar a diferença de potencial entre dois pontos num circuito usa-se um voltímetro. Um voltímetro consiste num galvanómetro ligado em série a uma resistência  $R_s$  (Figura 7.13).



**Figura 7.13.:** Voltímetro.

A diferença de potencial nos terminais do voltímetro é diretamente proporcional à corrente no galvanómetro:

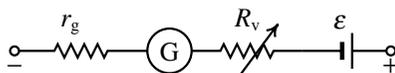
$$V_{AB} = I(r_g + R_s); \quad (7.31)$$

a leitura do galvanómetro permite determinar a diferença de potencial  $V_{AB}$ . A diferença de potencial máxima que pode ser medida, sem queimar o galvanómetro, é

$$V_{\text{máx}} = I_{\text{máx}}(r_g + R_s) . \quad (7.32)$$

Um bom voltímetro deve ter uma resistência interna elevada para que, quando for ligado entre dois pontos de um circuito, não absorva muita corrente e, assim, não altere significativamente a diferença de potencial a ser medida.

Para medir resistências usa-se um ohmímetro, que consiste numa fonte com f.e.m.  $\varepsilon$  ligada em série a uma resistência variável  $R_v$  e a um galvanómetro (Figura 7.14).



**Figura 7.14.:** Ohmímetro.

Ao ligar a resistência a medir,  $R$ , aparece uma corrente inversamente proporcional à resistência:

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r_g + R_v} . \quad (7.33)$$

A resistência variável ajusta-se de forma a se obter a corrente máxima no galvanómetro quando a resistência externa é nula (os dois terminais do ohmímetro ligados entre si).

## Problemas

1. (a) Duas resistências  $R_1$  e  $R_2$  encontram-se ligadas em paralelo. Sendo  $I$  a corrente total que circula pelas resistências, mostre que as correntes através de cada resistência são

$$I_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} I, \quad I_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I$$

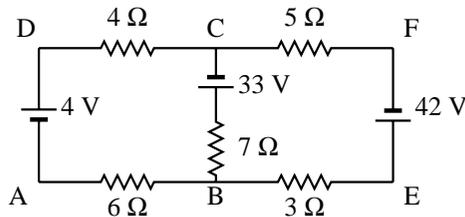
(b) Mostre que, para condensadores em série, se obtém um resultado similar para as diferenças de potencial nos dois condensadores, em função das capacidades  $C_1$  e  $C_2$ .

2. (a) Mostre que as diferenças de potencial em duas resistências  $R_1$  e  $R_2$  em série são

$$V_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V, \quad V_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V$$

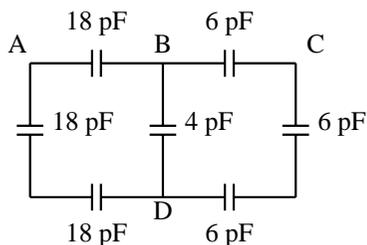
(b) Mostre que, para dois condensadores em paralelo, se obtém um resultado similar, para as cargas em função das capacidades  $C_1$  e  $C_2$ .

3. Considere duas resistências  $R_1$  e  $R_2$  ligadas em paralelo. Uma corrente total  $I$  distribui-se entre as duas resistências. Admita que as correntes  $I_1$  e  $I_2$  podem tomar qualquer valor (inclusive negativo) desde que  $I = I_1 + I_2$ . Determine os valores de  $I_1$  e  $I_2$  que minimizam a potência dissipada por efeito Joule nas resistências, e mostre que os seus valores são exactamente os valores reais das correntes, calculados no Problema 1.
4. Para uma dada bateria, com f.e.m.  $\varepsilon$  e resistência interna  $r$ , qual é o valor da resistência externa  $R$  que deve ser ligada aos terminais para que a potência dissipada em calor na resistência  $R$  seja máxima? Esboce o gráfico da potência dissipada em função de  $R$ .
5. Considere o circuito representado.
- (a) Calcule as correntes em todas as resistências do circuito.
- (b) Calcule as diferenças de potencial  $V_{AB}$ ,  $V_{BC}$  e  $V_{CD}$ .
- (c) Indique as fontes de f.e.m. que absorvem ou fornecem energia.

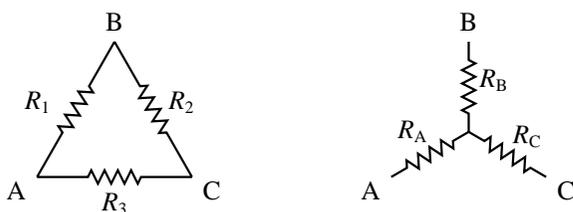


6. A diferença de potencial entre os terminais de uma bateria com f.e.m. de  $12\ \text{V}$  é  $11,4\ \text{V}$ , quando fornece uma corrente de  $20\ \text{A}$  ao motor de arranque de um carro.

- (a) Qual é a resistência interna da bateria?
- (b) Qual a potência total fornecida quando o motor de arranque está em funcionamento? Que fração dessa potência é fornecida ao motor de arranque?
- (c) Em quanto diminuirá a energia química da bateria se o motor de arranque permanecer ligado durante 3 minutos?
7. No circuito seguinte calcule a capacidade equivalente:
- (a) Entre os pontos B e D.
- (b) Entre os pontos A e B.
- (c) Entre os pontos A e C.

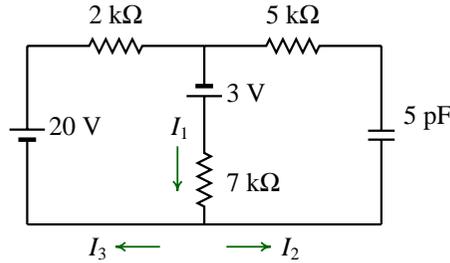


8. Três resistências  $R_1$ ,  $R_2$  e  $R_3$  estão ligadas formando o chamado circuito **delta**, como se mostra na figura da esquerda. Demonstre que o circuito delta é equivalente a um circuito **estrela**, com três resistências  $R_A$ ,  $R_B$  e  $R_C$  como se mostra no lado direito da figura. Use a transformação delta-estrela para calcular a resistência equivalente no Exemplo 7.3, sem usar as regras de Kirchhoff.

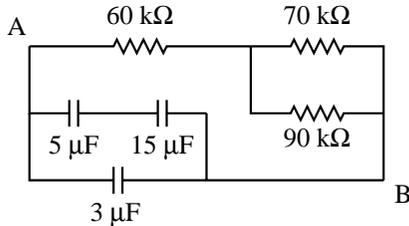


- (Sugestão: (i) No circuito delta, calcule as resistências equivalentes entre os pontos A e B ( $R_{AB}$ ), entre os pontos A e C ( $R_{AC}$ ) e entre os pontos B e C ( $R_{BC}$ ). (ii) Calcule  $R_{AB}$ ,  $R_{AC}$  e  $R_{BC}$ , em função de  $R_A$ ,  $R_B$  e  $R_C$  no circuito estrela. (iii) Igualando os resultados anteriores encontre a solução para  $R_A$ ,  $R_B$  e  $R_C$ .)
9. A diferença de potencial entre os terminais de uma bateria é 4.5 V quando a bateria é percorrida por uma corrente de 3 A, no sentido do terminal negativo para o positivo. Quando a corrente é de 2 A, no sentido oposto, a diferença de potencial aumenta até 12 V.
- (a) Calcule a resistência interna da bateria.
- (b) Qual é a f.e.m. da bateria?

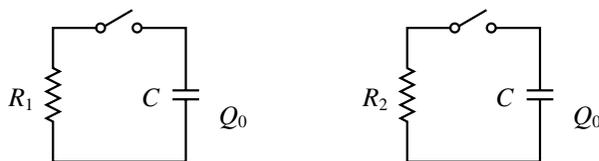
10. No circuito da figura, a corrente  $I_1$  é igual a 2.5 mA num determinado instante.
- (a) Calcule as correntes  $I_2$  e  $I_3$  nesse instante.
- (b) Calcule a carga armazenada no condensador no mesmo instante.



11. Considere o circuito representado.
- (a) Qual é a constante de tempo  $t_c$ ?
- (b) No instante inicial a carga no condensador de  $5\ \mu\text{F}$  é  $15\ \text{nC}$ . Qual é a carga nos condensadores de  $15\ \mu\text{F}$  e  $3\ \mu\text{F}$  no mesmo instante?
- (c) Qual será a carga total armazenada entre os pontos A e B após 0,5 segundo? Nesse mesmo instante calcule a energia total armazenada no circuito e as correntes nas três resistências.



12. A corrente que produz a leitura máxima num galvanómetro é 1 mA, e a resistência interna do galvanómetro é  $10\ \Omega$ .
- (a) O galvanómetro vai ser usado para construir um voltímetro com escala entre 0 e 10 volts. Indique como deverá ser construído o voltímetro.
- (b) Pretende usar-se o mesmo galvanómetro para construir um amperímetro com escala entre 0 e 10 mA. Explique como deverá fazê-lo.
13. Um condensador de  $0,5\ \mu\text{F}$  descarrega-se através de uma resistência  $R$ . Qual é o valor que  $R$  deve ter para que 0,1 segundo depois de se iniciar a descarga, a potência dissipada na resistência tenha o valor máximo possível?
14. Considere a descarga de dois condensadores idênticos, com carga inicial idêntica,  $Q_0$ , através de duas resistências diferentes,  $R_1 > R_2$ . Para a resistência  $R_1$  as grandezas seguintes são maiores, mais pequenas, ou as mesmas que para a resistência  $R_2$ ?



- (a) Tempo necessário para que a carga inicial diminua metade.
- (b) Potencial nos terminais do condensador num dado instante.
- (c) Corrente na resistência num dado instante.
- (d) Energia total dissipada em calor na resistência.
- (e) Potência dissipada na resistência num determinado instante.

## Respostas

4.  $r$ .
5. (a)  $I_{DC} = I_{BA} = 3 \text{ A}$ ,  $I_{CF} = I_{EB} = 2 \text{ A}$ ,  $I_{CB} = 1 \text{ A}$ .  
(b)  $18 \text{ V}$ ,  $-26 \text{ V}$  e  $12 \text{ V}$ . (c) todas fornecem potência.
6. (a)  $0,03 \Omega$ . (c)  $43,2 \text{ kJ}$ .  
(b)  $240 \text{ W}$ ,  $95\%$ .
7. (a)  $12 \text{ pF}$ . (c)  $6,75 \text{ pF}$ .  
(b)  $21,6 \text{ pF}$ .
8. (a)  $R_{AB} = R_1(R_2 + R_3)/R_t$ ,  $R_{AC} = R_3(R_1 + R_2)/R_t$ ,  $R_{BC} = R_2(R_1 + R_3)/R_t$ ,  
onde  $R_t \equiv R_1 + R_2 + R_3$ .  
(b)  $R_A = R_1 R_3 / R_t$ ,  $R_B = R_1 R_2 / R_t$ ,  $R_C = R_2 R_3 / R_t$ .
9. (a)  $1,5 \Omega$ . (b)  $9 \text{ V}$ .
10. (a)  $I_2 = -0,25 \text{ mA}$ ,  $I_3 = 2,75 \text{ mA}$ . (b)  $66,25 \text{ pC}$ , positiva em F e negativa em E.
11. (a)  $0,67 \text{ s}$ . (b)  $15 \text{ nC}$ ,  $12 \text{ nC}$ .  
(c)  $12,8 \text{ nC}$ ,  $12,1 \text{ pJ}$ ,  $I_{60} = 19,1 \text{ A}$ ,  $I_{70} = 10,7 \text{ A}$ ,  $I_{90} = 8,4 \text{ A}$ .
12. (a) Ligando uma resistência de  $9990 \Omega$  em série com o galvanómetro.  
(b) Ligando uma resistência de  $1,11 \Omega$  em paralelo.
13.  $400 \text{ k}\Omega$ .

14. (a) Maior. (d) Igual.  
(b) Maior. (e) Depende de  $t$ .  
(c) Depende de  $t$ .

## 8. Campo magnético



**André Marie Ampère (1775–1836)**

Nasceu em Lyon, França. Sendo o seu pai um homem culto decidiu dedicar-se à educação do filho, levando a família para fora da cidade. No entanto, acabou por morrer na guilhotina quando André Marie tinha apenas 17 anos. Foi professor de física, química e matemática em Lyon e em Bourg, sendo tal a sua reputação como investigador e professor que lhe foram abertas as portas da Escola Politécnica de Paris. Aí, leccionou mecânica e matemática com Cauchy, trabalhando em equações diferenciais, teoria dos jogos e geometria analítica. Em 1820, foi anunciada a descoberta de Ørsted na qual a agulha de uma bússola era desviada por um fio atravessado por corrente elétrica. Ampère, idealizando novas experiências com correntes e campos magnéticos, avançou mais na explicação do fenómeno, mostrando que forças magnéticas actuam entre fios atravessados por corrente elétrica. Ampère fez investigação em ótica, e com Fresnel, defendeu a teoria ondulatória da luz face à teoria corpuscular defendida por Laplace e Biot.

A força magnética entre ímanes foi descoberta pelos gregos ao observarem que algumas pedras (ímanes naturais) provenientes das minas da região de Magnésia atraíam pedaços de ferro; Magnésia deu origem à palavra **magnetismo**. Antes do século XII, a bússola já era usada pelos chineses, embora estes não soubessem o princípio físico do seu funcionamento.

Por volta de 1600, o inglês William Gilbert publicou o seu livro *De Magnete*. Este foi o primeiro tratado exaustivo sobre a força magnética; de facto, foi nele que a força magnética recebeu o seu nome e foi identificada como uma força diferente da força eletrostática. Entre os fenómenos explicados por Gilbert, encontra-se o funcionamento das bússolas. Gilbert deduziu que a Terra devia ser um íman gigante com pólos magnéticos denominados **norte** e **sul**. A força entre pólos iguais é repulsiva e entre pólos diferentes é atractiva. A grande diferença em relação à força eletrostática, como Gilbert salientou, é que não existem pólos norte ou sul separadamente; qualquer íman tem sempre os dois pólos. Numa bússola, o pólo norte define-se como o pólo que aponta na direção do pólo norte geográfico, de tal forma que o pólo **sul magnético** da Terra se encontra no pólo **norte geográfico**.

No século XVII já eram bem conhecidas as forças elétrica e magnética mas não muito estudadas. O próprio Isaac Newton, no seu importante tratado de mecânica *Princípios Matemáticos da Filosofia Natural*, refere-se a elas como exemplos de forças à distância, dirigidas para um centro, mas não desenvolvendo o seu estudo, concentrando-se mais na força gravitacional. Em 1750, John Michell descobriu que a intensidade das forças produzidas por cada pólo num íman são iguais e diminuem proporcionalmente ao quadrado da distância.

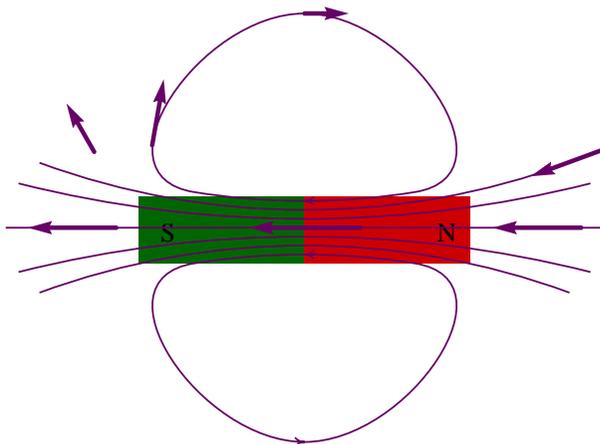
As três primeiras décadas do século XIX foram marcadas por um grande avanço no estudo do eletromagnetismo. O dinamarquês Hans C. Ørsted descobriu que uma corrente elétrica altera a orientação da agulha de uma bússola; Ørsted, reconhecendo a grande importância deste resultado como prova da unificação das forças naturais, neste caso a força elétrica e magnética, escreveu um artigo em latim divulgando-o por toda a Europa.

A descoberta de Ørsted desencadeou um rápido avanço, tanto a nível experimental como a nível teórico. Nos próximos capítulos seguiremos esse processo de evolução do eletromagnetismo. Neste capítulo, vamos começar por estudar a força magnética e algumas das suas aplicações.

## 8.1. Campo magnético

A existência de um campo magnético pode ser estabelecida por meio de uma bússola. Se a bússola tem uma tendência para apontar numa determinada direção, é porque existe um campo magnético  $\vec{B}$ , no ponto onde a bússola se encontrar; por definição, a direção do campo  $\vec{B}$  é a direção da agulha da bússola. Juntando continuamente os pontos do espaço, de acordo com a direção do campo  $\vec{B}$ , obtemos

linhas contínuas denominadas **linhas de campo magnético**. As linhas de indução magnética de um ímã saem do pólo norte magnético, entrando pelo pólo sul, e continuando dentro do ímã na direção do pólo norte formando uma curva fechada (Figura 8.1).



**Figura 8.1.:** Representação vetorial do campo  $\vec{B}$  em vários pontos perto de um ímã e sobre uma linha de campo magnético.

Para definir o módulo do campo magnético, usamos partículas de prova tal como fizemos no caso do campo elétrico. Quando uma partícula de carga  $q$  entra com uma velocidade  $\vec{v}$  numa região onde existe um campo magnético, sobre ela actua uma força que apresenta as seguintes propriedades:

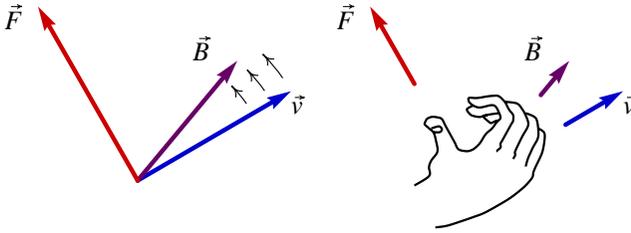
1. A força é diretamente proporcional ao módulo da velocidade ( $v$ ) da partícula quando a direção da velocidade da partícula é constante.
2. Se a velocidade é paralela a  $\vec{B}$ , a força é nula; a força é máxima nas direções em que a velocidade é perpendicular às linhas de indução magnética. Em geral, o módulo da força depende do seno do ângulo  $\theta$  formado pelo vetor velocidade e as linhas de campo magnético.
3. Num determinado ponto, a força sobre partículas com a mesma velocidade e diferentes cargas  $q$  é diretamente proporcional a  $q$ . Os três resultados anteriores implicam uma força magnética da forma

$$F = B q v \sin \theta , \quad (8.1)$$

onde  $B$  é a constante de proporcionalidade e define o módulo do campo magnético.

4. A direção e sentido da força são dados pela chamada **regra da mão direita** como se mostra na Figura 8.2: a força é perpendicular tanto a  $\vec{v}$  como a  $\vec{B}$  e

na direção que aponta o dedo polegar quando os outros dedos rodam de  $\vec{v}$  para  $\vec{B}$ .



**Figura 8.2.:** A regra da mão direita.

Os quatro resultados anteriores podem ser sintetizados na seguinte fórmula empírica: a força magnética sobre uma partícula de carga  $q$  e velocidade  $\vec{v}$ , num ponto onde existe um campo magnético  $\vec{B}$ , é igual a

$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}, \quad (8.2)$$

onde  $\vec{v} \times \vec{B}$  é o produto vetorial dos vetores  $\vec{v}$  e  $\vec{B}$ .

A medição experimental da força  $\vec{F}$  permite determinar o campo magnético  $\vec{B}$  através da Equação (8.2). A unidade usada para medir o campo magnético, no Sistema Internacional de unidades, é o **tesla** (T). De acordo com a Equação (8.1) um tesla é igual a

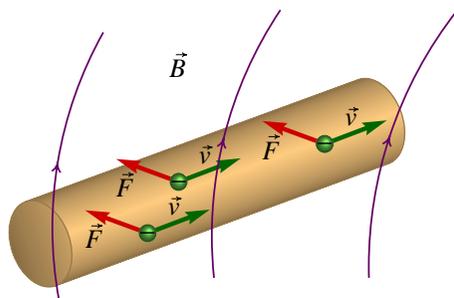
$$1 \text{ T} = 1 \frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{C} \cdot \text{m}} = 1 \frac{\text{N}}{\text{A} \cdot \text{m}}. \quad (8.3)$$

Na prática, os campos magnéticos são usualmente muito menores do que 1 T, por isso, outra unidade muito usada é o **gauss** (G), definido como:

$$1 \text{ G} = 10^{-4} \text{ T}. \quad (8.4)$$

## 8.2. Força magnética sobre um condutor com corrente

O movimento dos portadores de carga, dentro de um condutor com corrente que se encontre numa região onde exista um campo magnético, produz forças magnéticas sobre o gás de elétrons de condução (Figura 8.3); a força magnética é uma força distribuída ao longo do condutor e a força por unidade de comprimento é igual à força resultante sobre um segmento infinitesimal de fio, dividida pelo seu comprimento.



**Figura 8.3.:** Forças sobre os portadores de carga de um condutor dentro de um campo magnético.

A força média pode ser calculada em função da velocidade média dos portadores de carga,  $\vec{v}$ , e da carga dos portadores, usando a Equação (8.2). A força total sobre um elemento infinitesimal de um condutor, de comprimento  $ds$ , será

$$d\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B}) dN, \quad (8.5)$$

onde  $dN$  é o número de portadores de carga dentro do elemento  $ds$ , e admitindo que  $\vec{B}$  é constante no interior do elemento considerado. A carga total dos portadores de carga, no elemento considerado, é dada por  $q dN$  e igual ao produto da carga volúmica  $\rho$  e o volume do elemento do fio condutor considerado:

$$q dN = \rho A ds, \quad (8.6)$$

onde  $A$  é a área da secção transversal do condutor, logo

$$d\vec{F} = A\rho(\vec{v} \times \vec{B}) ds; \quad (8.7)$$

onde o produto  $\rho\vec{v}$  é o valor médio da densidade de corrente  $\vec{J}$ , que multiplicado pela área da secção transversal é igual ao vetor corrente  $\vec{I}$ , tangente ao fio. Podemos, assim, calcular a força em função da corrente e do deslocamento vetorial  $d\vec{r}$  ao longo do fio:

$$d\vec{F} = I d\vec{r} \times \vec{B}. \quad (8.8)$$

A força total sobre o fio obtém-se integrando a força infinitesimal ao longo do fio:

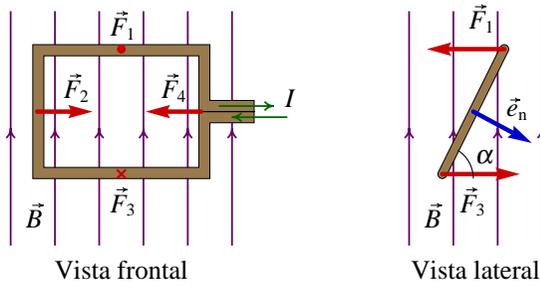
$$\vec{F} = I \int_A^B d\vec{r} \times \vec{B}. \quad (8.9)$$

No caso particular de um fio retilíneo de comprimento  $L$ , com corrente  $I$ , dentro de um campo uniforme  $\vec{B}$  que faz um ângulo  $\theta$  com o fio, a força magnética sobre o fio é

$$F = I L B \sin \theta. \quad (8.10)$$

### 8.3. Espiras e bobinas

Uma **espira** é um fio metálico que forma um circuito fechado; por exemplo, uma espira circular ou retangular. Um cabo enrolado em várias espiras forma uma **bobina**; a corrente elétrica entra por um extremo da bobina, percorre todas as espiras e sai pelo outro extremo da bobina. A Figura 8.4 mostra uma espira retangular de lados  $x$  e  $y$ , dois lados horizontais (de comprimento  $x$ ) e dois lados que fazem um ângulo  $\alpha$  com a horizontal, percorrida por uma corrente  $I$ . Se existir um campo magnético, aparecerão forças magnéticas sobre os quatro lados. No exemplo da figura, o campo é vertical, uniforme e aponta para cima. As forças  $\vec{F}_2$  e  $\vec{F}_4$  serão iguais e opostas e, conseqüentemente, a sua resultante será nula<sup>1</sup>.



**Figura 8.4.:** Espira dentro de um campo magnético uniforme.

As forças  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_3$  também são iguais e opostas, mas a sua resultante não é nula por não estarem sobre a mesma linha de ação: as duas forças constituem um binário com braço igual a  $y \sin \alpha$ . Os módulos das forças  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_3$  são

$$F_1 = F_3 = IBx . \tag{8.11}$$

O momento do binário é igual ao produto do módulo destas forças pelo braço:

$$T = IBxy \sin \alpha . \tag{8.12}$$

O ângulo  $\alpha$  que a espira faz com a horizontal e o ângulo  $\theta$  entre o campo magnético e a normal à espira,  $\hat{n}$ , ou são iguais ou são suplementares ( $\alpha = \pi - \theta$ ), já que os lados dos dois ângulos são respetivamente perpendiculares. Nos dois casos  $\sin \alpha = \sin \theta$ , e o momento do binário  $\vec{T}$  pode ser escrito como o produto vetorial

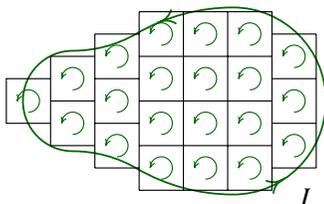
$$\vec{T} = m \vec{\times} B , \tag{8.13}$$

onde o **momento magnético**  $\vec{m}$  é diretamente proporcional à área  $A = xy$ :

<sup>1</sup>Admitimos que a espira é rígida; se assim não for, as forças  $\vec{F}_2$  e  $\vec{F}_4$  tenderão a deformar a espira.

$$\vec{m} \equiv AI\hat{n} . \quad (8.14)$$

Uma espira qualquer, dentro de um campo arbitrário, pode ser aproximada a várias espiras retangulares infinitesimais que preenchem a sua área (Figura 8.5). Em cada espira infinitesimal imaginamos uma corrente circulando no mesmo sentido da corrente da espira; as correntes nas espiras vizinhas anulam-se, ficando unicamente a corrente na periferia, que aproxima o percurso da corrente na espira. A aproximação será melhor quanto menor forem as áreas dos retângulos.



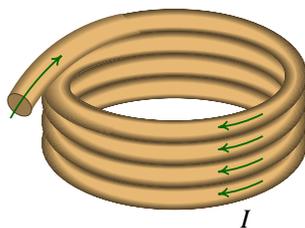
**Figura 8.5.:** Espira com corrente  $I$ , aproximada por várias espiras retangulares com a mesma corrente.

O momento do binário sobre a espira é igual à soma dos momentos em todas as espiras infinitesimais. Em cada espira infinitesimal o campo é aproximadamente constante e, por isso, podemos usar a Equação (8.14). O momento sobre a espira será assim o integral de superfície:

$$\vec{T} = I \iint d\vec{A} \times \vec{B} . \quad (8.15)$$

Uma bobina com  $N$  espiras, todas elas paralelas e com a mesma forma (Figura 8.6) tem um momento magnético igual à soma dos momentos das  $N$  espiras, já que o binário resultante é igual à soma dos  $N$  binários sobre as espiras. Assim, o momento magnético da bobina é

$$\vec{M} = N A I \hat{n} . \quad (8.16)$$

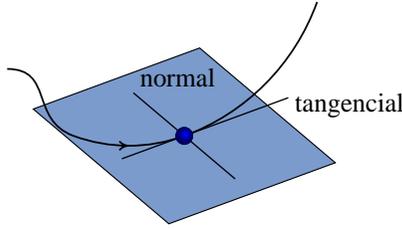


**Figura 8.6.:** Bobina.

O momento  $\vec{T}$  faz rodar a bobina na direção na qual  $\theta$  diminui até  $\hat{n}$  (ou o seu valor médio) apontar na direção de  $\vec{B}$  (Figura 8.4). O binário produzido sobre uma bobina com corrente é o princípio do funcionamento dos motores elétricos. Num motor de corrente contínua, no momento em que  $\hat{n}$  aponta na direção de  $\vec{B}$ , formando um ângulo  $\theta = 0$ , inverte-se o sentido da corrente na bobina mudando, assim, o sentido de  $\hat{n}$  que passa a formar um ângulo de  $180^\circ$  com o campo magnético. O aumento do ângulo, entre o campo e o versor normal, produz um aumento do binário que faz rodar a bobina mantendo o seu movimento circular.

## 8.4. Movimento de partículas no campo magnético

A velocidade de uma partícula é sempre tangente à sua trajetória; em cada ponto da trajetória existe um sistema de três versores perpendiculares (triedro de Frenet-Serret, Figura 8.7) definidos da seguinte forma: o versor **tangencial**  $\hat{t}$ , na direção da velocidade, o versor **normal**  $\hat{n}$ , sobre o plano tangente à trajetória, e apontando na direção do centro de curvatura e, finalmente, o versor **binormal**, perpendicular ao plano tangente e definido como  $\hat{t} \times \hat{n}$ .



**Figura 8.7.:** Direções tangencial e normal à trajetória de uma partícula. O plano sombreado é o plano tangente.

A aceleração da partícula em cada ponto tem duas componentes nas direções dos versores tangencial e normal. A aceleração tangencial é  $dv/dt$  e a aceleração normal é a aceleração centrípeta  $v^2/\rho$ , em que  $\rho$  é o raio de curvatura local, medido sobre o plano tangente.

No caso de uma partícula de carga  $q$ , dentro de um campo de indução magnética, a aceleração é também igual à força magnética dividida pela massa  $m$ :

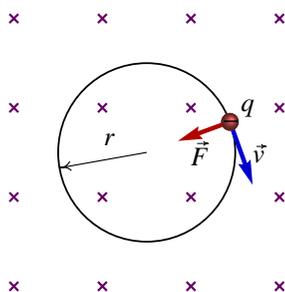
$$\frac{q}{m} \vec{v} \times \vec{B} = \frac{dv}{dt} \hat{t} + \frac{v^2}{\rho} \hat{n}. \quad (8.17)$$

Como  $\vec{v} \times \vec{B}$  é um vetor perpendicular a  $\hat{t}$ , concluímos que:

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = 0, \\ \frac{q}{m} \vec{v} \times \vec{B} = \frac{v^2}{\rho} \hat{n}. \end{cases} \quad (8.18)$$

A velocidade escalar,  $v$ , permanece constante; só muda a direção de  $\vec{v}$ . A direção normal,  $\hat{n}$ , é definida pela regra da mão direita de  $\vec{v}$  para  $\vec{B}$ . O raio de curvatura calcula-se a partir da última equação:

$$\rho = \frac{mv}{qB \sin \theta}. \quad (8.19)$$



**Figura 8.8.:** Movimento circular uniforme de uma partícula com carga negativa num campo magnético uniforme.

A Figura 8.8 mostra um caso em que o campo magnético é uniforme e perpendicular à velocidade da partícula (a velocidade é sobre o plano do desenho e o campo magnético aponta para dentro do desenho). O raio de curvatura será constante e igual a

$$r = \frac{mv}{qB}. \quad (8.20)$$

que  $\hat{n}$  é perpendicular a  $\vec{v}$  e a  $\vec{B}$ ; o versor binormal tem a direção de  $q\vec{B}$  e permanece sempre constante. O resultado é um movimento circular uniforme.

A velocidade angular,

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{qB}{m}, \quad (8.21)$$

é igual para partículas com a mesma **carga mássica**  $q/m$ . O sentido de rotação depende do sinal da carga; no caso da Figura 8.8, as partículas com carga negativa rodam no sentido horário, e as partículas com carga positiva rodam no sentido anti-horário. Nos aceleradores de partículas, a carga mássica das partículas produzidas numa colisão é calculada observando o seu movimento dentro de um campo magnético, perpendicular à velocidade.

Quando a velocidade não for perpendicular ao campo  $\vec{B}$ , podemos considerar o movimento como a sobreposição de dois movimentos; a componente da velocidade tangente ao campo permanece constante enquanto que a componente perpendicular ao campo descreve um movimento circular com raio  $r$ . A partícula roda sobre um plano perpendicular ao campo, o qual se desloca na direção da componente tangencial ao campo, com velocidade uniforme; o movimento resultante é um movimento helicoidal. De notar que o raio  $r$  do círculo que descreve a hélice não é igual ao raio de curvatura  $\rho$  da hélice ( $\rho > r$ ). Em cada ponto, o raio  $r$  é inversamente proporcional ao módulo do campo magnético, e o eixo da hélice segue a direção das linhas de campo magnético.

Dentro de campos elétrico e magnético, a força sobre uma partícula com carga  $q$  e velocidade  $\vec{v}$  é a soma das forças elétrica e magnética:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) ; \quad (8.22)$$

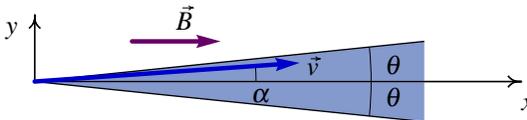
esta força é chamada **força de Lorentz**. A combinação do campo elétrico e do campo de indução magnética permite produzir movimentos muito variados.

### Exemplo 8.1

Num feixe de partículas de massa  $m$  e carga  $q$  a componente da velocidade,  $v_0$ , ao longo do eixo do feixe é a mesma para todas as partículas, divergindo o feixe de um ângulo  $\theta$ . Mostre que um campo magnético uniforme  $\vec{B}$ , na direção do eixo, faz o feixe convergir para um ponto (foco), e encontre a distância deste ponto ao ponto inicial. (Nota: este método é usado em microscópios eletrônicos e outros aparelhos que utilizam feixes de partículas.)

Consideremos uma partícula dentro do feixe, com velocidade  $v_0$ , formando um certo ângulo  $\alpha$  ( $0 \leq \alpha \leq \theta$ ) com o campo de indução magnética. Escolhamos um sistema de eixos de forma a que o eixo  $x$  esteja na direção do campo e a velocidade inicial da partícula esteja no plano  $xy$  (Figura 8.9):

$$\begin{aligned} v_x &= v_0 , \\ v_y &= v_0 \operatorname{tg} \alpha . \end{aligned}$$



**Figura 8.9.:** Feixe de partículas dentro de um campo magnético.

Depois de algum tempo a velocidade  $v_x$  é a mesma, mas a velocidade  $v_y$  terá diminuído, aparecendo uma componente  $v_z$ . Na projeção sobre o plano  $yz$ , o movimento é circular uniforme, como já vimos no caso do movimento no plano perpendicular ao campo. O raio da projeção  $yz$  calcula-se a partir da Equação (8.20), em que a velocidade escalar é igual à velocidade inicial  $v_y = v_0 \operatorname{tg} \alpha$ :

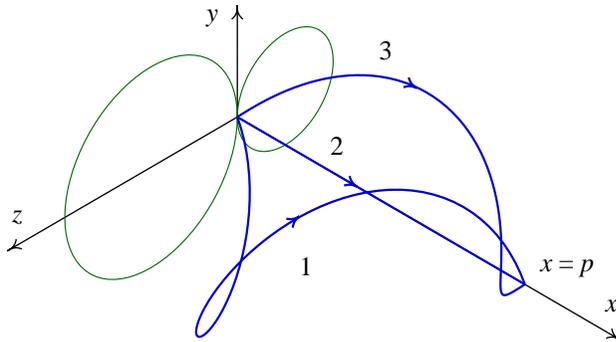
$$a = \frac{mv_0 \operatorname{tg} \alpha}{qB} . \quad (8.23)$$

Enquanto as partículas descrevem um círculo no plano normal ao eixo, o plano desloca-se a velocidade constante  $v_0$  e o movimento resultante é uma hélice sobre

um cilindro de raio  $a$  (Figura 8.10). Para calcular o **passo**,  $p$ , da hélice calculemos o período de rotação do movimento circular uniforme:

$$T = \frac{2\pi a}{v_0 \operatorname{tg} \alpha} = \frac{2\pi m}{qB}.$$

O resultado não depende do ângulo  $\alpha$ . Apesar de as diversas partículas no feixe percorrerem hélices de raios diferentes, todas elas completam uma volta exactamente no mesmo tempo  $T$ , regressando ao eixo  $x$ .



**Figura 8.10.:** Movimento helicoidal de partículas com a mesma componente da velocidade na direção do campo  $\vec{B}$ .

Como o movimento na direção  $x$  é uniforme, com velocidade  $v_0$ , a distância  $p$  a que as partículas completam a primeira volta é

$$p = v_0 T = \frac{2\pi m v_0}{qB}.$$

A Figura 8.10 mostra o movimento de três partículas: a partícula 1 com uma componente de velocidade inicial no sentido negativo de  $y$ , a partícula 2 com velocidade inicial na direção  $x$  e a partícula 3 com uma componente da velocidade inicial segundo  $y$ . Os dois círculos no plano  $yz$  representam as projeções dos movimentos das partículas 1 e 3. A secção transversal do feixe de partículas aumenta a partir da origem, até um valor máximo em  $x = p/2$ , diminuindo logo até zero para  $x = p$  onde as partículas convergem.

## 8.5. Aplicações dos campos elétrico e magnético

As aplicações tecnológicas do movimento de partículas dentro dos campos elétrico e magnético são muitas. Existem diversos métodos de separação de partículas baseados nos campos elétrico e magnético. Algumas técnicas de impressão usam

campos elétricos para transportar as partículas de tinta. Um televisor e um monitor de computador usam um feixe contínuo de elétrons para produzir a imagem; o varrimento do ecrã, por parte do feixe de elétrons, é controlado com precisão por meio de campos elétrico e magnético pulsatórios. O movimento de partículas dentro dos campos elétrico e magnético é também usado para determinar a relação carga-massa das partículas, permitindo descobrir novas partículas elementares em colisões a alta energia, nos aceleradores de partículas. Estudaremos com mais detalhe quatro exemplos de aplicação dos campos elétrico e magnético.

### 8.5.1. Filtro de velocidades

Um dispositivo usado para filtrar partículas em movimento, com uma determinada velocidade num feixe de partículas, consiste num par de campos elétrico e magnético perpendiculares entre si e perpendiculares ao feixe (Figura 8.11).

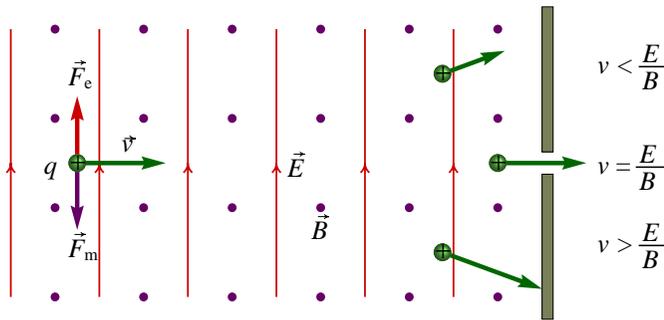


Figura 8.11.: Filtro de velocidades.

Para que uma partícula no feixe consiga sair do filtro, a sua trajetória deverá ser retilínea, e para que isso aconteça é necessário que a força de Lorentz seja nula. A força elétrica e a força magnética têm sentidos opostos neste caso, de maneira que a condição para o movimento retilíneo é dada por

$$qvB = qE, \quad (8.24)$$

a qual implica uma velocidade igual a

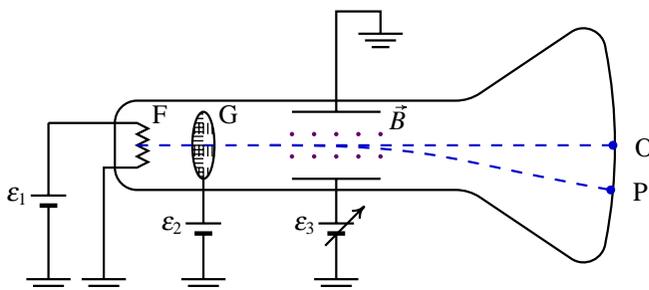
$$\boxed{v = \frac{E}{B}}. \quad (8.25)$$

Apenas as partículas com esta velocidade conseguirão atravessar o filtro, independentemente do sinal e do valor da carga  $q$ . Consideremos, por exemplo, partículas com carga positiva constante. Com os campos indicados na Figura 8.11, a força

elétrica será para cima e igual para todas as partículas. A força magnética, para baixo, é diretamente proporcional a  $v$ . A força magnética sobre as partículas lentas ( $v < E/B$ ), não será suficiente para contrariar a força elétrica, e a trajetória das partículas será curva para cima. As trajetórias das partículas rápidas ( $v > E/B$ ) será curva para baixo. Se a carga for negativa, as partículas lentas serão puxadas para baixo e as partículas rápidas serão puxadas para cima, mas as partículas com  $v = E/B$  seguem a trajetória reta.

### 8.5.2. Tubo de raios catódicos

A invenção do tubo de raios catódicos permitiu ao inglês J. J. Thomson descobrir, em 1897, a primeira partícula elementar — o eletrão. O tubo de raios catódicos é igual ao tubo usado nos osciloscópios e aparelhos de televisão (Figura 8.12). Uma f.e.m.  $\varepsilon_1$  é usada para aquecer um filamento F (cátodo) dentro do tubo onde existe vácuo. Quando se introduz uma segunda f.e.m.  $\varepsilon_2$ , que faz com que a placa perfurada G (ânodo) tenha maior potencial do que o filamento, aparece um feixe de raios entre o filamento e o ânodo, chamados de **raios catódicos**. A grande contribuição de Thomson foi descobrir que os raios catódicos são formados por partículas subatômicas, todas elas com a mesma carga mássica.



**Figura 8.12.:** Tubo de raios catódicos.

A maior parte dos eletrões extraídos do cátodo conseguem atravessar a placa G e continuam com velocidade constante,  $v$ , na direção do ecrã. A velocidade  $v$  dos eletrões no feixe é devida à aceleração produzida pela diferença de potencial entre o cátodo e o ânodo. Como a aceleração é do cátodo para o ânodo, a carga dos eletrões é negativa. Como o feixe não é desviado pela ação da gravidade, Thomson concluiu que a massa do eletrão devia ser muito pequena e propôs um método para calcular a carga mássica do eletrão ( $m/e$ ).

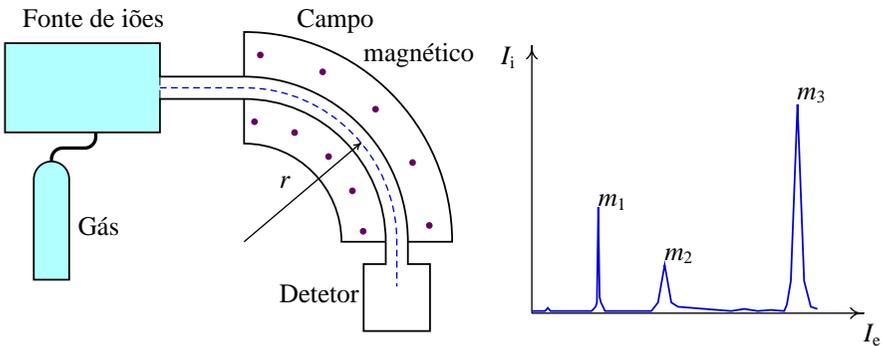
O método consiste em medir o desvio do feixe de eletrões quando se introduz um campo elétrico perpendicular ao feixe. Na Figura 8.12, a introdução da diferença de potencial  $\varepsilon_3$  desvia os raios catódicos do ponto inicial O até ao ponto P no

ecrã. A velocidade  $v$  dos eletrões pode ser calculada introduzindo também um campo magnético cruzado  $B$  de forma a fazer regressar o feixe ao ponto inicial  $O$ , actuando como um filtro de velocidades. A carga mássica  $m/e$  é calculada em função de  $v$ ,  $B$ ,  $\varepsilon_3$  e o desvio angular entre  $O$  e  $P$ . O facto de se obter um só ponto  $P$  no ecrã corrobora que todas as partículas do feixe (eletrões) têm exactamente a mesma carga mássica.

### 8.5.3. Espetrómetro de massa

No espetrómetro de massa, o campo magnético é usado para separar os elementos que compõem um gás, de acordo com a sua massa atómica. Este método é especialmente útil quando se têm diferentes isótopos de um mesmo elemento<sup>2</sup>.

O gás entra dentro de uma cavidade no vazio — **fonte de iões** — onde é bombardeado por um feixe de eletrões (Figura 8.13). As colisões entre os eletrões e o gás ionizam algumas moléculas do gás; se o feixe de eletrões não tiver uma energia muito elevada, a probabilidade deste arrancar dois ou mais eletrões de uma molécula é muito baixa e podemos admitir que todos os iões têm a carga elementar  $e$ . Os iões são acelerados fora da fonte; a velocidade com que os iões saem não depende da sua massa mas apenas da sua carga e da diferença de potencial; temos, assim, um feixe de partículas com velocidade constante  $\vec{v}$ , mas massas diferentes.



**Figura 8.13.:** Espetrómetro de massa e espectro de um gás.

O feixe de iões passa através de um campo magnético uniforme e perpendicular,  $\vec{B}$ . O raio de curvatura dos iões dentro do campo magnético depende da massa iónica  $m$ ; substituindo a carga dos iões na Equação (8.20), obtemos

$$r = \frac{mv}{eB}. \quad (8.26)$$

<sup>2</sup>Os isótopos têm o mesmo número atómico mas diferentes massas atómicas; como as propriedades químicas dependem apenas do número atómico, não é possível separar isótopos por meios químicos.

Modificando o módulo  $B$  do campo, o raio  $r$  pode ser ajustado até os iões com uma determinada massa entrarem no detetor (Figura 8.13). Se o campo  $\vec{B}$  for produzido por um eletroímã,  $B$  é diretamente proporcional à corrente  $I_e$  no eletroímã; a corrente iónica  $I_i$  no detetor, em função de  $I_e$ , apresenta vários picos que correspondem às diferentes massas  $m$  dos componentes do gás. O valor de  $I_e$  onde aparece um pico é diretamente proporcional à massa atómica do elemento correspondente. A altura dos picos é diretamente proporcional à concentração do elemento dentro do gás.

#### 8.5.4. Galvanómetro

Como vimos no capítulo anterior, o dispositivo usado para medir correntes é o galvanómetro. O tipo mais comum de galvanómetro consiste numa bobina que roda à volta de um eixo, dentro de um campo magnético (Figura 8.14). Quando uma corrente  $I$  percorre a bobina, produz-se um momento magnético  $\vec{m}$  diretamente proporcional à corrente  $I$ . O campo magnético exerce sobre a bobina um momento de binário igual a  $\vec{m} \times \vec{B}$ .

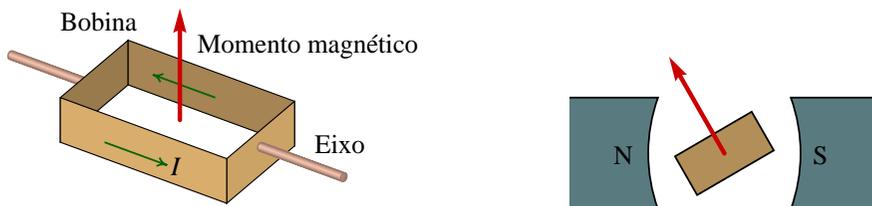
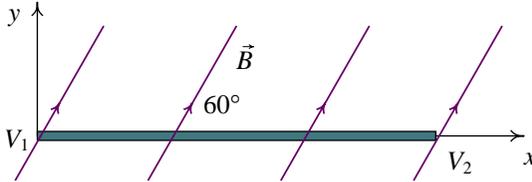


Figura 8.14.: Galvanómetro.

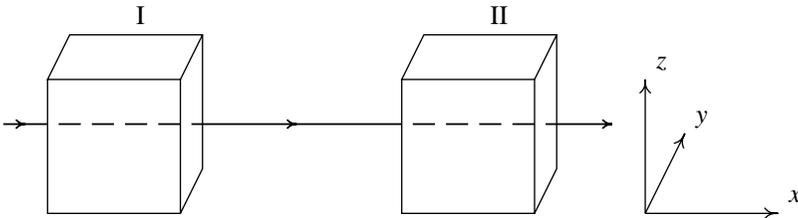
À rotação da bobina opõe-se uma mola em espiral que actua sobre ela; o momento do binário produzido pela mola em espiral é diretamente proporcional ao ângulo de rotação da bobina. Na posição em que os dois binários se equilibram, a bobina terá rodado um ângulo que é diretamente proporcional ao momento magnético e, portanto, à corrente  $I$ . A medição do ângulo permite determinar o valor da corrente.

## Problemas

1. Um fio linear de cobre, de diâmetro 2.59 mm e de comprimento 2 m, encontra-se dentro de um campo magnético uniforme ( $B = 50 \text{ G}$ ) que faz um ângulo de  $60^\circ$  com o fio. Calcule a força magnética sobre o fio quando se aplica uma diferença de potencial de 0.06 V entre os seus extremos.

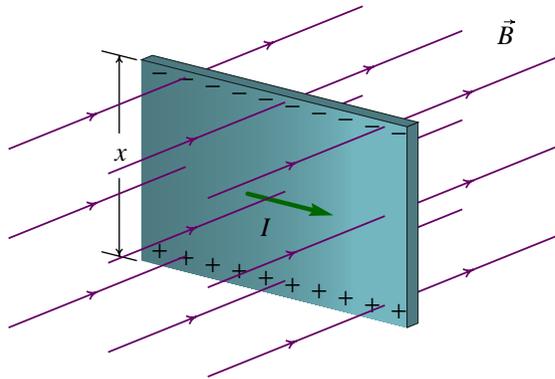


2. Um feixe de prótons desloca-se com uma velocidade constante  $\vec{v}$ , segundo o eixo  $x$ . As partículas atravessam, sucessivamente, duas regiões, I e II, caracterizadas do seguinte modo: em I, existe um campo magnético,  $\vec{B}_1$  e em II, coexistem um campo de indução magnética,  $\vec{B}_2$ , e um campo elétrico,  $\vec{E} = E \hat{j}$ . Todos os campos são uniformes nas regiões em que foram definidos e anulam-se fora delas. A interação gravítica não é significativa. Quais as condições a que devem obedecer os campos  $\vec{B}_1$  e  $\vec{B}_2$  para que o feixe não sofra qualquer perturbação no seu movimento, enquanto atravessa as regiões I e II? Se em vez de um feixe de prótons, fosse um feixe de elétrons, as condições estabelecidas manter-se-iam?

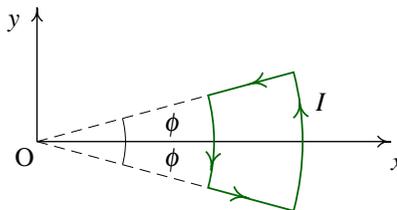


3. Um próton “navega” na atmosfera solar, a uma velocidade de  $0.15c$ , onde  $c$  é a velocidade da luz no vácuo (ver Apêndice B). O próton atravessa um campo magnético uniforme de 0.12 T, formando um ângulo de  $25^\circ$ . Calcule o raio do cilindro que envolve a órbita helicoidal do próton.
4. Considere uma bobina circular de 400 espiras e raio 0.1 cm, num campo magnético uniforme de 0.3 T. Calcule o momento de binário máximo sobre a bobina quando a corrente for 92 mA.
5. Num filtro de velocidades os módulos dos campos magnético e elétrico são 0.1 T e 0.2 MV/m, respetivamente.
- Qual deve ser a velocidade de uma partícula para que não seja desviada ao passar pelos campos?
  - Qual é a energia que deve ter um próton para passar através do filtro?
  - E qual a energia de um elétron que sai do filtro? (As massas do elétron e do próton encontram-se no Apêndice C.)

6. Um ião de  $^{24}\text{Mg}$ , monoionizado, é acelerado por uma diferença de potencial de 2 kV e descreve uma trajetória circular no campo de indução magnética de 50 mT de um espectrómetro de massa.
- (a) Calcule o raio de curvatura da órbita do ião.
- (b) Qual será a diferença entre os raios das órbitas dos iões dos isótopos  $^{26}\text{Mg}$  e  $^{24}\text{Mg}$  no mesmo campo?
7. Em 1879, o físico E. H. Hall descobriu que quando uma corrente atravessa uma lâmina condutora de largura  $x$ , dentro de um campo magnético perpendicular à lâmina, aparece uma diferença de potencial  $V$  através da lâmina como se mostra na figura (efeito Hall). Demonstre que a diferença de potencial é igual a  $xIB/\rho A$ , em que  $\rho$  é a carga volúmica dos portadores de carga e  $A$  a área da secção transversal da lâmina. Como se modificaria o resultado, se em vez de uma lâmina condutora tivesse uma lâmina de germânio com portadores de carga positivos?



8. Partículas de carga  $q$  e massa  $m$  são aceleradas, a partir do repouso, por uma diferença de potencial  $V$  e entram numa região de campo de indução magnética uniforme  $\vec{B}$  perpendicular à velocidade. Sendo  $r$  o raio de curvatura das órbitas circulares, demonstre que  $r^2$  é igual a  $2mV/qB^2$ .
9. A espira da figura é formada por dois arcos de raios  $r_1$  e  $r_2$  ( $r_2 > r_1$ ), cada um correspondente a um ângulo  $2\phi$ , e dois segmentos radiais de comprimento  $r_2 - r_1$ . Existe um campo magnético  $C\hat{\theta}/r$ , onde  $C$  é uma constante e  $(r, \theta)$  são as coordenadas polares. Calcule o momento de binário sobre a espira quando esta é percorrida por uma corrente  $I$ , no sentido indicado na figura.



## Respostas

1.  $80.5 \hat{k}$  (mN).
2.  $\vec{B}_1 = B_1 \hat{i}$ ,  $\vec{B}_2 = B_{2x} \hat{i} + E/v \hat{k}$ , onde  $B_1$ ,  $B_{2x}$  e  $E$  podem ser quaisquer funções, não necessariamente constantes. As condições obtidas são válidas para qualquer tipo de partículas.
3. 1.98 m.
4.  $3.47 \times 10^5 \text{ N} \cdot \text{m}$ .
5. (a)  $2 \times 10^6 \text{ m/s}$ . (c)  $1.82 \times 10^{-18} \text{ J}$ .  
(b)  $3.34 \times 10^{-15} \text{ J}$ .
6. (a) 63 cm. (b) 2.6 cm.
7. Se os portadores de carga tivessem carga positiva, a diferença de potencial de Hall seria no sentido oposto ao indicado na figura.
9.  $\vec{T} = CI(r_1 - r_2) \sin \phi \hat{i}$ .

## 9. Magnetostática



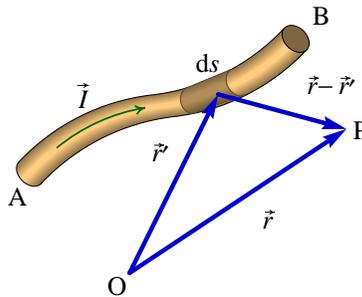
**Jean-Baptiste Biot (1774–1862)**

Biot nasceu em Paris. Estudou na Escola Politécnica dessa cidade onde foi discípulo de Monge. Entre 1797 e 1800 foi professor de matemática na Escola Central de Beauvais, professor de física matemática no *Collège de France* onde, em 1809, ocupou a cátedra de astronomia. A matemática aplicada foi o seu campo de investigação nas áreas da ótica, elasticidade, astronomia, eletricidade e magnetismo, tendo feito algum trabalho mais abstracto na área da geometria. Colaborou com Arago na medição do comprimento do arco do meridiano terrestre e na refração da luz em gases. Estudou a polarização da luz ao atravessar uma solução química. Em 1820, com o francês Savart, deu o seu maior contributo para o eletromagnetismo com o estudo do campo magnético produzido por cabos atravessados por corrente. No campo da ótica, foi um dos principais promotores da teoria corpuscular da luz.

## 9.1. Lei de Biot-Savart

Como já foi dito no capítulo anterior, em 1820 o dinamarquês Ørsted revolucionava as ciências da eletricidade e do magnetismo com a descoberta da produção de um campo magnético por meio de uma corrente elétrica. O físico francês Arago anunciou o descobrimento de Ørsted em Paris, e construiu o primeiro eletroímã enrolando um fio que, ao ser percorrido por corrente, atraía pequenos pedaços de ferro. Alguns dias mais tarde Jean-Baptiste Biot e Felix Savart, ao estudar sistematicamente o campo produzido por um fio com corrente, encontraram uma expressão matemática para o campo magnético em função da corrente. Ampère também se interessou pelo resultado de Ørsted estudando simultaneamente, mas de forma independente, a relação entre a corrente e o campo magnético, estudos esses que o levaram a descobrir a existência de forças magnéticas entre fios atravessados por corrente.

Em Londres, no ano de 1821, Michael Faraday também reproduzia e estendia a experiência de Ørsted, e com base nesta realizou uma série de experiências sobre a rotação produzida por campos de indução magnética sobre espiras, que serviriam de base à invenção do motor elétrico.



**Figura 9.1.:** Vetores usados na lei de Biot-Savart.

A **lei de Biot-Savart** estabelece a equação do campo de indução magnética  $\vec{B}$  produzido num ponto  $P$  por um fio com corrente  $I$ , que escrita em notação vetorial é dada pela seguinte equação:

$$\vec{B} = k_m \int_A^B \frac{\vec{I} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} ds' . \quad (9.1)$$

O vetor  $\vec{r}$  é o vetor posição do ponto  $P$  onde se pretende calcular o campo,  $\vec{r}'$  é o vetor que define os pontos do fio e o integral é um integral de linha ao longo do fio. A **constante magnetostática**  $k_m$  tem o seguinte valor experimental, no Sistema

Internacional de unidades,

$$k_m = 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{A}^2} . \quad (9.2)$$

Este é um valor exacto, já que é definido, e não medido experimentalmente; na próxima secção voltaremos a este ponto. A Equação (9.1) é semelhante à equação do campo eléctrico produzido por um fio com carga linear  $\lambda$ . A diferença está em que a corrente  $I$  aparece em vez de  $\lambda$  e o campo tem a direcção de  $\vec{I} \times (\vec{r} - \vec{r}')$  e não a direcção de  $(\vec{r} - \vec{r}')$ ; o campo produzido por um elemento infinitesimal de fio não é um campo central e, como veremos, não é conservativo.

### Exemplo 9.1

Calcule o campo magnético produzido por um fio retilíneo com corrente  $I$ .

Convém escolher o eixo  $z$  ao longo do fio e usar coordenadas cilíndricas. Para um dado ponto P podemos escolher o plano  $xy$  sobre o ponto, de maneira que a posição de P, em coordenadas cilíndricas, seja  $\vec{r} = R \hat{R}$  e o elemento infinitesimal de fio seja  $dz$ , na posição  $\vec{r}' = z \hat{k}$ ; assim, temos:

$$\vec{r} - \vec{r}' = R \hat{R} - z' \hat{k} ,$$

e o produto vetorial no numerador da lei de Biot-Savart é

$$\vec{I} \times (\vec{r} - \vec{r}') = \vec{I} \times (R \hat{R} - z' \hat{k}) = I R \hat{\theta} ,$$

onde  $\hat{\theta}$  é o versor transversal, perpendicular a  $\hat{R}$  e a  $\hat{k}$ . Usando a lei de Biot-Savart temos

$$\vec{B} = k_m I \int_{z_1}^{z_2} \frac{R}{(R^2 + z'^2)^{3/2}} dz' \hat{\theta} .$$

O integral pode ser resolvido por meio da substituição trigonométrica  $z = R \operatorname{tg} \beta'$ , onde  $\beta'$  é o ângulo representado na Figura 9.2.

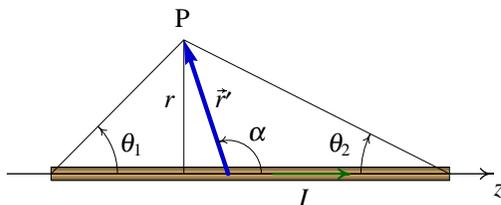


Figura 9.2.: Fio retilíneo curto, com corrente  $I$ .

Em função de  $\beta'$  o integral é

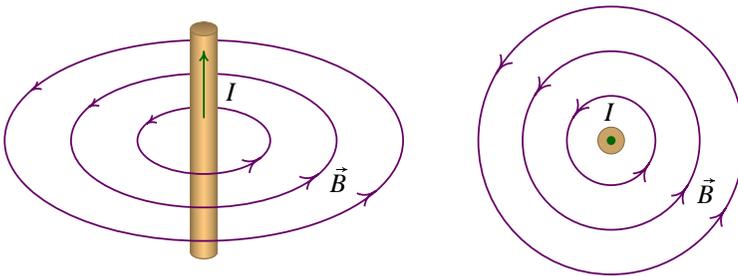
$$\vec{B} = \frac{k_m I \hat{\theta}}{R} \int_{-\beta_1}^{\beta_2} \cos \beta' d\beta' ,$$

e o resultado obtido é

$$\vec{B} = \frac{k_m I}{R} (\sin \beta_1 + \sin \beta_2) \hat{\theta} . \quad (9.3)$$

Se o ponto P se encontrar sobre o eixo do fio, a expressão anterior não poderá ser usada mas é fácil ver que o campo será nulo.

As linhas de campo magnético são círculos perpendiculares ao fio e com centro nele (Figura 9.3). No caso de um fio retilíneo muito comprido, ou em geral, quando a distância  $R$  é pequena quando comparada com a distância aos dois extremos do fio, os ângulos  $\beta_1$  e  $\beta_2$  são aproximadamente iguais a  $90^\circ$  e, substituindo na Equação (9.3), obtém-se  $B = 2 k_m I/R$ .



**Figura 9.3:** Linhas de campo magnético de um fio retilíneo.

De forma vetorial, a expressão do campo  $\vec{B}$  dum fio retilíneo pode ser escrita

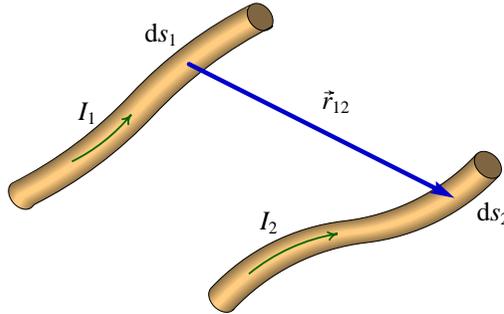
$$\vec{B} = \frac{2k_m I \vec{l} \times \hat{R}}{R} . \quad (9.4)$$

A equação anterior é válida inclusivamente para fios curtos, sempre que exista simetria cilíndrica e a corrente seja estacionária, já que, como veremos no Capítulo 12, o factor adicional que aparece na Equação 9.3 é devido à corrente não ser estacionária.

## 9.2. Força magnética entre fios com corrente

Já vimos, no capítulo anterior, que sobre um fio atravessado por corrente, um campo magnético produz uma força. Quando existem dois fios com correntes  $I_1$  e

$I_2$ , a corrente  $I_1$  no fio 1 produz um campo magnético  $\vec{B}_1$ , de acordo com a lei de Biot-Savart, o qual exerce uma força  $\vec{F}_{12}$  sobre o segundo fio; de igual forma, o fio 2 produz um campo magnético  $\vec{B}_2$  que actua no primeiro fio, com uma força  $\vec{F}_{21}$  (Figura 9.4).



**Figura 9.4.:** Força entre fios com correntes.

A força, por unidade de comprimento, que o fio 1 exerce sobre o fio 2 é

$$\frac{d\vec{F}_{12}}{ds_2} = \vec{I}_2 \times \vec{B}_1 . \quad (9.5)$$

O campo produzido pelo fio 1, na posição de  $ds_2$ , é dado pela lei de Biot-Savart:

$$\vec{B}_1 = k_m \int_{A_1}^{B_1} \frac{\vec{I}_1 \times \hat{1}_2}{r_{12}^2} ds_1 . \quad (9.6)$$

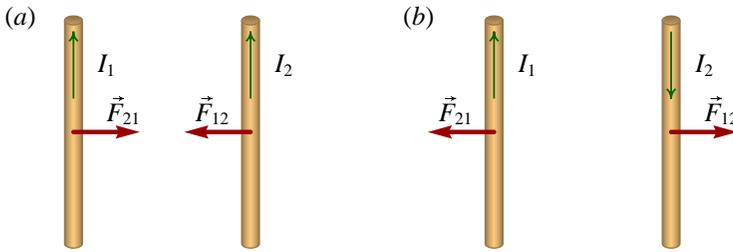
Substituindo na Equação (9.5) e integrando desde  $A_2$  até  $B_2$ , obtemos

$$\vec{F}_{12} = k_m \int_{A_1}^{B_1} \int_{A_2}^{B_2} \frac{\vec{I}_2 \times (\vec{I}_1 \times \hat{1}_2)}{r_{12}^2} ds_1 ds_2 . \quad (9.7)$$

Um caso simples é quando os dois fios são retilíneos e paralelos; se os fios são muito compridos, a Equação (9.3) constitui uma boa aproximação ao valor do campo produzido por cada um dos fios. A força sobre o fio 2, por unidade de comprimento, obtém-se a partir das Equações (9.5) e (9.3):

$$\boxed{\frac{F_{12}}{l_2} \approx \frac{2k_m I_1 I_2}{r_{12}}} ; \quad (9.8)$$

o sentido da força obtém-se facilmente usando a regra da mão direita e o resultado é uma força atractiva entre fios com correntes no mesmo sentido ou repulsiva para correntes em sentidos opostos (Figura 9.5).



**Figura 9.5.:** Força magnética entre dois fios retilíneos paralelos, com correntes.

A Equação (9.8) é usada para definir o ampere no Sistema Internacional de unidades, em função do newton e do metro, usando o valor  $10^{-7}$  N/A<sup>2</sup> para a constante magnetostática: um ampere é a corrente que deve circular por dois fios retilíneos e paralelos para se obter uma força por unidade de comprimento de  $2 \times 10^{-7}$  N/m quando a distância entre os fios é de 1 metro. Assim, como foi referido na secção anterior, o valor da constante magnetostática é definido no Sistema Internacional de unidades, de forma a obter uma unidade de corrente da ordem de grandeza das correntes normalmente obtidas em experiências de eletricidade. O coulomb é uma unidade auxiliar, definida como a carga transferida por uma corrente contínua de 1 ampere durante 1 segundo e, portanto, o valor da constante de Coulomb não pode ser definido devendo ser medido experimentalmente.

### Exemplo 9.2

Os dois fios retilíneos e paralelos da Figura 9.5(a) transportam correntes de 3 A e 4 A e encontram-se separados por uma distância de 5 cm (o comprimento dos fios é muito maior do que 5 cm). Calcule a força por unidade de comprimento entre os fios. Em que ponto (ou pontos) o campo magnético total é nulo?

A força entre os dois fios é

$$\frac{F_{12}}{l_2} = \frac{2k_m I_1 I_2}{d} = \frac{2 \times 10^{-7} \cdot 3 \cdot 4 \text{ N} \cdot \text{A}^2}{5 \times 10^{-2} \text{ A}^2 \cdot \text{m}} = 48 \frac{\mu\text{N}}{\text{m}} .$$

Na região entre os dois fios, os campos dos dois fios têm sentidos opostos e, portanto, existe um ponto P no qual o campo total é nulo (Figura 9.6). No ponto P,

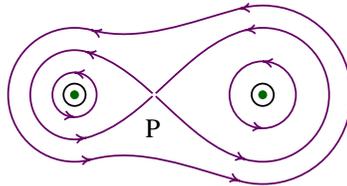
$$B_1 = \frac{2k_m I_1}{x_1} = B_2 = \frac{2k_m I_2}{x_2} ,$$

em que  $x_1$  e  $x_2$  são as distâncias de P aos fios percorridos por correntes de 3 A e

4 A, respetivamente ( $x_1 + x_2 = 5$  cm). Podemos assim calcular  $x_1$ :

$$\frac{I_1}{x_1} = \frac{I_2}{5 \text{ cm} - x_1} \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{I_1}{I_1 + I_2} 5 \text{ cm} \approx 2.1 \text{ cm} .$$

O campo é nulo no ponto sobre o segmento que une os fios, a uma distância de 2,1 cm do fio que transporta 3 A.



**Figura 9.6.:** Linhas de campo magnético de dois fios com correntes paralelas, para fora do papel.

### 9.3. Lei de Ampère

O integral de linha do campo elétrico, ao longo de qualquer percurso fechado  $C$ , é igual a zero como demonstrámos no Capítulo 4. Isto é consequência de o campo elétrico ser conservativo.

O campo magnético não é conservativo, já que existem linhas de campo magnético fechadas, ao longo das quais o integral do campo não é zero. Por exemplo, no caso do campo produzido por um fio retilíneo, se a curva fechada for um círculo  $C$  com centro no fio e perpendicular a ele, o campo magnético será tangente a  $C$  e estará dirigido sempre no mesmo sentido, de maneira que o integral de linha do campo magnético não será nulo:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = B \oint_C ds = 2\pi r B . \quad (9.9)$$

Em geral, o valor do integral de linha do campo, ao longo de uma curva fechada é proporcional à corrente que passa através da curva, como demonstraremos a seguir. Consideremos qualquer percurso fechado  $C$  em torno do fio. Em coordenadas cilíndricas, com o eixo  $z$  sobre o fio (Figura 9.7), o deslocamento diferencial é

$$d\vec{r} = dR \hat{R} + R d\theta \hat{\theta} + dz \hat{k} . \quad (9.10)$$

O campo magnético do fio é dado pela Equação (9.4), com  $\vec{I} \times \hat{R} = I \hat{\theta}$ , e o integral de linha do campo é

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = 2k_m I \oint_C d\theta . \quad (9.11)$$

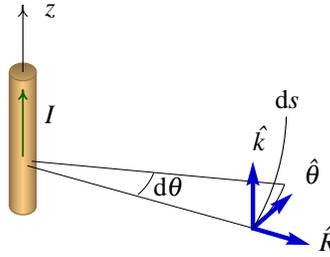


Figura 9.7.: Deslocamento diferencial em coordenadas cilíndricas.

Para o percurso fechado C, se o fio estiver dentro de C, o integral de  $d\theta$  será igual a  $2\pi$ ; mas, se o fio estiver por fora da curva C, o ângulo  $\theta$  aumenta num certo valor e logo diminui na mesma quantidade, dando um resultado total igual a zero. Logo, para um fio muito comprido e qualquer percurso fechado:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \begin{cases} 4\pi k_m I, & \text{fio dentro de C} \\ 0, & \text{fio fora de C.} \end{cases} \tag{9.12}$$

No resultado anterior a curva C não tem que ser plana nem perpendicular ao fio. O importante é que seja fechada, dando uma volta em torno do fio<sup>1</sup>. É de salientar também que a curva foi percorrida no mesmo sentido do campo, ou seja, no sentido positivo definido pela corrente I; se a curva fosse percorrida no sentido oposto ao sentido definido por I segundo a regra da mão direita, o campo estaria na direção oposta ao versor transversal  $\hat{\theta}$  e o resultado anterior teria um sinal negativo.

Quando existem vários fios com correntes, os fios que não passam através da curva C não contribuem para o valor do integral de linha do campo, enquanto que cada fio com corrente  $I_n$  que passa através de C aumenta o valor do integral em  $\pm 4\pi k_m I_n$ , dependendo do sentido da corrente. Este resultado é designado por **lei de Ampère**: o integral de linha do campo magnético, ao longo de uma curva fechada C, é igual a  $4\pi k_m$  vezes a corrente total  $I_C$  através da curva C, considerada como positiva segundo o sentido da regra da mão direita:

$$\boxed{\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = 4\pi k_m I_C}, \tag{9.13}$$

O lado direito também costuma ser escrito como  $\mu_0 I_C$ , onde a constante  $\mu_0$ , igual a  $4\pi k_m$ , é a **permeabilidade magnética** do vazio.

Como veremos no próximo capítulo, a lei de Ampère é realmente válida apenas na ausência de campos elétricos variáveis. Neste capítulo consideraremos unicamente campos eletrostáticos nos quais a lei é válida.

<sup>1</sup>Se a curva C dá  $n$  voltas ao fio antes de regressar ao ponto inicial, vê-se facilmente que o resultado do integral de linha de  $\vec{B}$  será  $4n\pi k_m I$ .

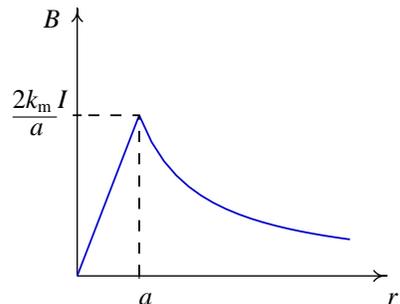
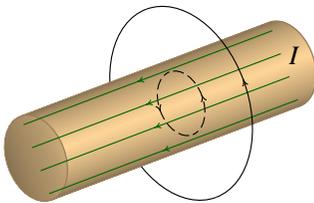
A lei de Ampère pode usar-se para calcular o campo magnético em sistemas simples com alguma simetria, de forma semelhante à da lei de Gauss no caso do campo elétrico. Para que a lei de Ampère seja útil para calcular o campo, é necessário que existam curvas fechadas onde o campo seja tangente e de módulo constante, como veremos no exemplo a seguir.

### Exemplo 9.3

Calcule o campo magnético produzido por um fio cilíndrico, de raio  $a$ , com corrente  $I$  distribuída uniformemente dentro do fio.

Por simetria, o campo magnético deve ser tangente aos círculos concêntricos e perpendiculares ao fio (Figura 9.8). Ao longo de um desses círculos, de raio  $r$ , o integral de linha do campo é

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = B \int ds = 2\pi r B .$$



**Figura 9.8.:** Linhas de campo magnético de um cilindro de raio  $a$  com distribuição uniforme de corrente e gráfico de  $B$  em função de  $r$ .

Usando a lei de Ampère, obtemos

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = 4\pi k_m I_C .$$

Comparando as duas equações concluímos que:

$$B = \frac{2k_m I_C}{r} .$$

Se o raio do círculo  $C$  for maior que o raio do cilindro, a corrente através de  $C$  será exactamente igual a  $I$ . Mas no caso de um círculo com raio  $r < a$  a corrente  $I_C$

deverá ser calculada como o produto entre a densidade de corrente  $J = I/\pi a^2$  e a área do círculo  $C$ ,  $A = \pi r^2$ . Obtemos assim:

$$I_C = \begin{cases} I, & r \geq a \\ \frac{r^2}{a^2} I, & r < a, \end{cases}$$

e, por conseguinte, o campo será

$$B = \begin{cases} \frac{2k_m I}{r} & r \geq a \\ \frac{2k_m I}{a^2} r & r < a \end{cases}$$

A Figura 9.8 mostra o gráfico do módulo do campo magnético, em função da distância ao eixo do cilindro,  $r$ . No interior do cilindro, o campo aumenta linearmente em função de  $r$ , até um valor máximo  $2k_m I/a$ ; fora do cilindro, o campo diminui inversamente proporcional a  $r$  e o resultado é o mesmo que obtivemos para um fio ideal (raio nulo), usando a lei de Biot-Savart.

## 9.4. Linhas de campo magnético

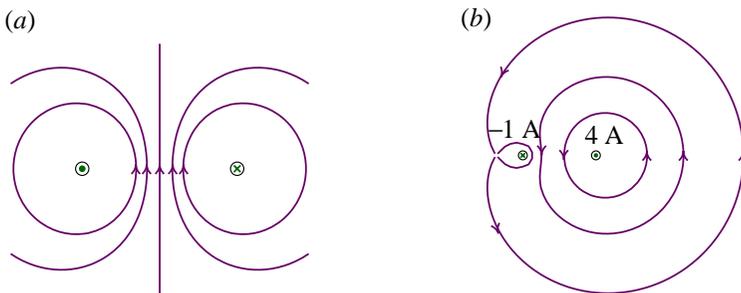
As linhas de campo magnético verificam as seguintes propriedades:

- As linhas são sempre contínuas e fechadas;
- As linhas de campo magnética não podem convergir ou divergir num ponto, isto é, não existem **monopólos magnéticos** (pólos magnéticos isolados);
- Em pontos onde o campo magnético é diferente de zero, as linhas de campo magnético não se podem cruzar. Num ponto onde  $\vec{B} = 0$ , existem linhas a entrarem e a saírem do ponto; o número de linhas que entra é igual ao número de linhas que sai.

Quando as linhas de campo magnético são planas, assemelham-se às curvas equipotenciais num plano. As linhas de dois fios retilíneos e paralelos são perpendiculares aos fios e encontram-se sobre planos perpendiculares aos dois fios. Perto de cada fio, as linhas são aproximadamente círculos na direção definida pela regra da mão direita. O caso em que as correntes têm o mesmo sentido já foi ilustrado na Figura 9.6: as linhas perto de cada fio são aproximadamente círculos. Entre os dois fios os círculos correspondentes aos dois fios têm sentidos opostos; isto implica uma mudança no sentido do campo e, necessariamente, a existência de um ponto intermédio onde o campo seja nulo (P na figura). Nesse ponto, entram e saem duas linhas de campo magnético.

Quando as correntes têm sentidos opostos, entre os dois fios, os círculos correspondentes às linhas de campo magnético dos dois fios apontam na mesma direção;

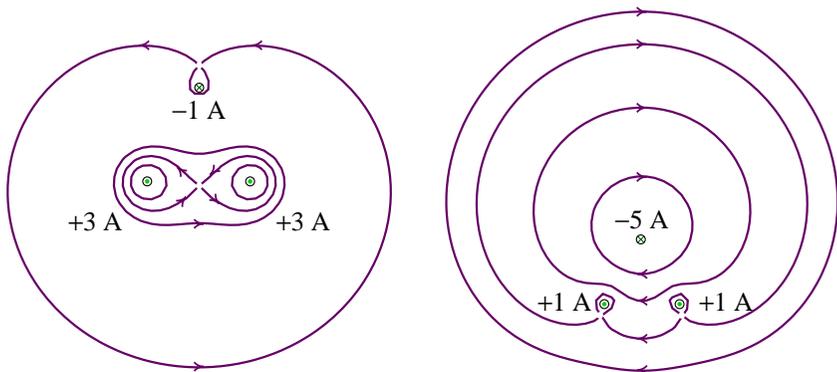
se os valores das correntes forem os mesmos, o desenho das linhas deverá ser simétrico, como se mostra na Figura 9.9a.



**Figura 9.9.:** Campo magnético de dois fios com correntes opostas. No caso (a) as correntes têm a mesma intensidade.

Quando uma das correntes é maior, a corrente total será diferente de zero. Isto implica que, visto de longe, o sistema assemelha-se a um único fio com corrente  $I_1 - I_2$ , no sentido da corrente maior. Consequentemente, longe dos fios as linhas de campo magnético são círculos orientados no sentido definido pela corrente maior; estes círculos têm sentido oposto aos círculos na proximidade do fio com a menor corrente e, portanto, existe um ponto de campo nulo por fora do segmento entre as duas correntes e mais perto da corrente menor (Figura 9.9b).

No caso de três fios paralelos podem existir um ou dois pontos de campo nulo, consoante os valores das correntes e as distâncias entre os fios. A Figura 9.10 mostra dois exemplos nos quais existem dois pontos de campo nulo.



**Figura 9.10.:** Campos magnéticos de três fios retilíneos e paralelos com corrente. O sinal positivo indica corrente para fora do papel.

As linhas de campo de um sistema de fios retilíneos são idênticas às curvas equipotenciais de um sistema de fios infinitos com carga linear uniforme. Os campos das Figuras 9.6, 9.9 e 9.10 são semelhantes às curvas equipotenciais dos sistemas de fios paralelos com cargas lineares  $(\lambda, \lambda)$ ,  $(\lambda, -\lambda)$  e  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ , respectivamente, sobre um plano perpendicular aos fios. No entanto, as linhas de indução são verdadeiras curvas, orientadas num sentido, enquanto que as equipotenciais são realmente superfícies fechadas.

## 9.5. Bobinas

Um solenóide é um fio metálico enrolado em hélice (Figura 9.11). Nas bobinas, o fio é enrolado de forma mais compacta, de forma que todas as voltas do fio podem ser consideradas como espiras planas, todas com a mesma área. A corrente  $I$  também é igual em todas essas espiras.

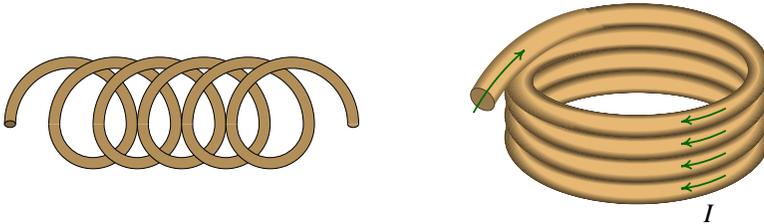


Figura 9.11.: Solenóide e bobina.

No interior de uma espira (Figura 9.12), os campos magnéticos produzidos pelas diferentes parte da espira reforçam-se, enquanto que por fora dela o campo produzido por um segmento é contrariado pelo campo do segmento no lado oposto. As linhas

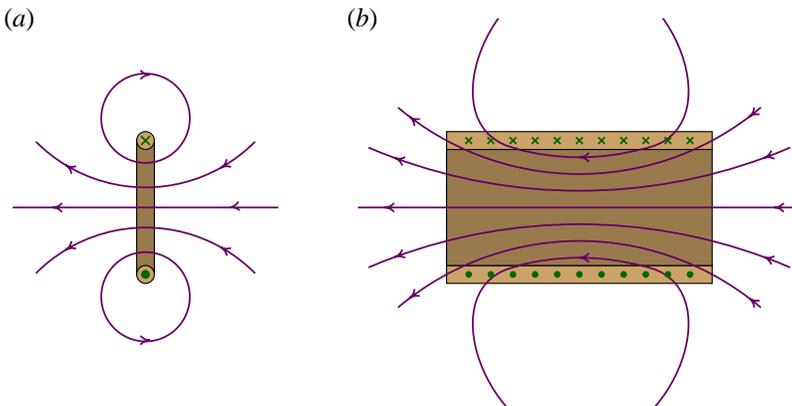
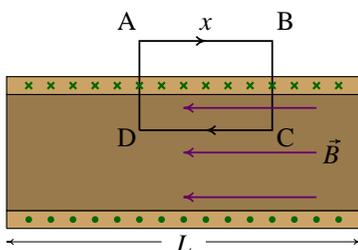


Figura 9.12.: Campo magnético de uma espira (a) e de uma bobina (b).

de campo magnético de uma espira, no plano que corta a espira perpendicularmente ao meio, são semelhantes às equipotenciais de um dipolo elétrico, no plano desse dipolo.

Num plano que passa pelo eixo de uma bobina reta, as linhas das espiras são semelhantes às equipotenciais de muitos dipolos, em que as cargas positivas estão aglomeradas numa segmento de reta paralelo ao eixo da bobina e as cargas negativas estão em outro segmento de reta paralelo, no lado oposto do eixo. Ou seja, as linhas de campo magnético são semelhantes as curvas equipotenciais de um condensador plano, no plano que corta as armaduras perpendicularmente ao meio.

Como tal, as linhas de campo magnético no interior de uma bobina reta são aproximadamente retas paralelas (campo magnético uniforme), sendo possível aplicar a lei de Ampère para calcular o módulo do campo (Figura 9.13).



**Figura 9.13.:** Percurso usado para calcular o campo no interior de uma bobina reta, usando a lei de Ampère.

O integral de linha do campo  $\vec{B}$  ao longo dos lados BC e DA é nulo, pois o campo é perpendicular aos lados; no lado AB, podemos assumir  $\vec{B} \approx 0$ , já que as linhas de campo magnético estão muito afastadas. Assim sendo, o integral de linha do campo ao longo do retângulo ABCD é:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = Bx . \quad (9.14)$$

A lei de Ampère conduz então a

$$Bx = \mu_0 I_C , \quad (9.15)$$

onde  $I_C$  é a corrente total em todas as espiras no interior do retângulo ABCD. Se o número total de espiras na bobina for  $N$  e o seu comprimento  $L$ , admitindo que as espiras estão espaçadas uniformemente, o número de espiras que atravessa o retângulo é igual a  $Nx/L$  e  $I_C = NxI/L$ . Ou seja, o módulo do campo magnético é

$$B = \mu_0 n I , \quad (9.16)$$

onde  $n = N/L$  é o número de espiras por unidade de comprimento. Lembre-se que este resultado é uma aproximação, que será melhor no centro do bobina. O campo produzido por uma bobina reta é semelhante ao campo magnético de um íman com a mesma forma da bobina. As bobinas usam-se para construir eletroímãs, com um material ferromagnético no centro, para aumentar o campo (num material ferromagnético, na equação 9.16 deve substituir-se  $\mu_0$  pela permeabilidade magnética do material, que é superior a  $\mu_0$ ). São também usados como indutores nos circuitos elétricos, como será explicado no próximo capítulo.

## 9.6. Equações fundamentais da magnetostática

A lei de Ampère (9.13) pode também ser escrita de forma diferencial; usando o teorema de Stokes (4.30), podemos substituir o integral de linha por um integral de superfície:

$$\iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot d\vec{A} = \mu_0 I_C, \quad (9.17)$$

onde  $S$  é uma superfície com fronteira em  $C$ . A corrente  $I_C$  é a corrente através da curva  $C$ , a qual pode ser calculada integrando a densidade de corrente  $\vec{J}$  sobre a superfície  $S$ ; assim, a equação anterior pode ser escrita na seguinte forma:

$$\iint_S [\vec{\nabla} \times \vec{B} - \mu_0 \vec{J}] \cdot d\vec{A} = 0. \quad (9.18)$$

Para que esta equação seja válida em qualquer superfície  $S$ , orientada em qualquer direção, será necessário que o termo dentro do integral seja nulo:

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}}. \quad (9.19)$$

Esta é a forma diferencial da lei de Ampère e constitui uma das equações fundamentais da magnetostática, relacionando o campo magnético em qualquer ponto, com a densidade de corrente. Como vimos no caso da eletrostática, o rotacional não é suficiente para definir um campo vetorial; é preciso também conhecer a sua divergência.

Não existem nunca pontos onde começam ou terminam linhas de campo magnético em todas as direções. Isso implica que nas superfícies fechadas o fluxo magnético que entra por uma secção da superfície é igual ao que sai pelo resto da superfície. Assim, o fluxo magnético através de qualquer superfície fechada é sempre nulo:

$$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0. \quad (9.20)$$

Aplicando o teorema da divergência, conclui-se que, em qualquer ponto, a divergência do campo magnético  $\vec{B}$  é nula:

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0}. \quad (9.21)$$

As Equações (9.19) e (9.21) definem o campo  $\vec{B}$  em qualquer ponto dentro de uma região onde são conhecidas algumas condições fronteira.

## 9.7. Campo magnético dentro da matéria

As partículas elementares, e em particular os elétrons, têm um momento magnético intrínseco próprio de cada tipo de partícula, chamado *spin*; os elétrons num átomo têm também um momento magnético orbital, devido ao seu movimento no átomo. Os prótons e neutrões no núcleo também têm *spin*, mas o momento magnético deles é muito menor do que o momento dos elétrons. Uma partícula com momento magnético comporta-se como um pequeno ímã orientado na direção do momento.

Dentro de um campo magnético externo, os momentos magnéticos dos átomos ou moléculas tendem a alinhar-se na direção do campo. No entanto, o campo também induz correntes, na direção que produz um campo induzido oposto ao campo externo. Existem, assim, dois efeitos opostos: o alinhamento dos momentos atômicos ou moleculares na direção do campo determina uma força atractiva na direção da fonte externa do campo; por outro lado, os momentos induzidos são opostos ao campo externo, e determinam uma força repulsiva. Dependendo do valor dos momentos intrínsecos do material e do módulo do campo, um ou outro efeito pode dominar.

Os elétrons têm uma tendência para se agruparem em pares com *spins* orientados em direções opostas. Cada par tem um momento magnético nulo; consequentemente, a maior parte dos átomos com número par de elétrons têm um *spin* total nulo e só apresentam o primeiro tipo de resposta ao campo magnético: campo magnético induzido, oposto ao campo externo que conduz a uma repulsão num campo externo. Este tipo de comportamento é chamado **diamagnetismo**; os materiais diamagnéticos identificam-se por serem ligeiramente repelidos por campos magnéticos fortes, já que o campo induzido costuma ser muito fraco. A maior parte das substâncias são diamagnéticas como por exemplo a água, o vidro, os plásticos e muitos compostos orgânicos.

Alguns elementos como o alumínio, o sódio, o oxigénio e a platina, possuem um momento magnético intrínseco. Um campo magnético produz os dois fenómenos de momentos magnéticos induzidos e alinhamento dos momentos magnéticos intrínsecos na direção do campo externo. Como o efeito diamagnético é bastante fraco, o efeito dominante é o alinhamento dos momentos magnéticos na direção do campo externo, e uma força magnética atractiva: **paramagnetismo**.

O alinhamento dos momentos magnéticos nos materiais paramagnéticos não é um efeito forte, pois é contrariado pelas vibrações térmicas dos átomos. Alguns materiais chamados **ferromagnéticos** apresentam momentos magnéticos muito mais elevados que podem ser alinhados de uma forma mais eficaz, dando origem a campos intrínsecos elevados que persistem mesmo depois de desaparecer o campo

externo; os ímãs naturais são constituídos por este tipo de materiais. Nos materiais ferromagnéticos, os átomos estão distribuídos numa forma que favorece o seu agrupamento em **domínios** magnéticos: pequenas regiões microscópicas formadas por vários átomos com momentos magnéticos na mesma direção. Os momentos magnéticos dos domínios magnéticos são muito maiores que os momentos atômicos e são assim menos susceptíveis de serem alterados pelas vibrações térmicas. Contudo, existe uma temperatura elevada, conhecida como **temperatura de Curie**, acima da qual o alinhamento dos domínios magnéticos é destruído, por exemplo, a temperatura de Curie do ferro é 770 °C, que é mais baixa do que a sua temperatura de fusão. As vibrações mecânicas fortes podem também conduzir à rutura dos domínios magnéticos.

No caso do diamagnetismo e do paramagnetismo o campo induzido  $\vec{B}_i$  é sempre diretamente proporcional ao campo externo  $\vec{B}_0$ :

$$\vec{B}_i = \chi_m \vec{B}_0 . \quad (9.22)$$

A constante de proporcionalidade,  $\chi_m$ , é a **susceptibilidade magnética** do material, que pode ser positiva (paramagnetismo) ou negativa (diamagnetismo). O campo total é:

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_i = (1 + \chi_m) \vec{B}_0 . \quad (9.23)$$

O campo magnético **livre**,  $\vec{B}_0$ , é o campo produzido apenas pelas correntes livres,  $I_0$ , sem incluir as correntes induzidas nos átomos. A partir da lei de Ampère temos:

$$\oint_C \vec{B}_0 \cdot d\vec{r} = \mu_0 I_0 , \quad (9.24)$$

e usando a Equação (9.23), obtemos a lei de Ampère para o campo total dentro do material:

$$\oint_C \frac{\vec{B} \cdot d\vec{r}}{1 + \chi_m} = \mu_0 I_0 . \quad (9.25)$$

A **permeabilidade magnética**<sup>2</sup>,  $\mu$ , do material define-se como

$$\mu = \mu_0 (1 + \chi_m) . \quad (9.26)$$

O **campo magnético**  $\vec{H}$  é definido como o campo de indução magnética, dividido pela permeabilidade:

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \vec{B} . \quad (9.27)$$

A lei de Ampère nos meios diamagnéticos ou paramagnéticos é

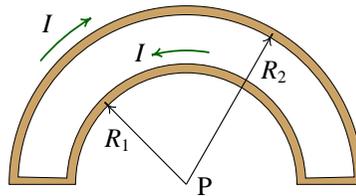
$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{r} = I_0 . \quad (9.28)$$

<sup>2</sup>A constante  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$  T · m/A é a permeabilidade magnética do vazio, onde  $\chi_m = 0$ .

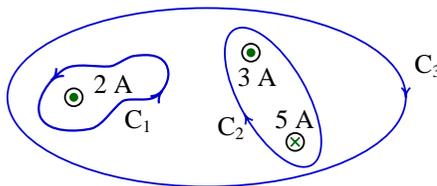
Obviamente, a lei de Ampère na sua forma original continua a ser válida para  $\vec{B}$  em função da corrente total  $I_0 + I_i$ . Do ponto de vista prático tem que se calcular primeiro o campo  $\vec{H}$  e, em função dele, calcular a corrente induzida  $I_i$ .

## Problemas

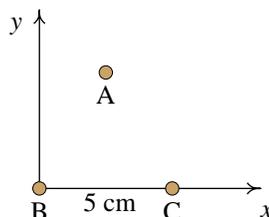
1. Considere o fio representado na figura e calcule o campo magnético no ponto P, o centro comum aos dois arcos semicirculares.



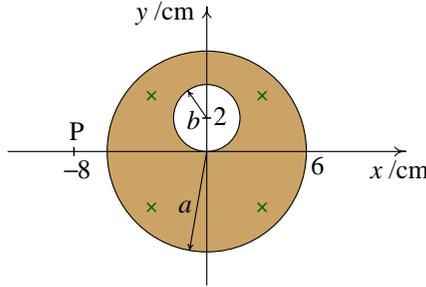
2. Três fios paralelos têm correntes de 5 A, 3 A e 2 A como se mostra na figura. Calcule  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{r}$  ao longo das três curvas  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$ .



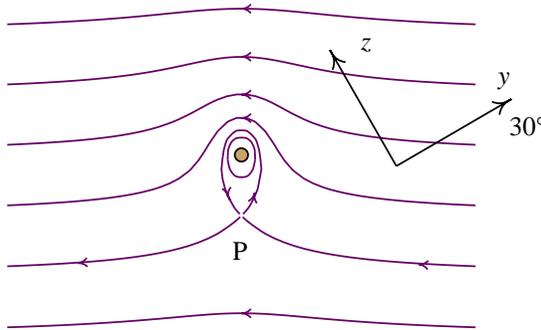
3. Três fios retilíneos, compridos e paralelos, estão dispostos de tal modo que os seus eixos formam um triângulo equilátero de 5 cm de lado.
  - (a) Os fios são atravessados por uma corrente trifásica; num dado momento as correntes nos fios são:  $\vec{I}_A = \vec{I}_C = -10 \hat{k}$  A e  $\vec{I}_B = 20 \hat{k}$  A. Calcule as forças, por unidade de comprimento, sobre os fios A e C.
  - (b) Considerando que no momento seguinte as correntes nos três fios variam de forma sinusoidal segundo as equações:
 
$$\vec{I}_A = I_0 \cos(\omega t - 2\pi/3) \hat{k} \quad \vec{I}_B = I_0 \cos \omega t \hat{k} \quad \vec{I}_C = I_0 \cos(\omega t + 2\pi/3) \hat{k}$$
 com  $I_0 = 20$  A e  $\omega = 200\pi$  s<sup>-1</sup>, calcule a força, por unidade de comprimento, sobre o fio A.



4. A figura representa o corte transversal de um sólido cilíndrico, muito comprido, de raio  $a = 6$  cm e com uma cavidade cilíndrica de raio  $b = 2$  cm. No cilindro flui uma corrente de densidade uniforme,  $J = 127$  A/m<sup>2</sup>, dirigida para dentro da folha de papel. Calcule o campo magnético no ponto P na posição  $-8\hat{i}$  (cm), usando a lei de Ampère e o princípio de sobreposição.

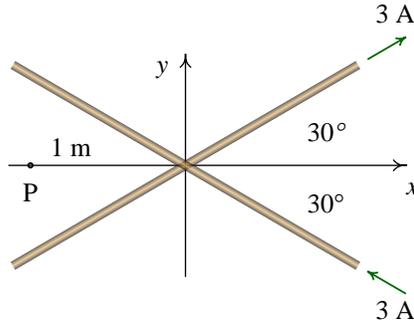


5. A figura mostra as linhas de campo magnético de um fio com corrente, dentro de um campo magnético uniforme  $\vec{B}_{ext}$ ; o fio é perpendicular à folha e os eixos  $y$  e  $z$  foram escolhidos sobre o plano da folha.
- Escreva o versor na direção do campo externo, usando o sistema de eixos dado.
  - Escreva o vetor unitário na direção da corrente no fio.
  - Calcule e represente o vetor unitário na direção da força sobre o fio.
  - Considerando que  $I = 0,5$  A e se a força sobre o fio, por unidade de comprimento, for de  $2 \times 10^{-5}$  N/m, calcule a distância até ao ponto P.

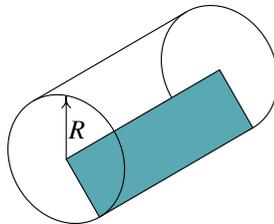


6. Considere dois fios de cobre, retilíneos e paralelos, de 60 cm de comprimento, distanciados de 9 cm e com raios de 2 mm e 3 mm. Calcule o valor da força magnética entre os fios quando cada um deles for ligado a uma f.e.m. de 1,5 V. (Use o valor da resistividade do cobre à temperatura ambiente:  $17$  n $\Omega \cdot$  m.)

7. Os dois fios representados na figura são muito compridos e cada um transporta uma corrente de 3 A. Um dos fios e o ponto P encontram-se sobre o plano  $xy$ , enquanto que o outro fio se encontra num plano paralelo a  $xy$  mas 5 cm acima deste ( $z = 5$ ). Calcule o valor do campo vetorial  $\vec{B}$  no ponto P com coordenadas  $x = -1$  m,  $y = z = 0$ .



8. Um anel supercondutor de 5 cm de raio, transporta uma corrente de 4 A. Calcule o vetor de campo magnético,  $\vec{B}$ , no centro do anel.
9. Um condutor cilíndrico comprido e de raio  $R$ , é percorrido por uma corrente  $I$  de densidade uniforme  $J = I/\pi R^2$ . Calcule o fluxo magnético por unidade de comprimento através da área sombreada na figura.



10. Um fio cilíndrico de cobre, de raio  $a$ , conduz uma corrente  $I$ . A corrente está distribuída de forma não-uniforme, com  $\vec{J}$  diretamente proporcional à distância ao eixo do fio. Calcule o campo de indução magnética  $\vec{B}$  dentro e fora do fio, usando a lei de Ampère. Desenhe o gráfico de  $B$  em função da distância ao eixo do cilindro.
11. Uma espira quadrada com arestas iguais a  $d$  é percorrida por uma corrente  $I$ . Calcule o campo magnético no centro da espira.

## Respostas

1.  $\pi k_m I \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$ , para fora da folha.
2.  $2,5 \mu\text{T}\cdot\text{m}$ ,  $2,5 \mu\text{T}\cdot\text{m}$  e  $0$ .
3. (a)  $\vec{F}_A/l_A = \vec{F}_C/l_C = (0.6\hat{i} + 0.3464\hat{j})$  (mN/m).  
 (b)  $\vec{F}_A/l_A = 0.8\sqrt{3}\cos(\omega t - \pi/3) [\cos(\omega t - \pi/6)\hat{i} - \sin(\omega t - \pi/6)\hat{j}]$  (mN/m).
4.  $(9.39 \times 10^{-8}\hat{i} + 3.22 \times 10^{-6}\hat{j})$  (T).
5. (a)  $-\sqrt{3}/2\hat{j} + 1/2\hat{k}$ .      (c)  $-1/2\hat{j} - \sqrt{3}/2\hat{k}$ .  
 (b)  $\hat{i}$ .      (d)  $2,5$  mm.
6.  $10,25$  N.
7.  $(-59.4\hat{i} - 102.9\hat{j} + 2388.1\hat{k})$  (nT).
8.  $(50,3\hat{k}) \mu\text{T}$ .
9.  $k_m I$ .
10. 
$$\begin{cases} B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, & r > a \\ B = \frac{\mu_c I r^2}{2\pi a^3}, & r < a \end{cases}$$
 onde  $\mu_c$  é a permeabilidade magnética do cobre.
11.  $\frac{8\sqrt{2}k_m I}{d}$ .

## 10. Indução eletromagnética



**Joseph Henry (1797–1878)**

Henry nasceu em Albany, nos Estados Unidos da América. Estudou na Academia de Albany onde acabou por ser contratado como professor de filosofia natural. Durante o Verão, transformando a sala de aulas em laboratório, investigou e descobriu o fenómeno de indução eletromagnética. Os seus trabalhos só foram publicados quando Faraday, do outro lado do oceano e simultaneamente, chegava às mesmas conclusões. Em 1832 foi contratado pela Universidade de Princeton. Foi o diretor da *Smithsonian Institution* em 1846, aquando da sua fundação. Descobriu a auto-indução em circuitos elétricos, trabalhou no envio de sinais elétricos à distância e explicou as bases para a criação de transformadores. Apesar do seu êxito profissional, muitas das suas descobertas passaram despercebidas na época talvez por utilizar uma metodologia qualitativa, recorrendo raramente à matemática nos seus artigos.

Depois de se estabelecer, no ano de 1820, a corrente como fonte de campos magnéticos muitos investigadores tentaram produzir correntes elétricas a partir do campo magnético. A ideia era que se uma corrente elétrica produz um campo magnético, o processo inverso poderia também ser factível. Muitas experiências foram feitas com o objetivo de se medir a diferença de potencial de um fio dentro de um campo magnético, mas em vão. O americano Joseph Henry pensou que o fracasso das experiências podia ser devido ao facto de se usar o campo magnético de um íman e não o campo produzido por outra corrente; Henry realizou a experiência com um eletroímã e encontrou o seguinte e surpreendente resultado: no preciso instante em que o eletroímã era ligado ou desligado da fonte, aparecia uma diferença de potencial no fio; depois de o eletroímã ter sido ligado, o campo magnético permanecia constante e a diferença de potencial no fio desaparecia.

O fenómeno que Henry observou é chamado **indução eletromagnética**. Infelizmente Henry não tinha ainda divulgado os seus resultados, quando, em 1831, Faraday descobriu o mesmo fenómeno publicando os seus resultados num jornal científico. Faraday não era muito inclinado para a matemática, sendo por vezes criticado pela sua falta de rigor matemático, mas o seu sentido prático permitiu-lhe conceber uma interpretação da força eletromagnética fora dos moldes da mecânica newtoniana e que seria desenvolvida com maior rigor por William Thomson, Stokes e Maxwell. Faraday interpretava a interação eletromagnética em função de linhas de campo magnético e considerava a indução eletromagnética como o resultado da perturbação destas linhas.

## 10.1. Lei de Faraday

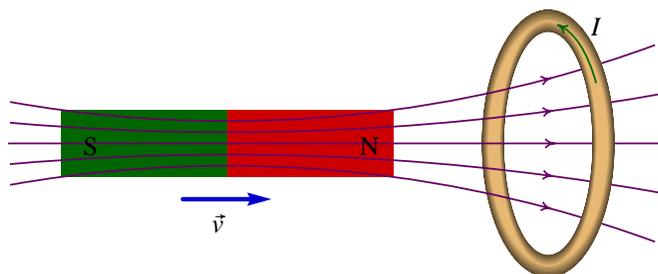
Um íman em movimento, perto de uma espira metálica, produz uma corrente induzida ao longo da espira, como se esta tivesse sido ligada a uma f.e.m. Outro caso onde aparece indução eletromagnética é num circuito que se encontra perto de um eletroímã com corrente variável e, portanto, campo magnético variável. Em geral, sempre que varia o fluxo magnético, através da superfície delimitada por um circuito, aparece uma f.e.m. induzida no circuito. O valor da f.e.m. induzida é dado pela **lei de Faraday**:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}, \quad (10.1)$$

onde  $\Phi$  é o fluxo do campo magnético, através do circuito. O sinal negativo é simplesmente para indicar que a força eletromotriz induzida é sempre oposta à variação de  $\Phi$ , e pode ser omitido já que, de qualquer forma, para determinar o sentido da f.e.m. induzida será necessário usar a chamada **lei de Lenz**: a força eletromotriz e a corrente induzidas, têm a direção correspondente a um campo induzido  $\vec{B}$  que produz um fluxo oposto à variação do fluxo externo. Dito por outras palavras, se, por exemplo, o fluxo magnético externo diminui, deverá aparecer um fluxo induzido na mesma direção do fluxo externo; a direção do fluxo induzido é a

direção do campo magnético induzido no circuito; usando a regra da mão direita, determina-se a direção da corrente induzida e com ela a sentido da f.e.m. induzida. Se o fluxo externo aumenta, o fluxo e o campo induzidos serão opostos ao campo e fluxo externos.

Ilustraremos esta lei por meio de um exemplo: um ímã é deslocado na direção de uma espira metálica, como se mostra na Figura 10.1. Como o pólo que está mais perto da bobina é o pólo norte, o fluxo externo na bobina aponta para a direita; à medida que o ímã se aproxima da espira, o fluxo aumenta, já que um maior número de linhas de campo atravessa a espira.



**Figura 10.1.:** Um ímã a aproximar-se de uma espira induz corrente nela.

Segundo a lei de Lenz, o fluxo induzido será neste caso oposto ao fluxo externo, ou seja, para a esquerda; o campo magnético induzido aponta para a esquerda, dentro da espira, e colocando o dedo polegar direito na direção do campo induzido, vemos que a corrente induzida segue a direção indicada na Figura 10.1. Para calcular a intensidade da corrente induzida, será preciso calcular a derivada do fluxo magnético (f.e.m. induzida) e dividir pela resistência da espira.

É de salientar que o campo externo sobre a espira começa a enfraquecer quando o pólo norte já está perto da espira, mas o número de linhas de campo que a atravessa (e portanto o fluxo magnético) continua a aumentar até ao instante em que metade do ímã atravessa a espira; nesse instante, o fluxo começa a diminuir e a corrente induzida muda de sentido. Neste caso, o fluxo do ímã é sempre para a direita, mas o que determina o sentido da corrente induzida não é a sua direção, mas sim o seu aumento ou diminuição.

#### Exemplo 10.1

Uma espira metálica com  $0,25 \text{ m}^2$  de área, perpendicular a um campo magnético uniforme de  $0,40 \text{ T}$ , é retirada do campo durante um intervalo de tempo de  $200 \text{ ms}$ . Calcule a f.e.m. induzida média.

O fluxo magnético inicial através da espira é

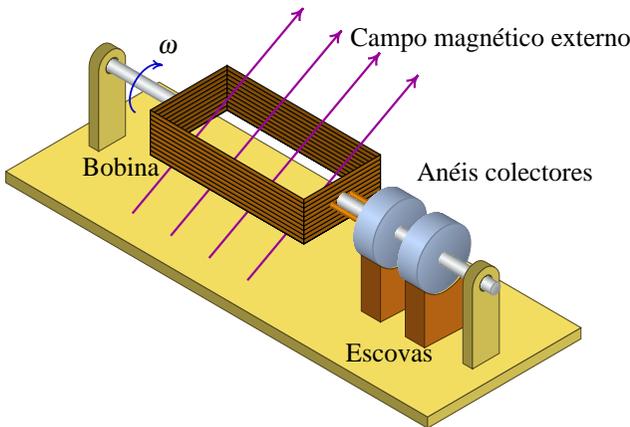
$$\Phi_0 = 0.40 \cdot 0.25 \text{ T} \cdot \text{m} = 0.10 \text{ T} \cdot \text{m} .$$

O fluxo final é zero; calculando o valor médio da derivada obtemos a f.e.m. induzida média:

$$\varepsilon_m = \frac{\Phi_0 - \Phi_f}{\Delta t} = \frac{0.10}{0.200} \frac{\text{T} \cdot \text{m}}{\text{s}} = 0.50 \text{ V} .$$

## 10.2. Gerador de corrente alternada

O princípio de indução eletromagnética é aproveitado para gerar corrente alternada. Neste caso, o campo magnético é constante, mas a superfície do circuito roda, o que faz com que o fluxo magnético seja variável.



**Figura 10.2.:** Gerador de corrente alternada.

Um gerador de corrente alternada é formado por uma bobina que roda em torno de um eixo, dentro de um campo magnético constante (Figura 10.2). Por simplicidade, assumiremos um campo uniforme. Os dois terminais da bobina estão soldados a dois anéis coletores que estão em contacto com duas escovas, de forma a que a corrente induzida na bobina possa ser aproveitada num circuito externo ligado às escovas. O fluxo magnético através de cada espira da bobina é

$$\Phi = A(\vec{B} \cdot \hat{n}), \quad (10.2)$$

onde  $A$  é a área da bobina e  $\hat{n}$  o seu versor normal. Se o ângulo entre o versor  $\hat{n}$  e o campo  $\vec{B}$  for  $\theta$ , o fluxo através da bobina será

$$\Phi = BA \cos \theta . \quad (10.3)$$

A bobina roda com velocidade angular constante,  $\omega$ ; portanto, o ângulo  $\theta$  aumenta  $\omega t$  durante o tempo  $t$  e o fluxo em função do tempo é

$$\Phi = BA \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (10.4)$$

onde a fase inicial  $\varphi_0$  é o ângulo em  $t = 0$ , medido em radianos.

A f.e.m. induzida em cada uma das espiras obtém-se a partir da lei de Faraday (10.1). A diferença de potencial entre as escovas é igual à soma de todas as f.e.m. induzidas nas  $N$  espiras da bobina<sup>1</sup>:

$$\begin{aligned} V &= N \frac{d\Phi}{dt} = NBA\omega \sin(\omega t + \varphi_0), \\ V &= V_0 \sin(\omega t + \varphi_0). \end{aligned} \quad (10.5)$$

A diferença de potencial produzida pelo gerador de corrente alternada varia sinusoidalmente com a amplitude  $V_0 = NBA\omega$ . A frequência da tensão elétrica é a mesma frequência de rotação da bobina, e a tensão é máxima quando a bobina se encontra perpendicular ao campo magnético.

### 10.3. Indução em condutores em movimento

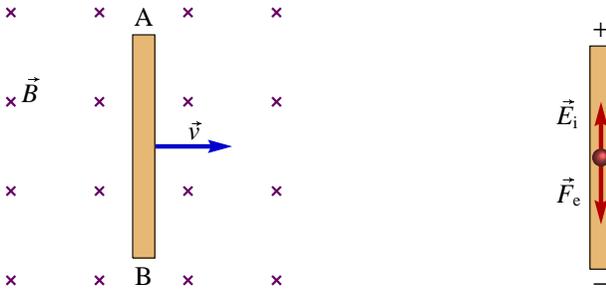
Na secção anterior vimos alguns exemplos de circuitos fechados nos quais aparecem correntes induzidas devidas à alteração do fluxo magnético no interior do circuito. Uma diferença de potencial induzida aparece também nos condutores em movimento dentro de um campo magnético, sem ser necessária a existência de um circuito. Neste caso, não existe fluxo magnético variável através do condutor e a diferença de potencial induzida não pode ser calculada derivando o fluxo magnético, mas é fácil identificar a origem da indução eletromagnética: a acumulação de cargas nos extremos, devido à força magnética sobre as cargas de condução. Veremos, numa secção posterior, que no caso de um circuito em repouso com fluxo magnético variável existem também forças sobre os eletrões de condução.

Consideremos uma barra condutora de comprimento  $L$  que se desloca com velocidade uniforme, perpendicular a um campo magnético constante  $\vec{B}$ , como se mostra na Figura 10.3. Os eletrões de condução dentro da barra deslocam-se todos para a direita, com velocidade  $\vec{v}$  e, portanto, sobre eles actua uma força magnética

$$F_m = evB. \quad (10.6)$$

Esta força induz acumulação de cargas positivas e cargas negativas nos pontos A e B, respetivamente. As cargas acumuladas nos extremos produzem um campo

<sup>1</sup> Outra forma usual de obter o mesmo resultado consiste em considerar a área da bobina não como  $A$  mas  $NA$  já que cada espira envolve uma área  $A$ ; o fluxo total através da bobina seria o fluxo através da área  $NA$  e a sua derivada daria diretamente o valor da f.e.m. total induzida.



**Figura 10.3.:** Condutor em movimento dentro de um campo magnética. À direita, campo induzido e força elétrica num elétron de condução.

elétrico  $E_i$  dentro da barra, que actua sobre os eletrões com uma força elétrica  $F_e$  oposta à força magnética. No estado de equilíbrio, a força eletrostática  $F_e = eE_i$  é igual e oposta à força magnética; o campo induzido será assim igual a  $vB$ . Como a velocidade e o campo magnético são iguais em qualquer ponto da barra, o campo elétrico induzido será uniforme, e a diferença de potencial induzida entre os extremos do condutor será

$$V_A - V_B = vBL . \quad (10.7)$$

O método usado para calcular a f.e.m. induzida na barra em movimento, podia também ter sido usado na secção anterior para calcular a tensão de um gerador de corrente alternada (Figura 10.2). Cada espira na bobina é formada por quatro segmentos, indicados com os números 1, 2, 3 e 4 na Figura 10.4. Em cada segmento, o campo elétrico induzido será igual e oposto à força magnética sobre os eletrões, dividida pela carga do elétron:

$$\vec{E}_i = -\vec{v} \times \vec{B} , \quad (10.8)$$

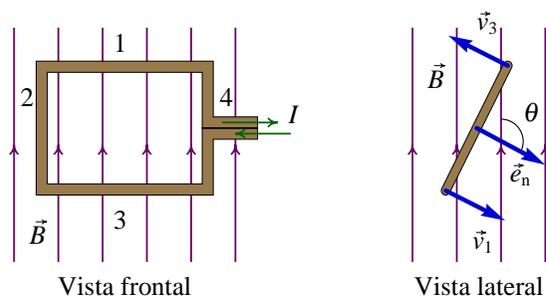
e a diferença de potencial no segmento é

$$\Delta V = \int (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{r} . \quad (10.9)$$

Quando a espira roda com velocidade angular  $\omega$ , as velocidades dos segmentos 1 e 3 são  $\omega y/2$ , em que  $y$  é o comprimento dos segmentos 2 e 4. Ao longo dos segmentos 2 e 4 o campo induzido é perpendicular a  $d\vec{r}$  e, portanto, não existe diferença de potencial<sup>2</sup>. O ângulo entre a velocidade e o campo é  $\theta$ , no caso do segmento 3, e  $180^\circ - \theta$  para o segmento 1. A diferença de potencial na espira é

$$\Delta V = \int_1 \frac{\omega y}{2} B \sin \theta ds + \int_3 \frac{\omega y}{2} B \sin \theta ds . \quad (10.10)$$

<sup>2</sup>Existe uma pequena diferença de potencial ao longo da secção transversal, devido ao efeito Hall (Problema 7 do Capítulo 8), mas esta não produz corrente ao longo da bobina.



**Figura 10.4.:** Espira a rodar dentro de um campo magnético uniforme.

Resolvendo a equação e considerando que a área da espira é  $A = xy$ , obtemos

$$\Delta V = AB\omega \sin \theta . \quad (10.11)$$

Multiplicando pelo número total de espiras,  $N$ , obtém-se a Equação (10.5). Visto desta forma, a causa da tensão nos terminais do gerador é a força magnética que actua sobre o gás de eletrões na bobina; se a variação do fluxo magnético e a força magnética sobre os eletrões livres num condutor em movimento fossem fenómenos independentes, devíamos somar os dois efeitos para obter a força eletromotriz induzida. Mas não é assim e, como veremos mais à frente, estamos perante duas interpretações de um mesmo fenómeno.

Considerando condutores em movimento, como temos feito nos exemplos desta secção, podemos pensar que a lei de Faraday não introduz nada de novo e a expressão da força magnética introduzida no Capítulo 8 é suficiente para explicar o fenómeno da indução eletromagnética. No entanto, a situação é mais complicada já que existe também indução eletromagnética mesmo quando não existe movimento. Um exemplo é a experiência de Henry, na qual uma corrente induzida aparece num circuito no instante em que um eletroímã é ligado ou desligado de uma fonte; neste caso, não existe movimento relativo entre o circuito e o ímã.

Outro resultado experimental importante é o facto de a diferença de potencial induzida num condutor em movimento perto de um ímã ser exactamente a mesma no caso em que o ímã está em repouso e o condutor em movimento, ou no caso oposto, em que o circuito está em repouso e o ímã se desloca produzindo a mesma velocidade relativa. No primeiro caso existe força magnética sobre os eletrões no circuito, enquanto que no segundo caso o circuito está em repouso e não existe força magnética.

Faraday conseguiu explicar todos estes casos de indução eletromagnética por meio de um só princípio, introduzindo o conceito de linhas de campo magnético. Segundo Faraday, a origem da indução deve-se ao facto de o condutor “cortar” as linhas de campo magnético; e a diferença de potencial induzida é proporcional

ao número de linhas cortadas, por unidade de tempo. O condutor em movimento “varre” uma área  $vL$  por unidade de tempo, e o “número de linhas” cortadas é o número de linhas nessa área, que é proporcional ao fluxo magnético através dela,  $BvL$ .

Quando o condutor está em repouso e o campo magnético é deslocado com velocidade  $-\vec{v}$ , o mesmo número de linhas é cortado, dando origem à mesma f.e.m. induzida. No caso do eletroímã, no momento em que é ligado à fonte, linhas de campo magnético cortam o circuito entrando na sua área interna. Em todos estes casos existe sempre corte de linhas de campo magnético e a f.e.m. induzida é proporcional ao número de linhas cortadas por unidade de tempo.

O conceito de linhas de indução, introduzido por Faraday, conquistou alguns adeptos ao mesmo tempo que foi alvo de críticas pela sua imprecisão matemática. Maxwell desenvolveu uma teoria matemática das linhas de campo, dando maior credibilidade à teoria de Faraday; a síntese de Maxwell permitiu-lhe apreciar o eletromagnetismo numa forma unificada criando uma nova ciência (a eletrodinâmica) de imensa riqueza, tanto do ponto de vista fenomenológico como do ponto de vista matemático.

Antes de estudarmos de uma forma mais precisa a relação entre fluxos magnéticos variáveis e condutores em movimento, vamos considerar mais um dispositivo que aproveita a indução eletromagnética para produzir corrente, o qual pode ser analisado usando o método introduzido nesta secção para condutores em movimento.

## 10.4. Gerador de Faraday

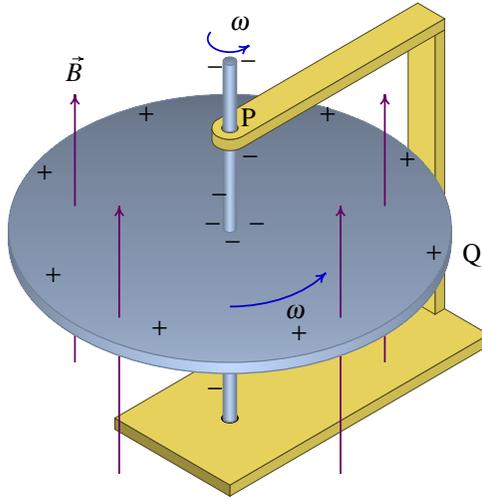
O primeiro gerador eletromagnético foi inventado por Faraday em 1831. É um dispositivo bastante simples que consiste num disco metálico, montado sobre um suporte isolante, que se faz rodar dentro de um campo magnético perpendicular ao disco (tal como está representado na Figura 10.5).

Quando o disco roda com velocidade angular constante  $\omega$ , sobre os eletrões de condução actua uma força magnética que os desloca na direcção radial. O deslocamento dos eletrões de condução produz um campo eléctrico induzido  $E_1$  radial. No estado estacionário, as forças magnética e eléctrica, sobre os eletrões de condução, são iguais e opostas. Em coordenadas polares, a velocidade de um electrão, que se encontra a uma distância  $r$  é

$$\vec{v} = \dot{r} \hat{r} + \dot{\theta} r \hat{\theta} . \quad (10.12)$$

Como o campo  $\vec{B}$  tem a direcção de  $\hat{k}$  e o campo induzido  $E_1$  é radial, a força de Lorentz sobre o electrão será

$$\vec{F} = -e(E_1 + B\dot{\theta}r) \hat{r} + eB\dot{r} \hat{\theta} . \quad (10.13)$$



**Figura 10.5.:** Gerador de Faraday.

As equações de movimento são as seguintes:

$$E_i + B\dot{\theta}r = \frac{m}{e}(\dot{\theta}^2 r - \ddot{r}), \quad (10.14)$$

$$B\dot{r} = \frac{m}{e}(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}), \quad (10.15)$$

onde  $m$  é a massa do elétron. No estado estacionário,  $\dot{r} = 0 = \ddot{r}$ ,  $\dot{\theta} = \omega$  é constante, e o resultado obtido para o campo induzido é

$$E_i = \frac{m}{e}\omega^2 r - B\omega r. \quad (10.16)$$

O primeiro termo é devido à inércia dos elétrons de condução que faz com que se acumulem na borda do disco quando este roda; o segundo termo é devido à força magnética sobre os elétrons e o sinal negativo indica que a direção do campo induzido é radial apontando para o eixo. Se a frequência de rotação fosse, por exemplo, 60 rotações por minuto, o termo  $m\omega/e$  seria da ordem de grandeza  $10^{-11}$  T, isto é, várias ordens de grandeza inferior ao valor típico dos campos magnéticos usados neste tipo de geradores. Assim, despreza-se o termo relativo à inércia e admite-se que o campo induzido é igual a  $-B\omega r$ .

A diferença de potencial entre a borda e o eixo obtém-se integrando o campo induzido em ordem a  $r$ , desde 0 até ao raio do disco  $R$ :

$$V_P - V_Q = - \int_0^R B \omega r \, dr = -\frac{1}{2} B \omega R^2. \quad (10.17)$$

O sinal negativo indica que o potencial no ponto P é menor do que o potencial no ponto Q (Figura 10.5). Esta diferença de potencial pode ser usada para manter uma corrente contínua num circuito ligado entre os pontos A e B.

## 10.5. Campo elétrico em referenciais em movimento

No Capítulo 8 aceitámos como resultado experimental a proporcionalidade entre a força magnética e a velocidade, sem nos questionarmos sobre que velocidade estávamos a pensar: velocidade da partícula relativa ao campo magnético ou do campo em relação a esta? Ou será a velocidade relativa a um “espaço absoluto”? Na resposta a estas questões está a base da compreensão do fenómeno de indução eletromagnética.

Consideremos o caso de uma partícula com carga  $q$ , que se desloca com velocidade  $\vec{v}$  em relação a um referencial R, onde existem um campo elétrico  $\vec{E}$  e um campo magnético  $\vec{B}$ . A força de Lorentz (Equação 8.22) é

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) . \quad (10.18)$$

Do ponto de vista do referencial R', que se desloca com a partícula, a velocidade da partícula em relação a R' é zero, não existindo força magnética; por outro lado, como o campo magnético do referencial R se desloca com velocidade  $-\vec{v}$  relativa a R', aparecerá um campo elétrico induzido no referencial R, que vai modificar o campo elétrico total  $\vec{E}'$  medido em R'. Sobre a partícula actua uma força elétrica

$$\vec{F}' = q\vec{E}' . \quad (10.19)$$

Se a velocidade é constante, o referencial R' é inercial (as leis de Newton são válidas nesse sistema) e por conseguinte a força nos dois referenciais deverá ser a mesma<sup>3</sup> ( $\vec{F}' = \vec{F}$ ), o que implica a seguinte relação entre os campos:

$$\boxed{\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}} . \quad (10.20)$$

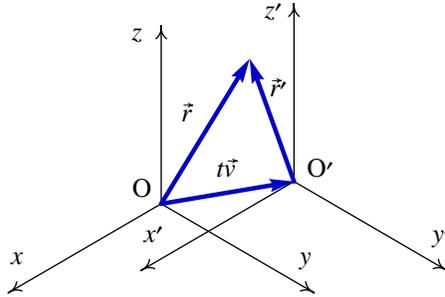
O campo elétrico no referencial em movimento é uma mistura dos campos elétrico e magnético no referencial no qual tem lugar esse movimento. Assim, os campos elétrico e magnético são duas partes do mesmo campo, já que o que parece ser um campo magnético num referencial aparece como campo elétrico num outro referencial. Na Equação (10.20), os três campos são calculados no mesmo ponto  $\vec{r}$  e no mesmo instante  $t$ .

Uma forma conveniente de definir um sistema de eixos no referencial R' consiste em escolher os mesmos eixos e a mesma origem O do referencial R, num instante

<sup>3</sup>Realmente, existe outra força de origem não eletromagnética que garante o movimento uniforme, mas esta, como se sabe, é igual nos dois referenciais.

que definimos como  $t = 0$ . Em  $t > 0$ , a origem  $O'$  do referencial  $R'$  estará na posição  $t\vec{v}$  e os eixos  $x'$ ,  $y'$  e  $z'$  serão paralelos aos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$  do referencial  $R$  (Figura 10.6). Os vetores de posição,  $\vec{r}$  e  $\vec{r}'$ , de um ponto nos referenciais  $R$  e  $R'$ , respectivamente, verificam a equação

$$\vec{r} = \vec{r}' + t\vec{v} . \quad (10.21)$$



**Figura 10.6.:** Referencial  $R'$  em movimento com velocidade  $\vec{v}$ .

Consideremos agora um campo vetorial qualquer  $\vec{F}(\vec{r}, t)$  no referencial  $R$ . O campo num ponto  $\vec{r}'$  no referencial  $R'$  é definido por

$$\vec{F}'(x', y', z', t) = \vec{F}(x' + tv_x, y' + tv_y, z' + tv_z, t) ; \quad (10.22)$$

assim, a variação do campo  $\vec{F}'$  será devida tanto à variação explícita do campo  $\vec{F}$ , como ao deslocamento relativo entre os referenciais. A derivada parcial do campo  $\vec{F}'$ , em ordem a  $t$ , é

$$\frac{\partial \vec{F}'}{\partial t} = \frac{\partial \vec{F}}{\partial t} + v_x \frac{\partial \vec{F}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \vec{F}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \vec{F}}{\partial z} ; \quad (10.23)$$

e usando o operador nabla obtemos

$$\frac{\partial \vec{F}'}{\partial t} = \frac{\partial \vec{F}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{F} . \quad (10.24)$$

Esta derivada do campo  $\vec{F}$  é chamada **derivada convetiva**. Usando a propriedade distributiva do produto vetorial (Apêndice A) temos

$$\vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{F}) = \vec{v}(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) - \vec{F}(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) + (\vec{F} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{F} . \quad (10.25)$$

O segundo e terceiro termos são nulos, pois a velocidade  $\vec{v}$ , com que se desloca o referencial em movimento, é igual em todos os pontos e as suas derivadas em  $x$ ,  $y$

e  $z$  são nulas. Substituindo em (10.26) obtemos

$$\frac{\partial \vec{F}'}{\partial t} = \frac{\partial \vec{F}}{\partial t} + \vec{v}(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) - \vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{F}), \quad (10.26)$$

onde  $\vec{v}$  é considerado constante no último termo. A posição  $\vec{r}$  de qualquer ponto que se desloca com  $R'$  aumenta  $\vec{v}t$  durante o tempo  $t$ , logo  $\partial \vec{r} / \partial t$  é igual a  $\vec{v}$ , e a derivada convetiva (10.23) pode também ser escrita na seguinte forma:

$$\frac{\partial \vec{F}'}{\partial t} = \frac{\partial \vec{F}}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial \vec{F}}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial \vec{F}}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial t} \frac{\partial \vec{F}}{\partial z} = \frac{d\vec{F}}{dt}. \quad (10.27)$$

## 10.6. Forma geral da lei de Faraday

A lei de Faraday pode ser escrita numa forma geral, independente dos circuitos. Consideremos o circuito  $C$  da Figura 10.7; no caso (a) o circuito está em repouso e segundo a lei de Faraday a variação do campo magnético produzirá uma f.e.m. induzida igual a

$$\varepsilon = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{A}. \quad (10.28)$$

O sentido positivo de  $\varepsilon$  foi definido na Figura 10.7 em função do versor normal escolhido. O sinal negativo na equação anterior indica o sentido correto da f.e.m. induzida. Temos admitido que a forma do circuito é fixa, e por isso a única causa possível da variação do fluxo é a variação do campo em função do tempo.

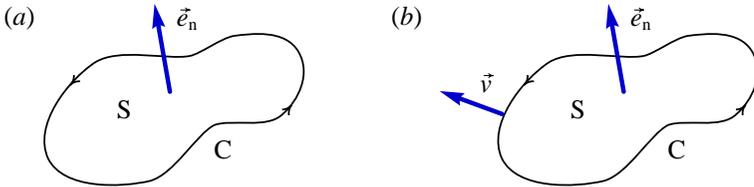


Figura 10.7.: Circuitos em repouso (a) e em movimento (b).

Consideremos agora o caso (b) na Figura 10.7, em que o circuito se desloca com velocidade  $\vec{v}$ . A Equação (10.28) tem que ser válida no referencial que se desloca com o circuito, já que nesse referencial o circuito está em repouso, logo se  $\vec{B}'$  for o campo magnético observado no referencial em movimento, a f.e.m. induzida no circuito é

$$\varepsilon' = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}'}{\partial t} \cdot d\vec{A}', \quad (10.29)$$

onde o integral é calculado sobre a superfície  $S$  em repouso. Usando a derivada convetiva, Equação (10.26), e lembrando que a divergência de campo magnético  $\vec{B}$  é zero em qualquer ponto, obtemos

$$\varepsilon' = - \iint_S \left[ \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{B}) \right] \cdot d\vec{A}' , \quad (10.30)$$

e, aplicando o teorema de Stokes obtemos, finalmente,

$$\boxed{\varepsilon' = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{A}' + \oint_C (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{r}' } . \quad (10.31)$$

Esta é a lei de Faraday, escrita numa forma bastante útil do ponto de vista prático. Quando não existe deslocamento relativo entre o campo e o circuito, o segundo termo é zero e só é preciso calcular o integral de superfície; quando o campo for constante num referencial, o primeiro termo é nulo e a velocidade  $\vec{v}$  será a velocidade do circuito, relativa ao referencial onde o campo é constante, e obtemos a Equação (10.9).

A derivada convetiva na Equação (10.28) pode também ser substituída pela Equação (10.27):

$$\varepsilon' = - \iint_S \frac{d\vec{B}}{dt} \cdot d\vec{A}' = - \frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{A}' . \quad (10.32)$$

O último integral é calculado na superfície  $S$  em movimento, e é igual ao fluxo através do circuito  $C$  em movimento, e a derivada total do fluxo depende tanto das variações do campo  $\vec{B}$  como do movimento do circuito. Este último resultado é a forma (10.1) da lei de Faraday, com a qual iniciámos o capítulo, e que, como acabamos de mostrar, é equivalente à Equação (10.31) quando o circuito  $C$  mantém a sua forma constante.

A f.e.m. induzida  $\varepsilon'$  é medida no referencial que acompanha o movimento do circuito  $C$ , isto é, onde aparece corrente induzida. A diferença de potencial induzida no circuito é igual ao integral de linha do campo elétrico no circuito:

$$\varepsilon' = \oint \vec{E}' \cdot d\vec{r}' ; \quad (10.33)$$

assim, a Equação (10.31) pode ser escrita como

$$\oint (\vec{E}' - \vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{r}' = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{A}' , \quad (10.34)$$

e, segundo a Equação (10.20), a expressão entre parênteses é o campo elétrico no referencial  $R$  onde o circuito  $C$  se desloca com velocidade  $\vec{v}$ :

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{r}' = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{A}' . \quad (10.35)$$

Esta última equação representa uma relação geral do campo eletromagnético, já que as únicas referências ao circuito são a sua forma geométrica  $C$  e a sua superfície interna  $S$ , que igualmente podiam corresponder a uma curva abstracta. Usando o teorema de Stokes, o lado esquerdo da equação pode ser escrito como o integral de superfície do rotacional de  $\vec{E}$  sobre a superfície  $S$ , e para que o resultado seja válido em qualquer superfície é necessário que

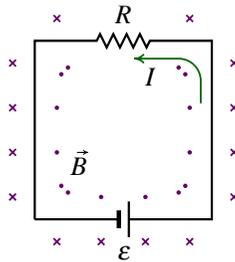
$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (10.36)$$

Esta é a forma diferencial da lei de Faraday.

Em conclusão, o fenómeno da indução eletromagnética é devido à dependência entre os campos eléctrico e magnético. Por um lado, o rotacional do campo eléctrico é igual a menos a derivada do campo magnético, e, por outro lado, o campo eléctrico observado num referencial que se desloca com velocidade  $\vec{v}$  em relação ao **laboratório** é uma combinação dos campos eléctrico e magnético observados no laboratório.

## 10.7. Auto-indução

Em qualquer circuito eléctrico, a corrente produz um campo magnético e, portanto, fluxo magnético através da área delimitada dentro do circuito (Figura 10.8).



**Figura 10.8.:** Campo magnético produzido pela corrente numa malha de um circuito.

O campo magnético produzido pelo circuito pode ser calculado a partir da lei de Biot-Savart, tendo em conta que a corrente é constante em todo o circuito:

$$\vec{B} = k_m I \oint_C \frac{d\vec{r}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = k_m I \vec{f}(\vec{r}), \quad (10.37)$$

onde  $\vec{f}(\vec{r})$  é o integral de linha ao longo do circuito. A função  $\vec{f}$  pode ser difícil de calcular, mas o importante é que não depende da corrente. O fluxo magnético

através da superfície do circuito,

$$\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{A} = k_m I \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{A}, \quad (10.38)$$

será então diretamente proporcional à corrente, com uma constante de proporcionalidade  $L$  que só depende da forma geométrica do circuito:

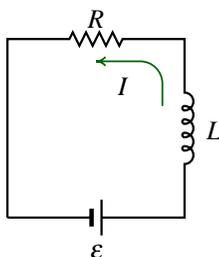
$$\Phi = LI. \quad (10.39)$$

Se a corrente no circuito mudar, aparecerá uma f.e.m. induzida de acordo com a lei de Faraday:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -L \frac{dI}{dt}. \quad (10.40)$$

A variação da corrente no circuito induz uma corrente sobre o próprio circuito, como se existisse uma f.e.m. que se opõe às variações da corrente; esta propriedade dos circuitos é chamada **auto-indução**. O valor da f.e.m. induzida correspondente a uma certa variação da corrente é diretamente proporcional à constante  $L$  do circuito, chamada **coeficiente de auto-indução**.

A auto-indução representa-se no diagrama do circuito por meio de uma espiral (indutor) como se mostra na Figura 10.9. O sinal negativo na Equação (10.40) indica que a direção da f.e.m. induzida é contrária à variação da corrente. No entanto, como nas equações de circuitos é costume escrever diferenças de potencial no sentido oposto à corrente (por exemplo  $IR$  numa resistência), escreveremos também a diferença de potencial no indutor, no sentido oposto à corrente, isto é,  $L dI/dt$ .



**Figura 10.9.:** Representação diagramática da auto-indução.

A unidade de indutância no sistema internacional é o **henry** (H), igual a  $1 \text{ T}\cdot\text{m}^2/\text{A}$ . A auto-indução de uma bobina com várias voltas pode ser elevada, enquanto que a auto-indução de outros elementos de circuito como resistências e fios é muito pequena. Por isso é costume considerar a auto-indução apenas no caso de existirem bobinas.

Dois circuitos com correntes variáveis induzem correntes mutuamente. A f.e.m. induzida pelo circuito 1 sobre o circuito 2 é diretamente proporcional à variação da corrente  $I_1$ :

$$\Phi_{12} = -M_{12}I_1, \quad (10.41)$$

onde a constante  $M_{12}$  é chamada **coeficiente de indução mútua**.

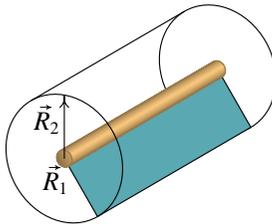
De igual forma, a f.e.m. induzida pelo circuito 2 no circuito 1 é diretamente proporcional a  $dI_2/dt$ , e a constante de proporcionalidade é a mesma constante  $M_{12}$ <sup>4</sup>. As f.e.m. totais induzidas em cada circuito são devidas tanto à indução mútua, como à auto-indução:

$$\varepsilon_1 = M_{12} \frac{dI_2}{dt} - L_1 \frac{dI_1}{dt}, \quad (10.42)$$

$$\varepsilon_2 = M_{12} \frac{dI_1}{dt} - L_2 \frac{dI_2}{dt}. \quad (10.43)$$

### Exemplo 10.2

Considere um **cabo coaxial** formado por dois cilindros condutores coaxiais de raios  $R_1$  e  $R_2$  ( $R_2 > R_1$ ). Calcule a auto-indução por unidade de comprimento.



**Figura 10.10.:** Cabo coaxial.

Quando o cabo é ligado a um circuito, os dois condutores cilíndricos transportam a mesma corrente  $I$  mas em sentidos opostos. Devido à simetria cilíndrica do cabo, as linhas de campo magnético serão círculos com centro no eixo dos cilindros e perpendiculares ao eixo. Podemos aplicar a lei de Ampère a um destes círculos de raio  $r$ ,  $R_1 < r < R_2$ ; se o círculo é percorrido na direção do campo, o integral de linha do campo é:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{r} = 2\pi r B.$$

<sup>4</sup>Ver por exemplo: Feynman, P. R., Leighton, R. B. e M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, vol. II.

A corrente que passa através do círculo é a corrente no fio interno,  $I$ . A lei de Ampère implica que

$$2\pi r B = 4\pi k_m I ,$$

e o campo entre os dois condutores é

$$B = \frac{2k_m I}{r} .$$

A superfície de comprimento unitário entre os dois cilindros é o retângulo  $R_1 < r < R_2$ ,  $0 < z < 1$ , como se mostra na Figura 10.10. O campo  $\vec{B}$  é perpendicular a essa superfície, de maneira que o fluxo magnético, por unidade de comprimento, entre os dois cilindros é igual a

$$\Phi = \int_0^1 dz \int_{R_1}^{R_2} \frac{2k_m I}{r} dr = 2k_m I \ln \left( \frac{R_2}{R_1} \right) . \quad (10.44)$$

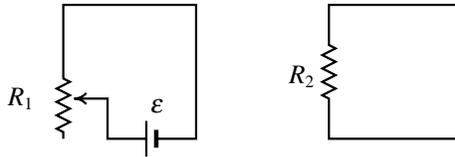
A derivada deste fluxo é diretamente proporcional à derivada da corrente, e a constante de proporcionalidade é o coeficiente de auto-indução por unidade de comprimento:

$$L = 2k_m \ln \left( \frac{R_2}{R_1} \right) . \quad (10.45)$$

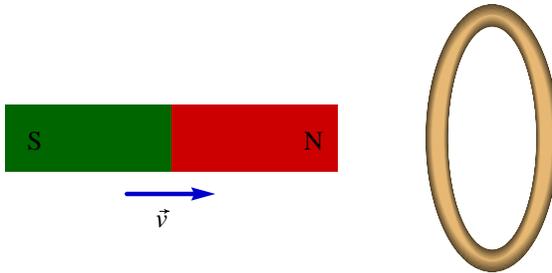
## Problemas

1. Indique o sentido da corrente induzida no circuito da direita, quando a resistência no circuito da esquerda é, subitamente:

- (a) Aumentada.  
(b) Reduzida.

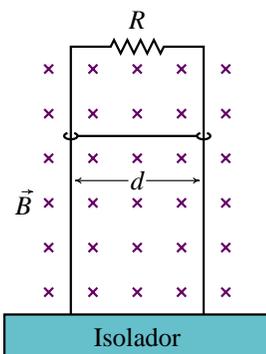


2. Um ímã desloca-se a velocidade constante sobre o eixo de uma espira, como mostra a figura.

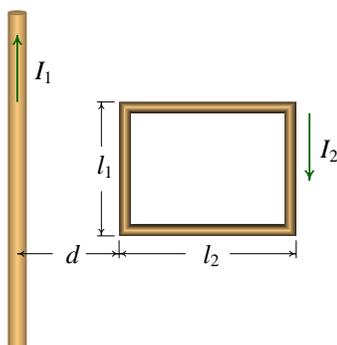


- (a) Faça um esquema qualitativo do fluxo magnético  $\Phi$  através da espira em função do tempo  $t$ . Indique o instante  $t_1$  em que o ímã está a meio da travessia da espira.
- (b) Faça o gráfico da corrente  $I$  na espira em função do tempo.
3. (a) Mostre que, se o fluxo magnético através de cada espira de uma bobina de  $N$  espiras e resistência  $R$  variar de  $\Phi_1$  até  $\Phi_2$ , a carga total que passa através da bobina é dada por  $Q = N(\Phi_2 - \Phi_1)/R$ .
- (b) Uma bobina circular de diâmetro 2 cm, resistência de  $50 \Omega$  e  $N = 100$  tem o seu eixo paralelo a um campo de indução magnética uniforme e de módulo 1 T. A direção do campo é subitamente invertida; calcule a carga total que passa pela bobina.
- (c) Se a inversão do campo na alínea anterior levar 0,1 s, calcule a corrente e a f.e.m. médias no circuito.
4. Um avião Boeing 747 tem comprimento total de 60 m entre as pontas das asas. O avião voa a 800 km/h e a uma altitude constante, numa região onde o campo magnético da Terra é 0,5 G, formando um ângulo de  $60^\circ$  com a vertical. Calcule a diferença de potencial induzida entre as pontas das asas.

5. (a) Considere o gerador de Faraday da Figura 10.5. Se não existir campo de indução magnética, existirá alguma diferença de potencial entre os pontos A e B quando o disco roda?
- (b) Num condutor sólido, os eletrões movem-se livremente. Então porque não “caem” no interior do condutor sob o efeito do seu peso?
6. Na figura, uma barra condutora de comprimento  $d$  e massa  $m$ , desliza sobre dois trilhos metálicos verticais, dentro de um campo magnético  $\vec{B}$ , uniforme. A resistência dos trilhos e da barra são desprezíveis em relação a  $R$ . A barra mantém sempre o contacto com os trilhos mas o atrito com eles, assim como o atrito com o ar, são também desprezíveis. Quando a barra começa a cair livremente, o seu movimento é inicialmente acelerado, mas atinge logo uma velocidade constante  $v$ . Calcule a velocidade limite  $v$ .



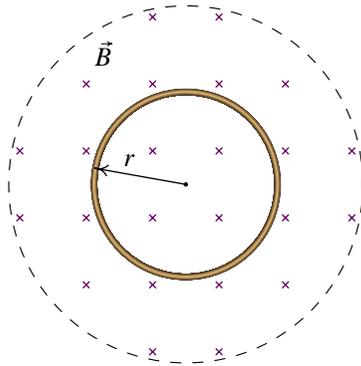
7. Na espira retangular da figura circula uma corrente  $I_2$ . No mesmo plano encontra-se outro fio percorrido por uma corrente  $I_1$  e de comprimento  $l \gg l_1, l_2$  (ver figura). Determine o coeficiente de indução mútua entre o fio e o circuito retangular.



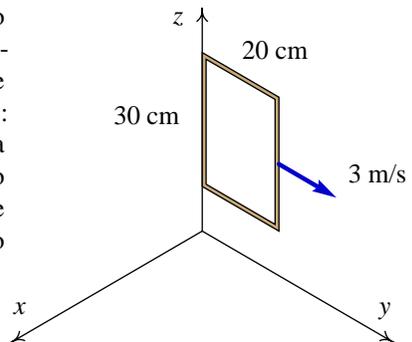
8. Uma espira quadrada de cobre, com 4 cm de lado, encontra-se sobre a superfície horizontal de uma mesa. Um eletroímã está colocado em cima da mesa, com o seu pólo norte um pouco acima e à esquerda da espira, de maneira que o campo magnético é aproximadamente uniforme e aponta para baixo através da espira,

formando um ângulo de  $30^\circ$  com a vertical. Calcule a f.e.m. média induzida na espira à medida que o campo magnético varia desde zero até ao seu valor final de  $0,5\text{ T}$ , num intervalo de tempo igual a  $200\text{ ms}$ . Qual será a direção da corrente induzida?

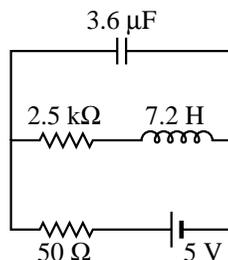
9. No interior do círculo a tracejado na figura, existe um campo magnético uniforme apontando para dentro do papel e com módulo igual a  $0,4\text{ T}$ . O campo diminui a uma taxa constante de  $0,1\text{ T/s}$ .
- Qual é a forma das linhas de campo elétrico induzido no interior do círculo?
  - Qual é o módulo e a direção do campo elétrico induzido dentro do anel condutor de raio  $r = 8\text{ cm}$ ?
  - Calcule a f.e.m. induzida dentro do anel condutor.
  - Diga qual é a diferença de potencial entre dois pontos em qualquer parte do anel.



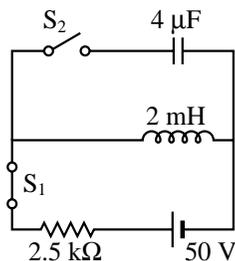
10. Uma espira condutora retangular, paralela ao plano  $Oyz$ , desloca-se com velocidade constante  $\vec{v} = 3\hat{j}$  (m/s) dentro de uma região onde existe um campo magnético com componentes:  $B_x = (6 - y)$  (SI) e  $B_y = B_z = 0$ . Calcule a f.e.m. induzida na espira, em função do tempo  $t$ , a partir do instante  $t = 0$  em que a espira se encontra na posição da figura, com um lado ao longo do eixo dos  $z$ .



11. No circuito da figura, calcule as correntes iniciais no indutor e no condensador, a corrente final no indutor e a carga final no condensador.



12. (a) No circuito da figura, o interruptor  $S_1$  tem estado fechado durante muito tempo e o interruptor  $S_2$  aberto; determine a corrente no indutor. (b) A seguir, abre-se o interruptor  $S_1$  e simultaneamente fecha-se o interruptor  $S_2$ ; nesse preciso instante, a corrente no indutor deve ter o mesmo valor calculado na alínea anterior. Explique qualitativamente o que acontece com a corrente no indutor e a carga no condensador a partir desse instante.



## Respostas

1. (a) Anti-horário. (b) Horário.
3. (b) 1.26 mC. (c)  $\bar{I} = 12.6 \text{ mA}$ ,  $\bar{\varepsilon} = 0.628 \text{ V}$ .
4. 0.33 V.
5. (a) Aparece uma diferença de potencial  $V_P - V_Q < 0$  que fornece a força centrípeta sobre os electrões, mas é demasiado pequena para poder ser medida experimentalmente.  
(b) Os electrões de condução caem de facto; mas depois de uma pequeníssima queda, aparece uma diferença de potencial que equilibra o seu peso; esta diferença de potencial é demasiado pequena para poder ter quaisquer efeitos significativos.
6.  $v = \frac{mgR}{B^2 d^2}$ .
7.  $M = 2k_m l_1 \ln\left(\frac{d + l_2}{d}\right)$ .
8. 3.5 mV.
9. (a) Círculos em sentido horário. (b) 4.00 mN/C. (c) 2.011 mV. (d) 0.
10. 0.18 V, no sentido anti-horário visto desde a esquerda.
11. Inicialmente, 100 mA no condensador e 0 no indutor. No fim, 1.96 mA no indutor e 17.6  $\mu\text{C}$  no condensador.
12. (a) 20 mA. (b) A corrente diminui enquanto a carga aumenta; quando a corrente decresce até zero, a carga atinge um valor máximo e nesse momento, o condensador começa a descarregar, surgindo uma corrente que aumenta, no sentido contrário à corrente inicial. Quando a carga diminui até zero, a corrente é máxima e com a mesma intensidade inicial. O ciclo repete-se indefinidamente, pois não existe nenhuma resistência que dissipe energia.

## 11. Processamento de sinais



**Pierre Simon Laplace (1749–1827)**

Figura muito importante na história da matemática, estatística, física e astronomia. Uma das suas principais obras é a *Mecânica Celeste*, composta por 5 volumes, onde Laplace abandona o método geométrico usado até então nos livros de mecânica, passando a usar a abordagem mais habitual hoje em dia, baseada no cálculo. No campo do eletromagnetismo, a equação que define o potencial eletrostático no vácuo leva o seu nome, como reconhecimento à sua contribuição. Outra das suas contribuições mais importantes é a *transformada de Laplace*, que será usada neste capítulo para facilitar a resolução das equações diferenciais dos circuitos elétricos.

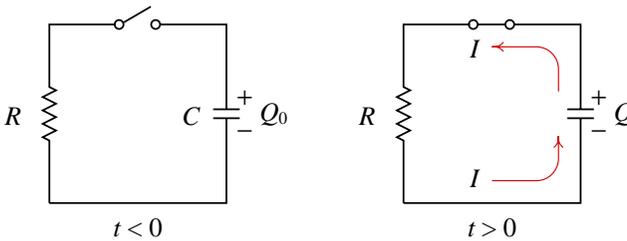
## 11.1. Sinais

Uma aplicação importante dos circuitos elétricos é no processamento de sinais. Os sinais a processar são tensões ou correntes elétricas variáveis em função do tempo. Esses sinais podem ser produzidos, por exemplo, num microfone ou em transdutores de diversos tipos, usados para medir pressões, temperaturas ou outras propriedades físicas. O sinal elétrico produzido pelo transdutor constitui uma fonte de tensão ou corrente variável no circuito elétrico usado para o seu processamento.

Neste capítulo designa-se por **sinal** qualquer grandeza que varie em função do tempo em alguma parte de um circuito. Por exemplo, uma tensão  $V(t)$ , uma corrente  $I(t)$  ou a carga  $Q(t)$  num condensador. Utiliza-se um til para indicar transformadas de Laplace correspondentes, nomeadamente,  $\tilde{V}(s)$ ,  $\tilde{I}(s)$  e  $\tilde{Q}(s)$ . Quando é óbvio que se está a falar de sinal, por vezes escreve-se apenas  $V$  e  $\tilde{V}$ , ficando implícito que são funções que dependem do tempo  $t$  e da frequência  $s$  (o Apêndice B apresenta um sumário sobre a transformada de Laplace).

## 11.2. Circuito RC

A figura 11.1 mostra o diagrama de circuito para um condensador, com carga inicial  $Q_0$ , que é descarregado por ligação a uma resistência  $R$ . Esse circuito é designado de circuito RC.



**Figura 11.1.:** Descarga de um condensador.

O instante  $t = 0$  em que o condensador é ligado à resistência corresponde ao instante em que é fechado o interruptor no diagrama de circuito da figura 11.1. Quando o condensador começa a descarregar, a corrente é igual à taxa de diminuição da carga do condensador,  $-dQ/dt$ .

Em qualquer instante  $t \geq 0$ , a corrente e a diferença de potencial no condensador são iguais à corrente  $I$  e à diferença de potencial  $IR$  na resistência, respetivamente:

$$-\frac{dQ}{dt} = I \quad \frac{Q}{C} = IR \quad (11.1)$$

Combinando estas duas equações obtém-se uma equação diferencial para a carga em função do tempo,

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{Q}{RC} \quad (t \geq 0) \quad (11.2)$$

Calculando a transformada de Laplace (Apêndice B) de ambos os membros da equação obtém-se

$$s\tilde{Q} - Q_0 = -\frac{\tilde{Q}}{RC} \quad (11.3)$$

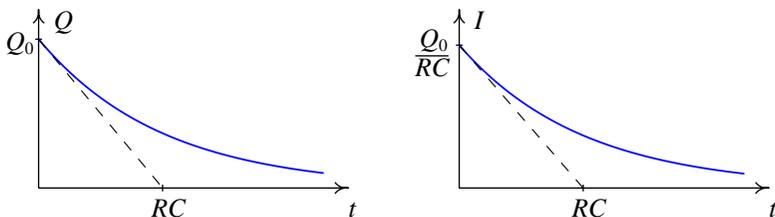
e segue-se que

$$\tilde{Q} = \frac{Q_0}{s + 1/(RC)} \quad (11.4)$$

A transformada inversa desta equação dá a carga em função do tempo no circuito RC:

$$Q(t) = Q_0 e^{-t/(RC)} \quad (11.5)$$

Constata-se que a carga no condensador decresce de forma exponencial. A corrente obtém-se dividindo a carga por  $RC$  e, portanto, decresce também de forma exponencial. Os gráficos da carga e da corrente, em função do tempo, são apresentados na figura 11.2.



**Figura 11.2.:** Carga e corrente no circuito RC.

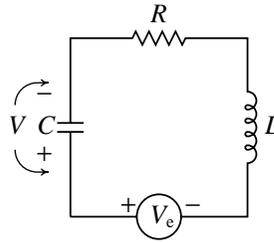
A constante  $t_C = RC$ , com unidades de tempo, designa-se de **constante de tempo**. É o tempo que demoraria a descarregar o condensador se a corrente mantivesse o seu valor inicial  $Q_0/t_C$ . A constante de tempo  $t_C$  é também igual ao intervalo de tempo em que a carga e a corrente diminuem até  $1/e$  (isto é 37%) dos seus valores iniciais. Quanto maior é a constante de tempo, mais lenta é a diminuição da carga e da corrente no circuito RC.

### 11.3. Equações diferenciais dos circuitos

Considerando um circuito onde existe uma fonte com tensão variável  $V_e(t)$ , que constitui o **signal de entrada**, interessa calcular a tensão  $V(t)$  produzida em algum elemento do circuito; essa tensão  $V(t)$  é o **signal de saída** do circuito.

Para facilitar a análise, admite-se que o sinal de entrada  $V_e(t)$  só aparece a partir de um instante arbitrado  $t = 0$ , tal que para  $t < 0$  o sistema se encontra em equilíbrio estável. No final desta secção explica-se o que isso quer dizer.

O primeiro exemplo considerado é o **circuito RLC** da figura 11.3, onde o sinal de saída é a tensão no condensador. Os símbolos + e - não implicam tensões positivas ou negativas; indicam apenas que  $V_e(t)$  (ou  $V(t)$ ) é o potencial no ponto designado +, subtraído do potencial no ponto designado -.



**Figura 11.3.:** Circuito RLC.

Se  $I(t)$  for a corrente no circuito, as diferenças de potencial na resistência e no indutor são:

$$RI(t) \quad LI'(t) \quad (11.6)$$

onde  $I'(t)$  é a derivada de  $I(t)$  em ordem a  $t$ .

No condensador, a diferença de potencial é o sinal de saída  $V(t)$ , que é diretamente proporcional à carga no condensador

$$V(t) = \frac{Q(t)}{C} \quad (11.7)$$

Por aplicação da regra da malha ao circuito da figura 11.3 obtém-se

$$LI' + RI + V = V_e \quad (11.8)$$

Como a corrente  $I$  é igual à derivada da carga  $Q$  no condensador, derivando a equação (11.7) obtém-se:

$$I = CV' \quad (11.9)$$

onde  $V'$  é a derivada de  $V(t)$ . Derivando novamente obtém-se

$$I' = CV'' \quad (11.10)$$

Finalmente, substituindo (11.9) e (11.10) na equação (11.8) obtém-se a equação que permite calcular o sinal de saída  $V$  a partir do sinal de entrada  $V_e$ :

$$LCV'' + RCV' + V = V_e \quad (11.11)$$

Para um sinal de entrada conhecido,  $V_e(t)$ , e valores conhecidos de  $R$ ,  $C$  e  $L$ , a equação diferencial (11.11) pode ser resolvida para obter o sinal de saída  $V(t)$ .

O segundo exemplo corresponde ao mesmo circuito RLC da figura 11.3, mas com tensão de saída na resistência (figura 11.4). A tensão de saída verifica a lei de Ohm

$$V = RI \quad (11.12)$$

E aplicando a regra das malhas obtém-se

$$L I' + V + \frac{Q}{C} = V_e \quad (11.13)$$

Derivando ambos os membros da equação anterior, substituindo  $I$  em função de  $V$  (usando a equação (11.12)) e lembrando que a derivada da carga no condensador é igual à corrente  $I$ , obtém-se a equação diferencial para este circuito:

$$\frac{L}{R} V'' + V' + \frac{1}{RC} V = V_e' \quad (11.14)$$

O último exemplo considerado nesta secção é, mais uma vez, o mesmo circuito RLC, mas em que o sinal de saída é a diferença de potencial no indutor (figura 11.5).

Neste caso a tensão de saída verifica a equação

$$V = L I' \quad (11.15)$$

Derivando a equação da malha duas vezes e substituindo  $I'$  em função de  $V$  (usando a equação anterior), obtém-se a equação diferencial para o circuito na figura 11.5:

$$V'' + \frac{R}{L} V' + \frac{1}{LC} V = V_e'' \quad (11.16)$$

Para cada possível sinal de entrada,  $V_e(t)$ , as equações diferenciais dos 3 exemplos considerados (equações (11.11), (11.14) e (11.16)) são equações diferenciais lineares, não homogêneas, com coeficientes constantes. Qualquer outro circuito mais complicado, formado por fontes, resistências, condensadores e indutores, conduz ao mesmo tipo de equação diferencial.

Para  $t < 0$  o sinal de entrada é nulo e a equação diferencial linear torna-se homogênea. Todas as equações diferenciais lineares homogêneas com coeficientes constantes podem ser escritas na forma de um sistema dinâmico autónomo e linear,

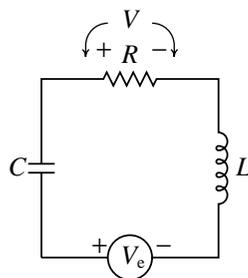


Figura 11.4.: Circuito RLC.

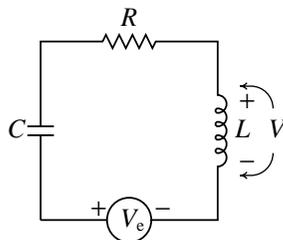


Figura 11.5.: Circuito RLC.

como se mostra em: Villate, *Dinâmica e Sistemas Dinâmicos* (capítulo 9). Como tal, o sistema dinâmico tem um único ponto de equilíbrio com  $V = V' = 0$  (se a equação for de segunda ordem; já se for de terceira ordem,  $V = V' = V'' = 0$ , etc).

Na prática, a resistência  $R$  de cada elemento num circuito nunca é exatamente nula mas sim um valor positivo, o que faz com que o sistema dinâmico seja dissipativo e o ponto de equilíbrio seja estável (atractivo). Assim sendo, pode-se admitir que no intervalo  $t < 0$  o sistema evolui para o estado de equilíbrio estável e no limite  $t \rightarrow 0^-$  o sinal de saída e a sua derivada são nulos ( $V = V' = 0$ ). Ou seja, pode-se admitir que todas as cargas e correntes no circuito são nulas no instante inicial ( $t \rightarrow 0^-$ ).

## 11.4. Unidades de tempo e de frequência

A frequência tem unidades de inverso do tempo. A unidade SI de frequência é o hertz, representado pelo símbolo Hz, equivalente a  $s^{-1}$ . Na secção 11.2 viu-se que o comportamento de um circuito RC depende de uma única constante própria do sistema, com unidades de tempo:

$$t_C = RC \quad (11.17)$$

Assim sendo, conclui-se então que o termo  $RCV'$  na equação (11.11) tem unidades de voltagem, já que  $V'$  tem unidades de voltagem sobre tempo; de facto, para que a equação seja válida, todos os termos nos dois membros da equação devem ter as mesmas unidades, neste caso voltagem.

Já na equação (11.14), o segundo membro da equação tem unidades de voltagem sobre tempo e observando o primeiro termo do primeiro membro da equação, conclui-se que  $L/R$  tem unidades de tempo, pois as unidades de  $V''$  são voltagem sobre tempo ao quadrado. Define-se então uma segunda constante de tempo:

$$t_L = \frac{L}{R} \quad (11.18)$$

A constante  $LC$  que aparece na equação (11.16) é igual ao produto das duas constantes de tempo ( $t_C t_L$ ) e como tal, tem unidades de tempo ao quadrado. Pode-se verificar que todos os termos da equação (11.16) têm unidades de voltagem sobre tempo ao quadrado.

As equações (11.17) e (11.18) permitem definir o sistema de unidades mais conveniente num circuito determinado. Por exemplo, se as resistências no circuito fossem da ordem dos k $\Omega$  e as capacidades da ordem dos nF, a unidade de tempo mais conveniente seria o  $\mu s$  (produto entre k $\Omega$  e nF), a unidade de indutância mais conveniente seria então o mH (produto entre  $\mu s$  e k $\Omega$ ) e a unidade de frequência mais conveniente seria MHz (inverso de  $\mu s$ ). Com os valores das resistências em

$k\Omega$ , capacidades em nF, indutâncias em mH, tempos em  $\mu\text{s}$  e frequências em MHz, podem-se ignorar as unidades e trabalhar com números de ordens de grandeza semelhantes.

## 11.5. Impedância

As equações dos circuitos com condensadores e indutores são sempre equações diferenciais, como se viu nos exemplos da secção 11.3. No entanto, como essas equações são lineares e de coeficientes constantes, as correspondentes transformadas de Laplace são sempre equações algébricas em função de um parâmetro  $s$  com unidades de frequência.

É muito mais fácil encontrar diretamente a equação algébrica do circuito, em função do parâmetro  $s$ , resolvê-la para encontrar a transformada de Laplace do sinal de saída e a seguir calcular a transformada de Laplace inversa para determinar o sinal de saída em ordem ao tempo. Para encontrar a equação do circuito no domínio da frequência  $s$ , é necessário saber a relação que existe entre corrente e tensão no domínio da frequência, para cada tipo de elemento no circuito e aplicar a lei dos nós e a lei das malhas.

Como já foi referido, nos circuitos dissipativos pode sempre admitir-se que no instante inicial  $t = 0$ , o sinal de entrada  $V_e(t)$  e o sinal de saída  $V(t)$  são nulos. Assim sendo, as transformadas de Laplace de  $V_e'$  e  $V'$  são  $s\tilde{V}_e(s)$  e  $s\tilde{V}(s)$ , onde  $\tilde{V}_e$  e  $\tilde{V}$  são as transformadas dos sinais de entrada e saída. Como as derivadas dos sinais também são inicialmente nulas, as transformadas de  $V_e''$  e  $V''$  são  $s^2\tilde{V}_e(s)$  e  $s^2\tilde{V}(s)$ .

Numa resistência, a lei de Ohm define a relação entre os sinais da tensão e da corrente

$$V(t) = RI(t) \quad (11.19)$$

e aplicando a transformada de Laplace a ambos os membros da equação obtém-se:

$$\tilde{V} = R\tilde{I} \quad (11.20)$$

Num indutor, a relação entre a tensão e a corrente é

$$V(t) = L \frac{dI(t)}{dt} \quad (11.21)$$

Como se está a admitir que a tensão e a corrente são nulas para  $t < 0$ , usando a propriedade da transformada de Laplace da derivada obtém-se a equação:

$$\tilde{V} = Ls\tilde{I} \quad (11.22)$$

que é semelhante à lei de Ohm (11.20) para as resistências, exceto que em vez de  $R$  se tem uma função  $Z(s)$  que depende da frequência:

$$Z(s) = Ls \quad (11.23)$$

Num condensador, a diferença de potencial é diretamente proporcional à carga acumulada:

$$V(t) = \frac{Q(t)}{C} \quad (11.24)$$

e a condição de cargas e correntes implica que a carga num instante  $t > 0$  é igual ao integral da corrente, desde  $t = 0$  até  $t$ :

$$V(t) = \frac{1}{C} \int_0^t I(u) du \quad (11.25)$$

Usando a propriedade da transformada de Laplace do integral, obtém-se:

$$\tilde{V} = \frac{\tilde{I}}{sC} \quad (11.26)$$

Mais uma vez, obteve-se uma relação semelhante à lei de Ohm, mas em que o valor da resistência  $R$  é substituído por uma função que depende da frequência:

$$Z(s) = \frac{1}{sC} \quad (11.27)$$

Conclui-se então que, no domínio da frequência, as resistências, indutores e condensadores verificam todos uma **lei de Ohm generalizada**:

$$\boxed{\tilde{V}(s) = Z(s) \tilde{I}(s)} \quad (11.28)$$

onde a função  $Z(s)$  denominada **impedância generalizada**, é dada por:

$$Z = \begin{cases} R & , \text{ nas resistências} \\ Ls & , \text{ nos indutores} \\ \frac{1}{Cs} & , \text{ nos condensadores} \end{cases} \quad (11.29)$$

É de salientar que os indutores produzem uma maior impedância para sinais com frequências  $s$  maiores, os condensadores apresentam maior impedância quando o sinal tem menor frequência e nas resistências a impedância é constante (isto é, independente da frequência).

## 11.6. Associações de impedâncias

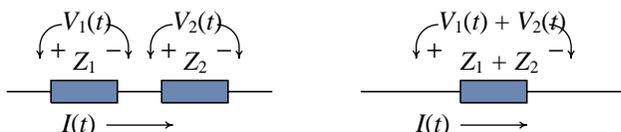
Na secção 7.2 encontrou-se o valor da resistência equivalente para duas resistências ligadas em série ou em paralelo. No processo de demonstração teve-se em conta que nas resistências em série a corrente é a mesma mas a diferença de potencial

total é igual à soma das diferenças de potencial, nas resistências em paralelo a diferença de potencial é a mesma mas a corrente total é soma das correntes nas resistências e que em cada resistência a tensão  $\Delta V$  é diretamente proporcional à corrente  $I$ .

As mesmas condições são válidas no caso de combinações de resistências, indutores ou condensadores em série ou em paralelo, no domínio da frequência onde a transformada de Laplace da tensão ( $\tilde{V}$ ) é diretamente proporcional à transformada de Laplace da corrente ( $\tilde{I}$ ) em qualquer um desses dispositivos (basta repetir o mesmo raciocínio da secção 7.2 substituindo  $\Delta V$  por  $\tilde{V}$ ,  $I$  por  $\tilde{I}$  e  $R$  por  $Z$ ).

Assim sendo, as regras para obter a impedância equivalente de combinações de resistências, indutores ou condensadores, ligados em série ou em paralelo, são idênticas às regras para obter a resistência equivalente de resistências em série ou em paralelo. No caso de dois dispositivos em série (figura 11.6, a impedância equivalente é igual à soma das impedâncias dos dois dispositivos:

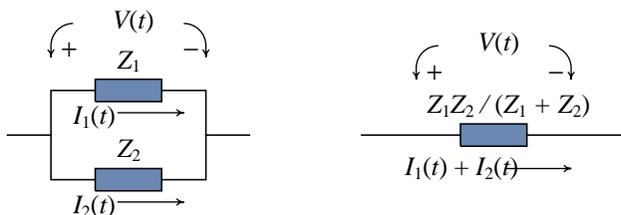
$$\boxed{Z_{\text{série}} = Z_1 + Z_2} \quad (11.30)$$



**Figura 11.6.:** Associação de impedâncias em série e sistema equivalente.

No caso de dois dispositivos em paralelo (figura 11.7), a impedância equivalente é:

$$\boxed{Z_{\text{paralelo}} = Z_1 \parallel Z_2 = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}} \quad (11.31)$$



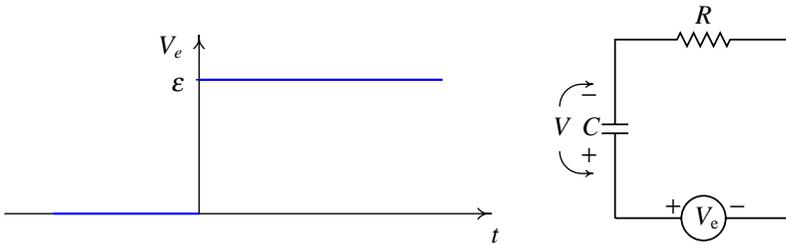
**Figura 11.7.:** Associação de impedâncias em paralelo e sistema equivalente.

**Exemplo 11.1**

Um condensador é ligado a uma fonte de tensão contínua para o carregar. Descreva a variação da carga e da corrente no condensador, em função do tempo (resposta transitória).

**Resolução.** A fonte de tensão contínua, com f.e.m.  $\varepsilon$ , ligada num instante arbitrário  $t = 0$ , pode ser considerada como um sinal de entrada  $V_e = \varepsilon u(t)$ , onde  $u(t)$  é a função **degrau unitário** (ver Apêndice B). A transformada de Laplace de  $V_e$  é então  $\tilde{V}_e = \varepsilon/s$ .

O lado esquerdo da figura seguinte mostra o gráfico de  $V_e = \varepsilon u(t)$



e o lado direito mostra o diagrama do circuito, onde  $R$  representa a soma da resistência interna da fonte com a resistência dos fios usados para ligar a fonte ao condensador.

A impedância total do circuito é a soma das impedâncias da resistência e do condensador, já que estão em série

$$Z_t = R + \frac{1}{Cs}$$

e, pela lei de Ohm generalizada, a transformada da corrente no circuito é:

$$\tilde{I} = \frac{\tilde{V}_e}{R + 1/(Cs)} = \frac{\varepsilon}{Rs + 1/C}$$

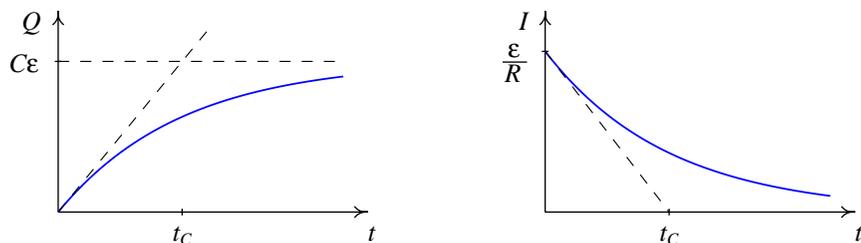
A transformada de Laplace da tensão no condensador é igual à impedância do condensador vezes  $\tilde{I}$ :

$$\tilde{V} = \frac{\tilde{I}}{Cs} = \frac{\varepsilon}{s(t_C s + 1)} = \varepsilon \left( \frac{1}{s} - \frac{t_C}{t_C s + 1} \right)$$

onde,  $t_C = RC$  é a constante de tempo do circuito. Calculando a transformada de Laplace inversa obtém-se a tensão no condensador, em função do tempo

$$V(t) = \varepsilon (1 - e^{-t/t_C}) \quad (11.32)$$

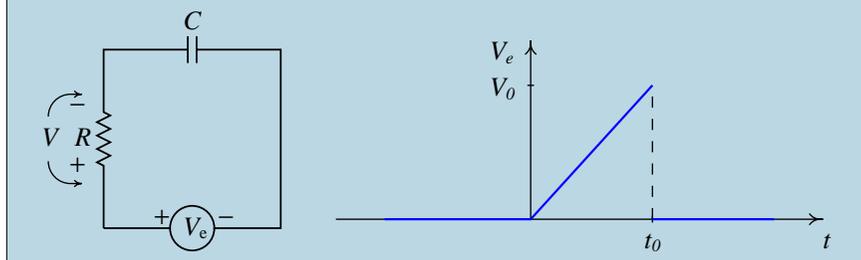
A carga em função do tempo  $Q(t)$  obtém-se multiplicando a expressão anterior por  $C$  e a figura 11.8 mostra os gráficos da carga e da corrente ( $dQ/dt$ ) em função do tempo. A carga aumenta de forma exponencial, desde zero até o valor máximo  $C\varepsilon$ . Substituindo um condensador por um interruptor aberto (aproximação para  $t \rightarrow \infty$ ), verifica-se que o valor assintótico da tensão no condensador é  $\varepsilon$  e a carga aproxima-se assintoticamente de  $C\varepsilon$ .



**Figura 11.8.:** Gráficos do período transitório da carga e corrente num condensador a ser carregado com uma fonte de tensão contínua.

### Exemplo 11.2

No circuito da figura, determine o sinal de saída  $V(t)$ , quando o sinal de entrada  $V_e(t)$  é o sinal triangular representado no gráfico.



**Resolução.** A impedância equivalente e a transformada da corrente são iguais às do exemplo anterior:

$$\tilde{I} = \frac{\tilde{V}_e}{R + 1/(Cs)}$$

Mas como a tensão de saída é agora medida na resistência, vem:

$$\tilde{V} = R\tilde{I} = \frac{\tilde{V}_e}{1 + 1/(t_C s)} \quad (11.33)$$

onde  $t_C = RC$  é a constante de tempo.

Usando a função degrau unitário, o sinal de entrada escreve-se:

$$V_e = \frac{V_0 t}{t_0} (u(t) - u(t - t_0))$$

e convém usar a forma equivalente:

$$V_e = \frac{V_0}{t_0} (t u(t) - t_0 u(t - t_0) - (t - t_0) u(t - t_0))$$

Aplicando agora a propriedade de deslocamento no tempo da transformada de Laplace, obtém-se a transformada de Laplace do sinal triangular de entrada:

$$\tilde{V}_e = \frac{V_0}{t_0} \left( \frac{1}{s^2} - \frac{t_0 e^{-t_0 s}}{s} - \frac{e^{-t_0 s}}{s^2} \right)$$

e substituindo  $\tilde{V}_e$  na equação (11.33) obtém-se

$$\tilde{V} = \frac{V_0}{t_0} \left( \frac{1}{s(s + 1/t_C)} - \frac{t_0 e^{-t_0 s}}{s + 1/t_C} - \frac{e^{-t_0 s}}{s(s + 1/t_C)} \right)$$

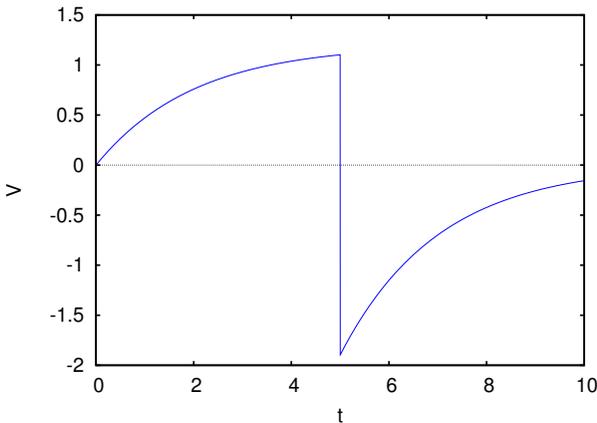
Para calcular a transformada inversa, começa-se por ignorar os fatores exponenciais e calcular as transformadas inversas seguintes

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s + 1/t_C} \right\} = e^{-t/t_C}$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s(s + 1/t_C)} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{t_C}{s} - \frac{t_C}{s + 1/t_C} \right\} = t_C (1 - e^{-t/t_C})$$

em que foi usada uma expansão em frações parciais no segundo caso. Usando esses dois resultados, pode-se escrever a transformada inversa de  $\tilde{V}$ :

$$V(t) = \frac{V_0 t_C}{t_0} (1 - e^{-t/t_C}) - V_0 u(t - t_0) e^{-(t-t_0)/t_C} - \frac{V_0 t_C}{t_0} u(t - t_0) (1 - e^{-(t-t_0)/t_C}) \quad (11.34)$$

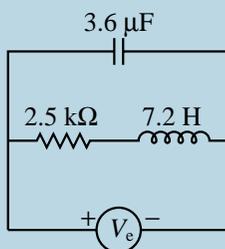


**Figura 11.9.:** Sinal de saída no exemplo 11.2 com:  $t_0 = 5$ ,  $R = 2$ ,  $C = 1$  e  $V_0 = 3$ .

A figura 11.9 mostra o gráfico do sinal de saída para:  $t_0 = 5$ ,  $R = 2$ ,  $C = 1$  e  $V_0 = 3$ . A descontinuidade em  $t = 5$  deve-se a que entre  $t = 0$  e  $t = 5$  a fonte alimenta tanto o condensador como a resistência, passando o condensador a ser elemento ativo no circuito e alimentando a resistência, a partir do instante em que a tensão da fonte desaparece, em  $t = 5$ . O sentido da corrente inverte-se assim em  $t = 5$ , dando origem à mudança abrupta no sinal da tensão de saída.

### Exemplo 11.3

No circuito da figura, calcule as transformadas de Laplace das tensões e correntes em cada um dos 3 dispositivos, em função da transformada da tensão de entrada,  $\tilde{V}_e$ . Encontre as expressões para essas tensões e correntes, em função do tempo, no caso particular em que a entrada é uma fonte ideal de tensão contínua com f.e.m.  $\varepsilon$ .

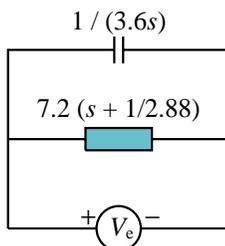


**Resolução.** Convém começar pela escolha de um sistema de unidades que facilite os cálculos numéricos. Para todas as impedâncias (resistências) usam-se  $k\Omega$  e para as capacidades  $\mu F$ ; isso implica usar  $ms$  como unidade de tempo e  $H$  como unidade de indutância. Usando  $V$  para as tensões, as correntes estarão em  $mA$ .

Com esse sistema de unidades, as impedâncias do condensador, da resistência e do indutor são:  $1/(3.6 s)$ ,  $2.5$  e  $7.2 s$  onde  $s$  é medida em  $kHz$ . A resistência e o indutor estão em série e podem ser combinados numa única impedância com valor:

$$7.2 s + 2.5 = 7.2 \left( s + \frac{1}{2.88} \right)$$

Note-se que a última simplificação é uma questão de gosto, para trabalhar com contantes de tempo e neste caso  $2.88 = 7.2/2.5$  é a constante de tempo para esse segmento do circuito. O circuito original é então equivalente ao seguinte circuito com dois elementos em paralelo:



Nos dois elementos em paralelo a tensão é a mesma, igual à tensão  $V_e$ . Assim, a transformada da corrente que passa através do condensador é

$$\tilde{I}_C = \frac{\tilde{V}_e}{Z_C} = 3.6 s \tilde{V}_e$$

e a transformada da corrente através da resistência e do indutor é

$$\tilde{I}_R = \tilde{I}_L = \frac{\tilde{V}_e}{Z_{RL}} = \frac{\tilde{V}_e}{7.2(s + 1/2.88)}$$

As transformadas das tensões na resistência e no indutor são:

$$\tilde{V}_R = R \tilde{I}_R = \frac{\tilde{V}_e}{2.88 s + 1} \quad \tilde{V}_L = Z_L \tilde{I}_R = \frac{s \tilde{V}_e}{s + 1/2.88}$$

No caso em que a fonte é de tensão contínua,  $V_e = \varepsilon$ , e portanto,

$$\tilde{V}_e = \varepsilon/s$$

No condensador,

$$V_C = V_e = \varepsilon \quad \tilde{I}_C = 3.6 \varepsilon \quad \Rightarrow \quad I_C = 3.6 \varepsilon \delta(t)$$

onde  $\delta(t)$  é a função delta de Dirac (impulso unitário). Refira-se que a corrente é infinita em  $t = 0$  e nula em outros instantes, mas o integral da corrente é igual à carga armazenada no condensador,  $3.6 \varepsilon$ . Esta solução é apenas uma aproximação, admitindo que a resistência das armaduras do condensador é nula; na realidade essas armaduras têm uma pequena resistência  $r$ , a tensão não aumenta instantaneamente até  $\varepsilon$  mas demorará um tempo pequeno da ordem de  $rC$  e a corrente não será realmente infinita, mas sim muito elevada num pequeno intervalo de tempo da ordem de  $rC$ .

Na resistência:

$$\begin{aligned} \tilde{I}_R &= \frac{\varepsilon/7.2}{s(s + 1/2.88)} & \Rightarrow & \quad I_R = 0.4 \varepsilon (1 - e^{-t/2.88}) \\ V_R &= 2.5 I_R & \Rightarrow & \quad V_R = \varepsilon (1 - e^{-t/2.88}) \end{aligned}$$

nomeadamente, a tensão aumenta exponencialmente desde zero até  $\varepsilon$  e a corrente aumenta exponencialmente desde zero até  $0.4 \varepsilon$ .

No indutor:

$$I_L = I_R = 0.4 \varepsilon (1 - e^{-t/2.88}) \quad V_L = \varepsilon - V_R = \varepsilon e^{-t/2.88}$$

e conclui-se que a tensão decresce exponencialmente desde  $\varepsilon$  até 0 e a corrente aumenta exponencialmente desde 0 até  $0.4 \varepsilon$ .

Os resultados obtidos no exemplo anterior, no caso em que a tensão de entrada é contínua, podem ser corroborados tendo em conta que, para tensões constantes, após um tempo suficientemente elevado, um condensador comporta-se como um circuito aberto (impedância infinita porque a frequência é nula) e um indutor como um curto circuito (impedância nula porque a frequência é nula).

Assim, a corrente no condensador deve-se aproximar de 0 e a tensão de  $\varepsilon$ . No indutor e na resistência a corrente deve-se aproximar-se de  $0.4\varepsilon$ ; a tensão na resistência aproxima-se de  $\varepsilon$  e no indutor tende para 0.

## 11.7. Função de transferência

As equações diferenciais dos circuitos com fontes, resistências, condensadores e indutores são sempre lineares. Se no instante  $t = 0$  todas as tensões e correntes forem nulas, a transformada de Laplace da equação do circuito pode ser escrita como uma igualdade entre dois produtos; uma função  $P(s)$  vezes a transformada do sinal de entrada  $\tilde{V}(s)$  por um lado e uma função  $Q(s)$  vezes a transformada do sinal de saída,  $\tilde{V}_e(s)$ , por outro:

$$P(s)\tilde{V}(s) = Q(s)\tilde{V}_e(s) \quad (11.35)$$

Pode-se então escrever:

$$\tilde{V}(s) = \tilde{H}(s)\tilde{V}_e(s) \quad (11.36)$$

onde a função:

$$\tilde{H}(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} \quad (11.37)$$

é designada de **função de transferência**. É de salientar que a função  $P(s)$  no denominador é o **polinómio característico** da respetiva equação diferencial homogénea. Como tal, os valores próprios da equação homogénea são pontos onde a função de transferência  $\tilde{H}$  é singular (infinita).

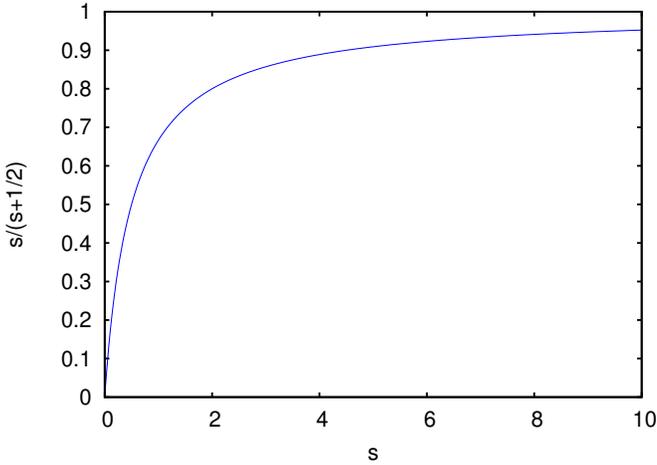
O conhecimento da função de transferência de um circuito permite calcular a saída para diferentes sinais de entrada, por simples multiplicação de  $\tilde{H}$  pelas transformadas de Laplace dos sinais de entrada,  $\tilde{V}_e$ , seguida do cálculo das transformadas inversas.

Por exemplo, no caso do circuito do exemplo 11.2, a função de transferência é obtida calculando  $\tilde{V}/\tilde{V}_e$  na equação (11.33)

$$\tilde{H}(s) = \frac{s}{s + 1/t_C} \quad (11.38)$$

Quando a frequência  $s$  é igual a  $1/t_C$  esta função de transferência é igual a 0.5. Se a frequência for menor que  $1/t_C$ ,  $\tilde{H}$  aproxima-se de 0 e se  $s$  for maior que  $1/t_C$ ,

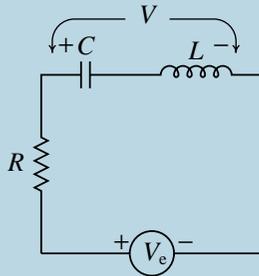
$\tilde{H}$  aproxima-se de 1. Isso quer dizer que as frequências menores que a frequência de corte,  $1/t_C$ , serão atenuadas, enquanto que as frequências elevadas não sofrem muita atenuação, razão pela qual o circuito do exemplo 11.2 é denominado **filtro passa-alto**. A figura 11.10 mostra o gráfico desta função de transferência, no caso específico em que  $t_C$  é igual a 2 unidades de tempo.



**Figura 11.10.:** Função de transferência de um filtro passa-alto com  $t_C = 2$ .

#### Exemplo 11.4

Encontre a função de transferência e a equação diferencial do circuito representado no diagrama.



**Resolução.** A impedância total do segmento onde está a ser medida a tensão  $V$  é:

$$Z_{LC} = \frac{1}{Cs} + Ls = \frac{Ls^2 + 1/C}{s}$$

e a impedância total do circuito é  $Z_{LC} + R$ . A transformada da corrente no circuito é então

$$\tilde{I} = \frac{s \tilde{V}_e}{L s^2 + R s + 1/C}$$

A transformada da tensão de saída é igual ao produto da impedância à saída pela transformada da corrente

$$\tilde{V} = Z_{LC} \tilde{I} = \frac{L s^2 + 1/C}{L s^2 + R s + 1/C} \tilde{V}_e$$

e a função de transferência é:

$$\tilde{H} = \frac{s^2 + 1/(t_C t_L)}{s^2 + s/t_L + 1/(t_C t_L)}$$

onde  $t_C = RC$  e  $t_L = L/R$ . O denominador de  $\tilde{H}$  é o polinômio característico da equação do circuito e o numerador, multiplicado por  $\tilde{V}_e$ , é a transformada do segundo membro dessa equação; como tal, a equação diferencial do circuito é:

$$V'' + \frac{V'}{t_L} + \frac{V}{t_C t_L} = V_e'' + \frac{V_e}{t_C t_L}$$

## Perguntas

1. A equação diferencial de um circuito é:  $3V'' - 2V' + V = 2V_e'$ . Qual das seguintes funções representa a função de transferência desse circuito?

- A.  $\frac{2}{3s^2 - 2s + 1}$       D.  $\frac{-2}{3s^2 - 2s + 1}$   
 B.  $\frac{2s}{3s^2 - 2s + 1}$       E.  $\frac{2s}{s^2 - 2s + 3}$   
 C.  $\frac{2}{s^2 - 2s + 3}$

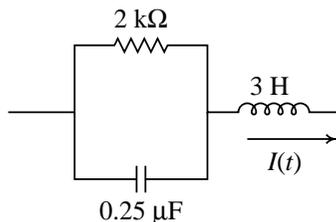
- A.  $3e^t - 4e^{2t}$       D.  $3e^{-t} - 4e^{2t}$   
 B.  $e^{-t} - 4e^{-2t}$       E.  $3e^t - 2e^{-2t}$   
 C.  $4e^{-t} - 3e^{-2t}$

2. A função de transferência de um filtro é:

$$\tilde{H}(s) = \frac{s + 10}{2 - s}$$

Calcule a expressão para o sinal de saída  $V(t)$  quando o sinal de entrada é  $V_e(t) = e^{-t}$ .

3. No circuito do diagrama, sabendo que a corrente através do indutor é  $I(t) = e^{-2t}$  (em mA se o tempo estiver em ms), calcule a corrente através da resistência, em função do tempo.

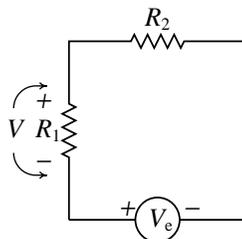


- A.  $(2+t)e^{-2t}$       D.  $2te^{-2t}$       D.  $\frac{RLCs^2 + Ls + R}{RLs}$   
 B.  $2e^{-2t}$       E.  $0.5e^{-2t}$       E.  $\frac{LCs^2 + RCs + 1}{RLs}$   
 C.  $e^{-2t}$
4. Uma resistência com valor  $R$ , um condensador com capacidade  $C$  e um indutor com indutância  $L$  estão ligados em paralelo entre dois pontos de um circuito. Calcule a impedância equivalente desse sistema em paralelo.
- A.  $\frac{RLs}{RLCs^2 + Ls + R}$   
 B.  $\frac{RLs}{LCs^2 + RCs + 1}$   
 C.  $\frac{LCs^2 + RCs + 1}{Cs}$
5. Quando a entrada num circuito é a tensão contínua  $V_e = 5$ , a saída é  $2.5(1 - e^{-2t})$ . Se no mesmo circuito a entrada for  $5e^{-t}$  qual será a saída?
- A.  $2.5e^{-t}(1 - e^{-2t})$   
 B.  $5e^{-t}(1 - e^{-2t})$   
 C.  $2.5e^{-t}(1 - e^{-t})$   
 D.  $5e^{-t}(1 - e^{-t})$   
 E.  $2.5(1 - e^{-2(t+1)})$

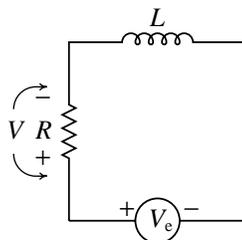
## Problemas

- Um condensador de  $50 \mu\text{F}$  é carregado usando uma fonte com f.e.m. de  $6 \text{ V}$  e resistência interna de  $350 \Omega$ , através de uma resistência de  $100 \text{ k}\Omega$ . (a) Calcule a corrente inicial no instante  $t = 0$  em que é ligada a fonte. (b) Num instante  $t_1 > 0$ , a corrente é de  $20 \mu\text{A}$ ; calcule as diferenças de potencial no condensador e na resistência nesse instante. (c) Calcule a carga armazenada no condensador em  $t_1$ . (d) Calcule o valor de  $t_1$ .
- A memória RAM de um computador funciona com uma fonte de alimentação de  $5 \text{ V}$ , extraíndo uma corrente de  $80 \text{ mA}$ . O conteúdo da memória é apagado se a tensão de alimentação diminuir abaixo de  $3 \text{ V}$ . Para proteger os dados na memória em caso de cortes na fonte de alimentação, liga-se um condensador de  $1 \text{ F}$  aos terminais da fonte de alimentação. Faça uma estimativa do tempo que o condensador pode manter os dados na memória. Admita que a única resistência no circuito é a da memória RAM.
- Uma resistência de  $3 \text{ k}\Omega$  e um condensador de  $5 \text{ nF}$  estão ligados em série a uma fonte com tensão  $V_e(t) = 2 - 2t$ , entre  $t = 0$  e  $t = 4$ , e  $V_e(t) = 0$  nos outros instantes ( $t$  medido em  $\mu\text{s}$  e  $V_e$  em  $\text{V}$ ). Calcule a corrente no circuito para  $t > 0$ .

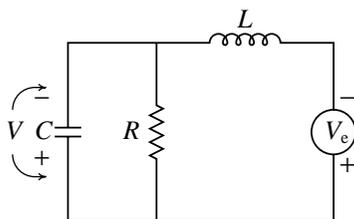
4. O circuito na figura é um **atenuador inversor** (repare na posição dos sinais positivo e negativo da saída). (a) Encontre a equação do circuito. (b) Calcule a função de transferência. (c) Explique a designação de atenuador inversor.



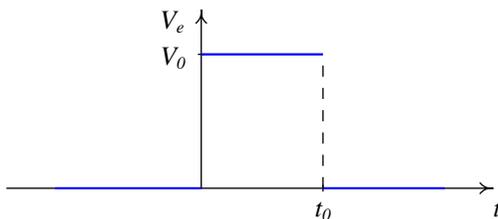
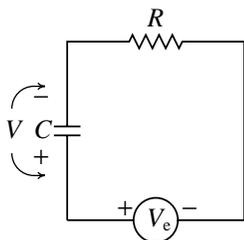
5. Para o circuito  $LR$  na figura: (a) Encontre a função de transferência. (b) Calcule a tensão  $V(t)$  no caso em que o sinal de entrada é uma fonte de tensão contínua com força eletromotriz  $V_e = \varepsilon$ . (c) Represente o gráfico do sinal  $V(t)$  calculado na alínea anterior.



6. No circuito da figura: (a) Calcule a impedância total, em função de  $s$ . (b) Calcule a transformada da corrente que passa pelo indutor. (c) Encontre a função de transferência, se a tensão de saída for medida no condensador. (d) Determine a equação diferencial para a tensão de saída.



7. O circuito na figura é denominado **filtro passa-baixo**. Escreva a equação que relaciona o sinal de saída com o sinal de entrada. Encontre a função de transferência do sistema e determine o sinal de saída quando o sinal de entrada é o indicado no lado direito da figura. Explique porque se designa este circuito de filtro passa-baixo.



## Respostas

Perguntas: 1. B. 2. D. 3. D. 4. A. 5. D.

### Problemas

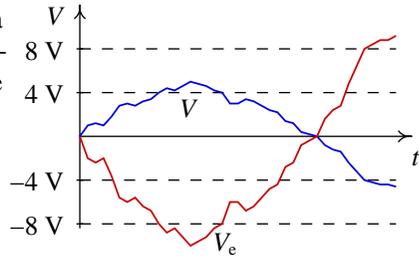
1. (a) 59.79  $\mu\text{A}$ . (b) 3.993 V no condensador e 2.0 V na resistência. (c) 0.200 mC.  
(d) 5.495 s.

2. 32 s.

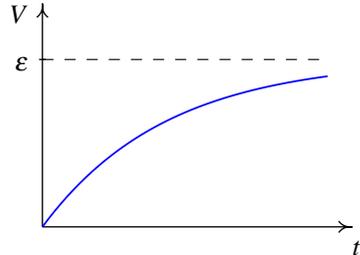
3.  $I(t) = (32/3) e^{-t/15} - 10 + u(t-4) (10 - 8 e^{-(t-4)/15})$  (unidades: mA).

4. (a)  $V(t) = -\frac{R_1}{R_1 + R_2} V_e(t)$ . (b)  $-\frac{R_1}{R_1 + R_2}$

(c) O sinal de saída tem sempre a mesma forma do sinal de entrada, mas multiplicado por uma constante menor que 1 e com o sinal trocado.



5. (a)  $\frac{R}{Ls + R}$  (b)  $\varepsilon (1 - e^{-Rt/L})$  (c)



6. (a)  $\frac{RLC s^2 + Ls + R}{RC s + 1}$  (b)  $\frac{(RC s + 1)\tilde{V}_e}{RLC s^2 + Ls + R}$

(c)  $\frac{R}{RLC s^2 + Ls + R}$  (d)  $LCV'' + \frac{L}{R}V' + V = V_e$

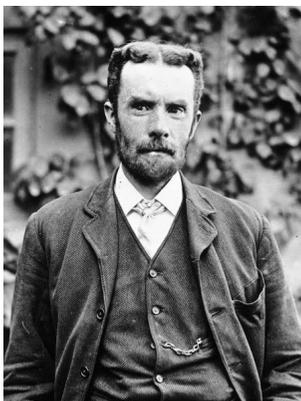
7. Equação diferencial:  $RCV' + V = V_e$

Função de transferência:  $\frac{1}{RCs + 1}$

Saída:  $V_0 (1 - e^{-t/(RC)} - u(t-t_0) (1 - e^{-(t-t_0)/(RC)}))$

Denomina-se passa-baixo, porque  $\tilde{H}$  é 1 para baixas frequências ( $s \rightarrow 0$ ) e nula para altas frequências ( $s \rightarrow \infty$ ).

## 12. Circuitos de corrente alternada



**Oliver Heaviside (1850–1925)**

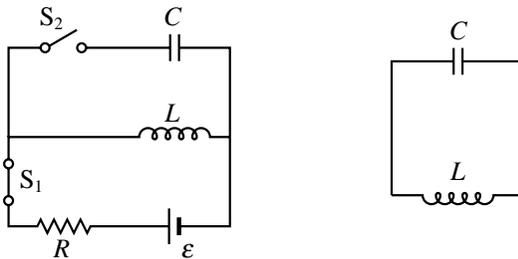
Aos 16 anos, Heaviside abandonou a escola para seguir o seu sonho de ser telegrafista. Nos tempos livres estudava eletricidade chegando a publicar alguns artigos inspirados pelo Tratado de Eletricidade e Magnetismo de Maxwell. Apesar dos vários contributos para o eletromagnetismo, é mais conhecido pelo estudo da análise vetorial; introduziu o cálculo operacional para resolver equações diferenciais dos circuitos, tornando-as equações algébricas facilmente resolvíveis. No entanto, o seu trabalho foi alvo de fortes críticas por falta de rigor matemático; Heaviside achava que não se devia perder tempo em demonstrações de algo que intuitivamente parecia estar certo. A demonstração rigorosa dos métodos usados por Heaviside iria manter ocupadas futuras gerações de matemáticos. Em 1902 postulou a existência da ionosfera que permite que ondas de rádio sejam transmitidas entre continentes. Uma doença infantil deixou-o surdo anos mais tarde, tendo passado os últimos 25 anos da sua vida isolado e solitário.

No fim da década de 1880 viveu-se nos Estados Unidos da América um período conhecido como a **Guerra das Correntes**. Nessa época já existia uma rede elétrica pública, usada principalmente para alimentar lâmpadas incandescentes e motores elétricos. A exploração dessa rede elétrica revertia grandes benefícios a Thomas A. Edison que tinha obtido várias patentes pela invenção da lâmpada e de vários dispositivos para gerar corrente contínua. Outras pessoas tentaram entrar nesse novo negócio milionário com as suas inovações; George Westinghouse, que já tinha tido sucesso comercial com as suas próprias patentes, contratou Nicola Tesla, um cientista brilhante, imigrante da Croácia. Tesla obteve uma patente pelo dispositivo esquematizado acima, utilizado para produzir e distribuir corrente alternada. A guerra das correntes acabaria por ser ganha pelo sistema de corrente alternada de Tesla e Westinghouse; uma das principais vantagens sobre o sistema de corrente contínua de Edison é a facilidade de poder aumentar ou diminuir a tensão por meio de transformadores.

As perdas de energia na transmissão de corrente em grandes distâncias são tanto menores quanto maior for a tensão usada. Usa-se alta tensão para transportar a corrente desde às centrais elétricas até as localidades onde é consumida e a tensão é reduzida antes de ser disponibilizada para consumo doméstico, de modo a reduzir os riscos de segurança.

## 12.1. Circuito LC

No circuito do lado esquerdo da figura 12.1, o interruptor  $S_1$  está fechado (há muito tempo) e o interruptor  $S_2$  aberto. Num instante,  $t = 0$ , abre-se o interruptor  $S_1$  e, simultaneamente, fecha-se o interruptor  $S_2$ . Assim, para  $t \geq 0$  o circuito equivalente é o representado no lado direito da figura 12.1, denominado circuito LC.



**Figura 12.1.:** Circuito LC, em  $t < 0$  (lado esquerdo) e circuito equivalente para  $t \geq 0$  (lado direito) em que  $S_1$  está aberto e  $S_2$  fechado.

A impedância do condensador é  $1/(Cs)$  e a do indutor é  $Ls$ . A lei de Ohm generalizada,  $\tilde{V} = Z\tilde{I}$  deixa de ser válida para o indutor, porque no instante  $t = 0$

a corrente que o percorre não é nula. Lembrando que a lei de Ohm foi obtida transformando a expressão para os indutores:

$$V = L \frac{dI}{dt} \quad (12.1)$$

conclui-se que, para os indutores, a relação mais geral entre as transformadas da tensão e da corrente é

$$\tilde{V} = L (s \tilde{I} - I_0) \quad (12.2)$$

Com o condensador não há problema, porque neste caso se admite que a sua carga inicial é nula, pelo que a transformada da tensão nas armaduras é  $Z \tilde{I} = \tilde{I}/(C s)$ . Outra diferença em relação aos circuitos estudados anteriormente é que, quando não há fontes, os condensadores e os indutores deixam de ser elementos passivos que respondem às mudanças na fonte; neste exemplo, em cada instante um dos elementos é passivo (perde energia) e o outro é ativo (absorve energia). Consequentemente, as tensões no condensador e no indutor são iguais em valor absoluto, mas com sinais opostos e a equação do circuito é:

$$L (s \tilde{I} - I_0) = \frac{\tilde{I}}{C s} \quad \Rightarrow \quad s^2 \tilde{I} - s I_0 = -\frac{\tilde{I}}{L C} \quad (12.3)$$

Esta equação algébrica é a transformada de Laplace da equação diferencial do circuito:

$$I'' = -\frac{I}{L C} \quad (12.4)$$

que é a equação de um **oscilador harmónico simples** (ver, por exemplo: Villate, *Dinâmica e Sistemas Dinâmicos*, secções 5.3 e 9.5). A matriz jacobiana dessa equação linear tem dois valores próprios imaginários  $\pm i \sqrt{1/(L C)}$  e a solução da equação é

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t) \quad (12.5)$$

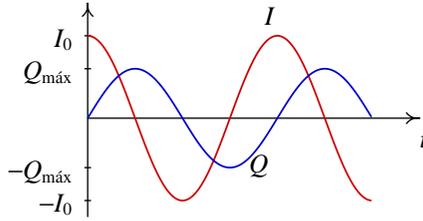
em que  $\omega$  é a frequência angular do circuito,

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{L C}} \quad (12.6)$$

A carga no condensador, em função do tempo, é

$$Q(t) = C \Delta V = -C L \frac{dI}{dt} = \frac{I_0}{\omega} \sin(\omega t) \quad (12.7)$$

e como tal, a corrente e a carga oscilam com frequência  $f = \omega/(2\pi)$ , desfasadas  $180^\circ$ , de forma que quando uma delas é nula, a outra tem o seu valor absoluto máximo (figura 12.2).

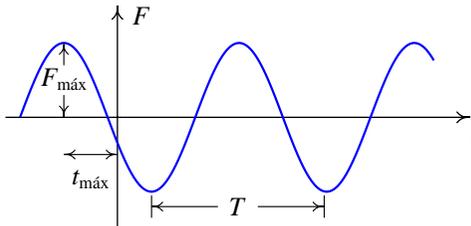


**Figura 12.2.:** Corrente e carga no circuito LC ( $Q_{\text{máx}} = I_0/\omega$ ).

A corrente (12.5) chama-se **corrente alternada** e a carga (12.7) é uma carga alternada. No capítulo sobre indução eletromagnética também se estudou um gerador que produz tensão alternada (equação (10.5)). Em geral, uma função alternada é uma função periódica com valor médio igual a zero; a carga e a corrente no circuito LC, assim como a tensão do gerador de tensão alternada, são 3 exemplos particulares em que a função alternada é o seno ou cosseno.

## 12.2. Funções sinusoidais

Uma **função sinusoidal**  $F(t)$  é uma função alternada que oscila entre dois valores  $-F_{\text{máx}}$  e  $F_{\text{máx}}$  e tem a mesma forma da função seno ou cosseno, como mostra a figura 12.3. Basta saber os valores das 3 distâncias  $T$ ,  $F_{\text{máx}}$  e  $t_{\text{máx}}$  referidas na figura, para caracterizar cada uma dessas funções.



**Figura 12.3.:** Função sinusoidal com período  $T$  e valor máximo  $F_{\text{máx}}$ .

O intervalo  $T$  entre dois máximos ou dois mínimos sucessivos é o **período** da função e o seu inverso,  $f = 1/T$ , é a **frequência**.

Designando por  $t_{\text{máx}}$  o valor absoluto da coordenada  $t$  onde a função atinge o seu valor máximo  $F_{\text{máx}}$ , pela última vez antes de  $t = 0$ , define-se a **fase** da função como:

$$\varphi = 2\pi \left( \frac{t_{\text{máx}}}{T} \right) \quad (12.8)$$

Uma função sinusoidal também pode ser caracterizada pelo seu valor máximo  $F_{\text{máx}}$

(também chamado amplitude), a sua fase  $\varphi$  e a sua frequência angular:  $\omega$ , definida por:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (12.9)$$

Assim sendo, as funções sinusoidais têm todas a forma geral:

$$F(t) = F_{\text{máx}} \cos(\omega t + \varphi) \quad (12.10)$$

Note-se que é possível representar a mesma função de várias formas. Pode-se substituir o cosseno por seno e subtrair  $\pi/2$  à fase, sem alterar o resultado. Pode-se também inverter os sinais da frequência angular e da fase, simultaneamente, e ainda somar ou subtrair qualquer múltiplo de  $2\pi$  à fase. No entanto, para facilitar a identificação à vista, utilizam-se apenas a função cosseno, frequências angulares positivas e fases no intervalo  $[0, 2\pi[$ . Essas 3 escolhas são arbitrárias, mas são habituais.

Dois funções sinusoidais que não tenham o mesmo valor máximo, fase e frequência angular, são necessariamente diferentes. E duas funções sinusoidais com a mesma frequência angular terão, necessariamente, a mesma frequência e o mesmo período.

## 12.3. Fasores

As funções sinusoidais com a forma (12.10) podem ainda ser escritas usando a fórmula de Euler e a função  $\text{Re}(z)$  que extrai a parte real de um número complexo  $z$ :

$$F_{\text{máx}} \cos(\omega t + \varphi) = \text{Re}\left(F_{\text{máx}} e^{i(\omega t + \varphi)}\right) = \text{Re}\left(F_{\text{máx}} e^{i\varphi} e^{i\omega t}\right) \quad (12.11)$$

Esta forma facilita a identificação de uma propriedade importante na soma de duas funções sinusoidais com diferentes valores máximos e fases, mas com a mesma frequência:

$$\begin{aligned} \text{Re}\left(F_{\text{máx}} e^{i\varphi} e^{i\omega t}\right) + \text{Re}\left(G_{\text{máx}} e^{i\phi} e^{i\omega t}\right) &= \text{Re}\left(F_{\text{máx}} e^{i\varphi} e^{i\omega t} + G_{\text{máx}} e^{i\phi} e^{i\omega t}\right) \\ &= \text{Re}\left(\left(F_{\text{máx}} e^{i\varphi} + G_{\text{máx}} e^{i\phi}\right) e^{i\omega t}\right) \end{aligned} \quad (12.12)$$

Nomeadamente, a soma de duas funções sinusoidais com a mesma frequência é também uma função sinusoidal com a mesma frequência.

Quando se trabalha com várias funções sinusoidais, todas com a mesma frequência, pode-se admitir implicitamente a função  $\text{Re}()$  e a parte que depende do tempo,  $e^{i\omega t}$ , representando cada função pelos números complexos que multiplicam essa exponencial:

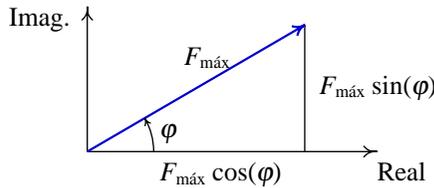
$$\mathbf{F} = F_{\text{máx}} e^{i\varphi}, \quad \mathbf{G} = G_{\text{máx}} e^{i\phi}, \quad \mathbf{H} = H_{\text{máx}} e^{i\psi} \dots \quad (12.13)$$

Essas expressões complexas que definem o valor máximo e a fase das funções sinusoidais são denominadas **fasores**. Adoptaram-se letras especiais para lembrar que essas expressões podem ser somadas mas não multiplicadas como números complexos ordinários, já que representam só uma parte da expressão completa da função.

O fasor correspondente à soma de duas funções sinusoidais de igual frequência é a soma dos fasores das duas funções, como foi demonstrado na equação (12.12). No entanto, o fasor do produto de duas funções sinusoidais de igual frequência não existe, já que o resultado não é outra função sinusoidal.

Outra forma útil de representar os fasores consiste em escrever o seu valor máximo e a fase separados pelo símbolo de ângulo:  $\mathbf{F} = F_{\text{máx}} \angle \varphi$ .

É também útil a representação gráfica, em que o fasor é uma seta no plano complexo (ver figura 12.4). Podem-se imaginar essa seta a rodar, no sentido anti-horário, com velocidade angular  $\omega$ ; o resultado de multiplicar por  $e^{i\omega t}$  e obter a parte real, corresponde no gráfico a projetar a seta no eixo real. Como tal, a projeção no eixo real do fasor no gráfico 12.4 indica o valor da respetiva função sinusoidal em  $t = 0$  e enquanto a seta roda para  $t > 0$ , a essa projeção indica a variação da função em ordem ao tempo.



**Figura 12.4.:** Representação gráfica de um fasor  $\mathbf{F}$ .

### Exemplo 12.1

Num nó num circuito de corrente alternada entram duas correntes e saem outras duas correntes. Sabendo que as expressões das correntes que entram são  $\sqrt{2} \sin(\omega t + \pi/4)$  e  $2\sqrt{2} \cos(\omega t + \pi/4)$ , e uma das correntes que sai é  $(3 - \sqrt{3}) \cos(\omega t)$ , calcule a outra corrente que sai, indicando o seu valor máximo e a sua fase.

**Resolução.** Em termos matemáticos, o que está a ser pedido é o cálculo de

$$\sqrt{2} \sin(\omega t + \pi/4) + 2\sqrt{2} \cos(\omega t + \pi/4) - (3 - \sqrt{3}) \cos(\omega t)$$

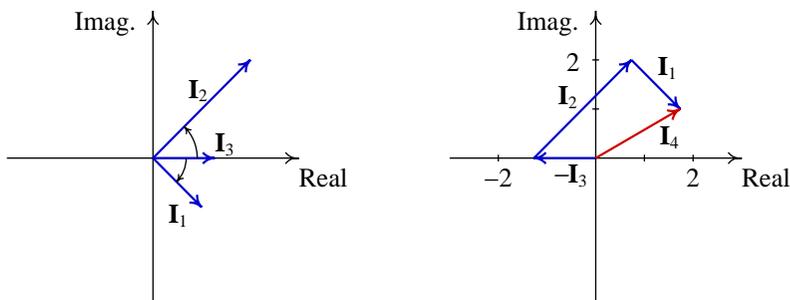
de forma a obter uma única função cosseno.

Começando por escrever os fasores das 3 correntes, no caso da primeira corrente é necessário subtrair  $\pi/2$  à fase, para substituir o seno por cosseno. O fasor da quarta

corrente é a soma dos dois primeiros fasores, subtraído do terceiro:

$$\mathbf{I}_4 = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_3 = (\sqrt{2} \angle -\pi/4) + (2\sqrt{2} \angle \pi/4) - (3 - \sqrt{3} \angle 0)$$

Em seguida, calculam-se as partes real e imaginária de cada fasor, tarefa que é facilitada usando a representação gráfica (lado esquerdo na figura 12.5).



**Figura 12.5.:** Soma de fasores.

Assim, o fasor da quarta corrente é:

$$\mathbf{I}_4 = (1 - i) + (2 + i2) - (3 - \sqrt{3}) = \sqrt{3} + i$$

O valor máximo desse fasor é a hipotenusa do triângulo retângulo com catetos de  $\sqrt{3}$  e 1 unidades, nomeadamente  $I_{\text{máx}} = 2$ . A fase é o ângulo oposto ao cateto de comprimento 1 nesse triângulo retângulo,  $\varphi = \arctan(1/\sqrt{3}) = \pi/6$ . O resultado obtido é:

$$I_4(t) = \sqrt{2} \sin(\omega t + \pi/4) + 2\sqrt{2} \cos(\omega t + \pi/4) - (3 - \sqrt{3}) \cos(\omega) = 2 \cos(\omega t + \pi/6)$$

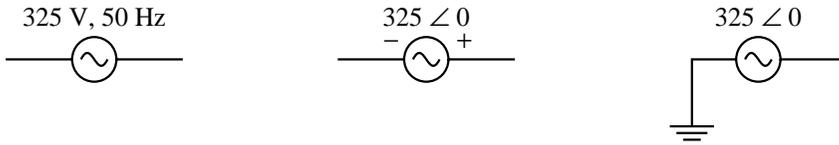
Embora os fasores não sejam verdadeiros vetores, somam-se exatamente como se fossem vetores, somando coordenadas, ou geometricamente, como no lado direito da figura 12.5.

## 12.4. Tensão alternada

Uma tensão alternada é um sinal sinusoidal dado por:

$$V = V_{\text{máx}} \cos(\omega t + \varphi) \quad (12.14)$$

Nos diagramas de circuito, uma fonte ideal de tensão alternada representa-se pelo símbolo indicado na figura 12.6. Junto do símbolo indica-se a tensão máxima e



**Figura 12.6.:** Três formas de representar fonte ideal de tensão alternada com tensão máxima de 325 V e frequência de 50 Hz.

pode também indicar-se a frequência ou a fase. Os valores apresentados na figura são os que estão em uso na rede elétrica pública da União Europeia: frequência  $f$  de 50 Hz e tensão máxima de 325 V.

O instante  $t = 0$  pode ser escolhido de forma a fazer com que a fase da tensão seja nula. Se se especifica um valor da fase no diagrama, é importante indicar qual a diferença de potencial que o fasor representa: a diferença entre o potencial do terminal identificado com o sinal + e o potencial do terminal com o sinal -. Observe-se que essa diferença de potencial muda de sinal periodicamente e em alguns intervalos o potencial no terminal - passa a ser maior do que no terminal +. Por vezes utiliza-se também uma ligação à e, nesse caso, não é necessário indicar sinais e admite-se que o fasor da tensão representa a diferença de potencial entre o terminal que não está ligado à terra e a terra.

## 12.5. Impedância complexa

Se todas as fontes de tensão num circuito forem fontes de tensão alternada com a mesma frequência, em qualquer parte do circuito a tensão é também alternada, com a mesma frequência, já que a regra das malhas garante que a tensão é igual à soma das outras tensões na mesma malha, com sinal oposto e conclui-se que se a tensão em algum segmento da malha é sinusoidal, a tensão em qualquer outro segmento também será sinusoidal e com a mesma frequência.

No capítulo anterior deduziu-se a lei de Ohm generalizada para as transformadas de Laplace da tensão e da corrente (equação (11.28)):

$$\tilde{V}(s) = Z(s) \tilde{I}(s) \quad (12.15)$$

Como  $V$  é uma função sinusoidal, a sua transformada de Laplace é (ver Apêndice B):

$$\tilde{V}(s) = \frac{\mathbf{V}}{s - i\omega} \quad (12.16)$$

e, portanto,

$$\tilde{I}(s) = \frac{\mathbf{V}}{(s - i\omega) Z(s)} \quad (12.17)$$

Admitindo que  $Z(i\omega)$  não é igual a zero, a expansão em frações parciais da expressão no segundo membro deve incluir um termo com denominador  $(s - i\omega)$

$$\tilde{I}(s) = \frac{\mathbf{I}}{s - i\omega} + \tilde{I}_{\text{trans}}(s) \quad (12.18)$$

em que o termo  $\tilde{I}_{\text{trans}}$  é a corrente transitória, que não tem nenhum fator  $(s - i\omega)$  no denominador.

Substituindo essa expressão e a transformada da tensão na lei de Ohm generalizada, obtém-se:

$$\frac{\mathbf{V}}{s - i\omega} = Z(s) \left( \frac{\mathbf{I}}{s - i\omega} + \tilde{I}_{\text{transit.}} \right) \quad (12.19)$$

Multiplicando ambos os membros da equação por  $(s - i\omega)$  e substituindo  $s$  por  $i\omega$  obtém-se:

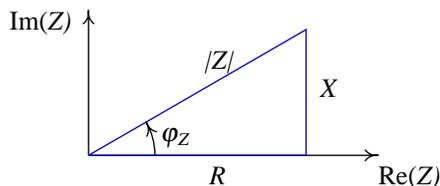
$$\boxed{\mathbf{V} = Z(i\omega) \mathbf{I}} \quad (12.20)$$

Isto é, os fasores da tensão e da corrente também verificam a lei de Ohm generalizada, com a frequência real  $s$  substituída por uma frequência imaginária  $i\omega$ , o que conduz a uma **impedância complexa**  $Z(i\omega)$ . Alguns autores preferem chamar  $Z(i\omega)$  simplesmente impedância; também pode-se usar a notação  $Z(\omega)$ , em vez de  $Z(i\omega)$ , mas  $Z(i\omega)$  mostra em forma explícita a sua relação com a impedância generalizada  $Z(s)$ .

A impedância complexa  $Z(i\omega)$  é uma função complexa que pode ser dividida nas suas partes real e imaginária:

$$\boxed{Z(i\omega) = R(\omega) + iX(\omega)} \quad (12.21)$$

sendo a função real  $R(\omega)$  designada de **resistência** e a função real  $X(\omega)$  designada de **reatância**. A resistência é sempre positiva, independentemente da frequência angular  $\omega$ , enquanto que a reatância pode ser positiva para algumas frequências (**reatância indutiva**) e negativa para outras frequências (**reatância capacitiva**).



**Figura 12.7.:** Triângulo de impedância, com a resistência  $R$  e a reatância  $X$  nos catetos.

Para um determinado valor de  $\omega$ , o módulo  $|Z|$  e o argumento  $\varphi_Z$  da impedância complexa  $Z(i\omega)$  podem ser calculados usando a representação gráfica de  $R +$

em  $X$  no plano complexo, obtendo-se o **triângulo de impedância** apresentado na figura 12.7. Como  $R$  não pode ter valores negativos, o ângulo  $\varphi_Z$  situa-se sempre entre  $-\pi/2$  e  $\pi/2$  radianos.

Note-se que a impedância complexa  $Z(i\omega)$  não é um fasor mas sim um número complexo ordinário, que pode ser multiplicada e somada a outras impedâncias usando as regras do produto e a adição de números complexos. Também se pode multiplicar ou dividir um fasor por várias impedâncias e o resultado é outro fasor com a mesma frequência.

Se os fasores da tensão e da corrente forem  $V_{\text{máx}} \angle \varphi_V$  e  $I_{\text{máx}} \angle \varphi_I$ , a lei de Ohm para fasores (equação (12.20)) resulta em:

$$V_{\text{máx}} \angle \varphi_V = (|Z| I_{\text{máx}}) \angle (\varphi_Z + \varphi_I) \quad (12.22)$$

podendo-se portanto separar a equação complexa (12.20) em duas equações reais:

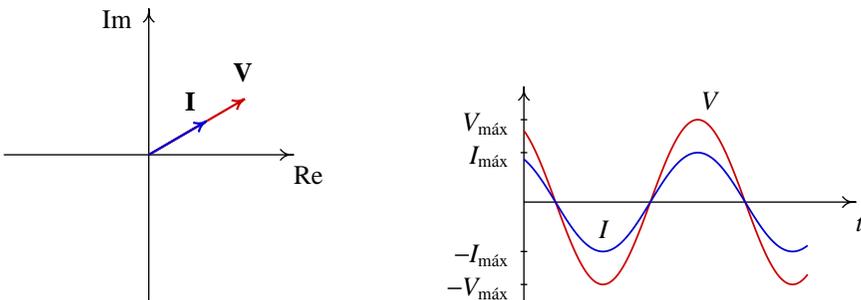
$$V_{\text{máx}} = |Z| I_{\text{máx}} \quad \varphi_V = \varphi_Z + \varphi_I \quad (12.23)$$

## Resistências

Numa resistência, a impedância generalizada é independente da frequência e igual a  $R$ ; como tal, o módulo da impedância complexa é  $|Z| = R$  e o seu argumento é nulo  $\varphi_Z = 0$ . As equações (12.23) indicam que as fases de  $\mathbf{V}$  e  $\mathbf{I}$  são iguais e os seus valores máximos verificam a relação,

$$V_{\text{máx}} = R I_{\text{máx}} \quad (12.24)$$

O lado esquerdo da figura 12.8 mostra os fasores da tensão e da corrente na resistência; imaginando esses dois fasores a rodar no sentido anti-horário, com a mesma velocidade angular, as suas projeções no eixo real (tensão e corrente em função do tempo) são como indicado no lado direito da figura. Diz-se que a tensão e a corrente estão **em fase**: os dois fasores têm a mesma direção e sentido, de forma que ambas as funções atingem os respectivos valores máximo e mínimo em simultâneo.



**Figura 12.8.:** Fasores da tensão e da corrente numa resistência.

## Condensadores

Nos condensadores, a impedância generalizada é  $1/(C s)$  e a impedância complexa é então:

$$Z(i\omega) = \frac{1}{i\omega C} = \frac{1}{\omega C} \angle -\frac{\pi}{2} \quad (12.25)$$

Em particular, a reatância de um condensador é negativa e inversamente proporcional à frequência angular,

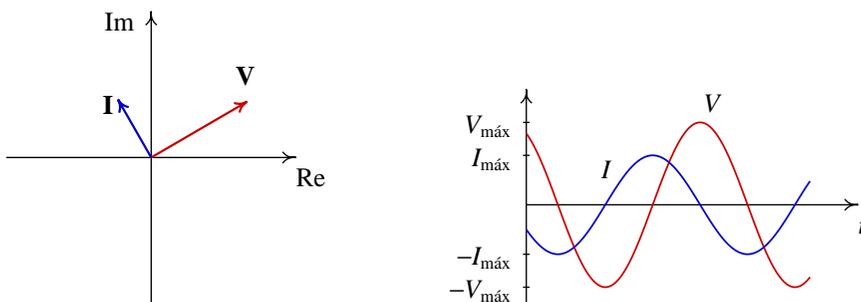
$$X_C = -\frac{1}{\omega C} \quad (12.26)$$

sendo a sua resistência nula.

Aplicando as equações (12.23) obtém-se

$$\mathbf{I} = V_{\text{máx}} \omega C \angle (\varphi_V + \pi/2)$$

e a fase da corrente é  $\pi/2$  maior que a da tensão. Na representação gráfica dos fasores (lado esquerdo da figura 12.9) o fasor da corrente é perpendicular ao da tensão e está adiantado (no sentido em que rodam). Imaginando os fasores a rodar no sentido anti-horário as projeções no eixo real conduzem aos gráficos representados no lado direito da figura. O adiantamento em  $\pi/2$  do fasor da corrente traduz-se no facto de  $I(t)$  atingir os seus valores máximos e mínimos sempre antes do que acontece a  $V(t)$  e nos instantes em que a tensão ou a corrente atingem o seu valor máximo ou mínimo, a outra função é nula nesse instante.



**Figura 12.9.:** Fasores da tensão e da corrente num condensador.

## Indutores

Nos indutores a impedância generalizada é  $L s$ , sendo a impedância complexa:

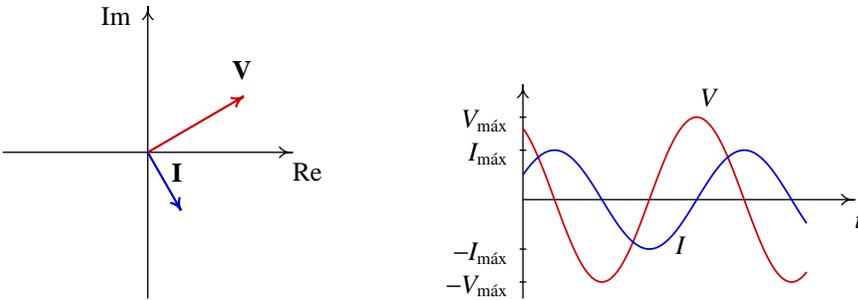
$$Z(i\omega) = i\omega L = \omega L \angle \pi/2 \quad (12.27)$$

A reatância de um indutor é positiva e diretamente proporcional à frequência angular:

$$X_L = \omega L \quad (12.28)$$

sendo a sua resistência nula.

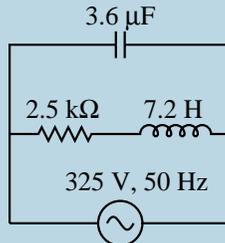
Pelas equações (12.23) conclui-se que a fase da corrente é  $\pi/2$  menor que a da tensão. Na representação gráfica dos fasores (lado esquerdo da figura 12.10) o fasor da corrente é perpendicular ao da tensão e está atrasado (no sentido da sua rotação). As projeções no eixo real quando os fasores rodam no sentido anti-horário conduzem às duas funções representadas no lado direito da figura. O atraso em  $\pi/2$  do fasor da corrente traduz-se em  $I(t)$  atingir os seus valores máximos e mínimos sempre a seguir a  $V(t)$  e, tal como nos condensadores, nos instantes em que a tensão ou a corrente atingem o seu valor máximo ou mínimo, a outra função é nula nesse instante.



**Figura 12.10.:** Fasores da tensão e da corrente num indutor.

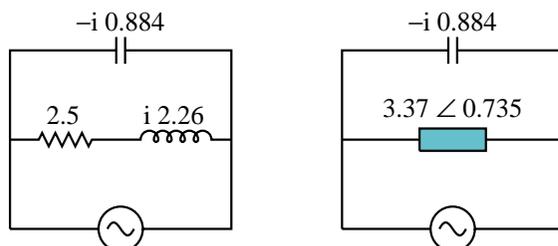
### Exemplo 12.2

Calcule a tensão e corrente instantâneas em todos os elementos do circuito representado no diagrama.

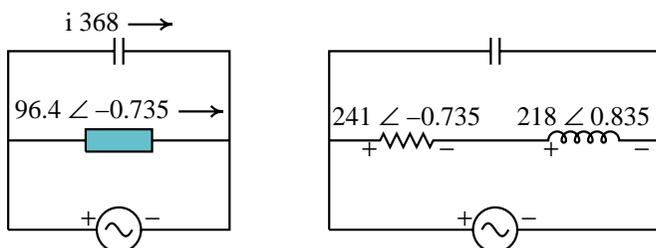


**Resolução.** Este é o circuito analisado no exemplo 11.3 do capítulo anterior. Usando o mesmo sistema de unidades tem-se: impedância em  $k\Omega$ , capacidade em  $\mu F$ , indutância em H, tempo em ms, frequência em kHz, tensão em V e corrente em mA. A frequência angular da fonte é:  $\omega = 2 \times \pi \times 50$  Hz, mas como deve ser convertida para kHz, tem o valor  $\pi/10$ .

A impedância da resistência é  $2.5$ , a do condensador  $10/(3.6\pi) \angle -\pi/2 = 0.884 \angle -\pi/2$  e a do indutor é  $7.2\pi/10 \angle \pi/2 = 2.26 \angle \pi/2$ . Como a resistência está em série com o indutor, podem ser substituídos por um único elemento com impedância igual à soma das impedâncias:



Como os dois elementos no circuito simplificado estão em paralelo, o fasor da tensão é o mesmo para os dois e igual ao fasor da fonte:  $325 \angle 0$ . Dividindo esse fasor pelas impedâncias dos dois elementos calculam-se as correntes correspondentes. Em seguida, multiplicando o fasor da segunda corrente pelas impedâncias da resistência e do indutor, calculam-se os fasores das tensões:



A partir dos fasores podem-se exprimir as tensões e correntes instantâneas:

$$\begin{aligned} \text{condensador: } & V = 325 \cos(0.1 \pi t) & I &= 368 \cos(0.1 \pi t + \pi/2) \\ \text{resistência: } & V = 241 \cos(0.1 \pi t - 0.735) & I &= 96.4 \cos(0.1 \pi t - 0.735) \\ \text{indutor: } & V = 218 \cos(0.1 \pi t + 0.835) & I &= 96.4 \cos(0.1 \pi t - 0.735) \end{aligned}$$

## 12.6. Potência nos circuitos de corrente alternada

Em qualquer ponto de um circuito de corrente alternada, a corrente é uma função sinusoidal; em cada período de oscilação, a mudança de sinal da função sinusoidal indica que o sentido da corrente muda. O integral da função, em cada período é nulo, o quer dizer que a carga total transferida é nula; durante metade do período há transporte de carga num sentido e no meio período seguinte a mesma carga é transportada no sentido oposto.

Não há transferência efetiva de carga nos circuitos de corrente alternada. As cargas de condução simplesmente oscilam à volta de uma posição de equilíbrio. Apesar de não haver transferência efetiva de cargas, há dissipação efetiva de energia elétrica, pois a oscilação das cargas é contrariada pela resistência dos condutores e há efeito Joule, independentemente do sentido da corrente.

Em qualquer dispositivo passivo num circuito com fonte de tensão alternada, a tensão e a corrente são funções sinusoidais com a mesma frequência da fonte, após uma possível resposta transitória inicial:

$$V(t) = V_{\text{máx}} \cos(\omega t + \varphi_V) \quad I(t) = I_{\text{máx}} \cos(\omega t + \varphi_I) \quad (12.29)$$

A **potência instantânea**,  $P(t)$ , é a potência no dispositivo em qualquer instante  $t$

$$P(t) = V(t) I(t) = V_{\text{máx}} I_{\text{máx}} \cos(\omega t + \varphi_V) \cos(\omega t + \varphi_I) \quad (12.30)$$

Usando uma relação trigonométrica para o produto de dois cossenos e o facto de ser  $(\varphi_V - \varphi_I) = \varphi_Z$  (equação (12.23)), conclui-se que a expressão anterior é equivalente a:

$$P(t) = \frac{1}{2} V_{\text{máx}} I_{\text{máx}} [\cos(2\omega t + \varphi_V + \varphi_I) + \cos(\varphi_Z)] \quad (12.31)$$

Note-se que o primeiro cosseno dentro dos parêntesis retos em (12.31) é uma função sinusoidal, com frequência igual ao dobro da frequência da fonte, enquanto o segundo cosseno é uma função constante. Ou seja, o produto das duas funções sinusoidais ( $V$  e  $I$ ) com a mesma frequência não conduz outra função sinusoidal com a mesma frequência, mas a uma função sinusoidal com o dobro da frequência, deslocada no eixo das ordenadas.

A potência instantânea (12.31) pode ser positiva ou negativa em alguns intervalos e nula em alguns instantes, dependendo do valor da constante  $\cos(\varphi_Z)$ , chamada **fator de potência**. Como  $\varphi_Z$  está entre  $-\pi/2$  e  $\pi/2$ , o fator de potência situa-se entre 0 e 1.

Se a reatância for nula (dispositivo resistivo) o argumento da impedância ( $\varphi_Z$ ) é nulo, o fator de potência é igual a 1 e a potência instantânea é sempre positiva, indicando que o dispositivo está sempre a dissipar energia. Já se a resistência for nula (dispositivo reativo), o argumento da impedância é  $\pm\pi/2$ , o fator de potência é nulo e os intervalos em que a potência instantânea é positiva (dissipação de energia) são do mesmo comprimento que os intervalos em que é negativa (fornecimento de energia); a potência média é nula.

No caso geral, em que o fator de potência é maior que 0 e menor que 1, os intervalos em que há dissipação de energia são mais compridos do que os intervalos em que há fornecimento de energia e, em média, o circuito dissipa energia.

O valor médio da potência,  $\bar{P}$ , calcula-se integrando a função (12.31) durante um período e dividindo pelo valor do período. O integral do primeiro termo é nulo,

durante um período, enquanto que o valor médio do termo constante é igual a si próprio. Consequentemente, a **potência média** é:

$$\bar{P} = \frac{1}{2} V_{\text{máx}} I_{\text{máx}} \cos \varphi_Z \quad (12.32)$$

e tem valor positivo ou nulo, indicando que, em média o dispositivo passivo não pode fornecer energia.

É também habitual definir a **tensão eficaz** e a **corrente eficaz**:

$$V_{\text{ef}} = \frac{V_{\text{máx}}}{\sqrt{2}} \quad I_{\text{ef}} = \frac{I_{\text{máx}}}{\sqrt{2}} \quad (12.33)$$

e como tal, a potência média é igual ao produto da tensão e corrente eficazes e o fator de potência:

$$\bar{P} = V_{\text{ef}} I_{\text{ef}} \cos \varphi_Z$$

A tensão máxima de 325 V usada na União Europeia corresponde a uma tensão eficaz de 230 V. No continente americano usa-se tensão máxima de 170 V, a 60 Hz, que corresponde a uma tensão eficaz de 120 V.

## 12.7. Filtros de frequência

A equação (11.36), obtida no capítulo anterior, é válida para qualquer sinal de entrada. Para um sinal de entrada  $V_e$  alternado, usando a expressão para a transformada de Laplace das funções sinusoidais (Apêndice B) obtém-se,

$$\tilde{V}(s) = \frac{V_e \tilde{H}(s)}{s - i\omega} \quad (12.34)$$

Se  $\tilde{H}(i\omega)$  tiver um valor finito, a expansão de  $\tilde{V}$  em frações parciais conduz a

$$\tilde{V}(s) = \frac{\mathbf{V}}{s - i\omega} + \tilde{V}_{\text{trans}}(s) \quad (12.35)$$

onde  $\mathbf{V}$  é um número complexo, que corresponde ao fasor da saída (após a resposta transitória), e o termo  $\tilde{V}_{\text{trans}}$  é a transformada da tensão de resposta transitória, que não tem o fator  $(s - i\omega)$  no denominador.

Substituindo essa expansão na equação (12.34), obtém-se:

$$\frac{\mathbf{V}}{s - i\omega} + \tilde{V}_{\text{trans}}(s) = \frac{V_e \tilde{H}(s)}{s - i\omega} \quad (12.36)$$

Multiplicando ambos os membros da equação por  $(s - i\omega)$  e substituindo  $s$  por  $i\omega$  obtém-se:

$$\boxed{\mathbf{V} = R(\omega) \mathbf{V}_e} \quad (12.37)$$

onde a função complexa  $R(\omega)$  é denominada **resposta de frequência**:

$$\boxed{R(\omega) = \tilde{H}(i\omega)} \quad (12.38)$$

Assim, se a tensão de entrada for a tensão alternada  $V_{\text{máx}} \cos(\omega t + \varphi)$ , a tensão de saída é,

$$V = V_{\text{máx}} |R(\omega)| \cos(\omega t + \varphi + \arg(R(\omega))) \quad (12.39)$$

onde  $|R(\omega)|$  e  $\arg(R(\omega))$  são o módulo e o argumento da função complexa  $R(\omega)$ .

Por exemplo, no caso do filtro passa-alto, mostrou-se no capítulo anterior que a função de transferência é (equação (11.38)):

$$\tilde{H}(s) = \frac{t_C s}{t_C s + 1} \quad (12.40)$$

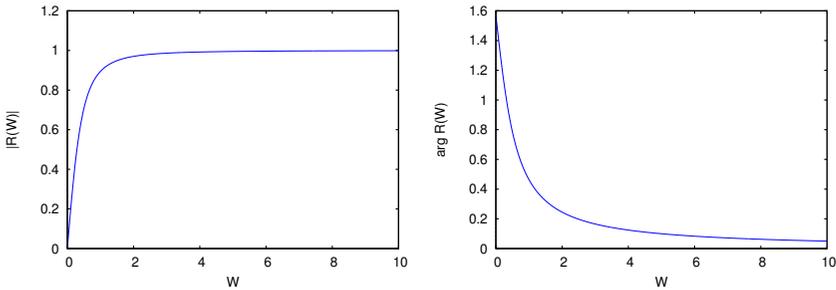
A função de resposta de frequência é então:

$$R(\omega) = \frac{i t_C \omega}{1 + i t_C \omega} \quad (12.41)$$

e o módulo e o argumento são:

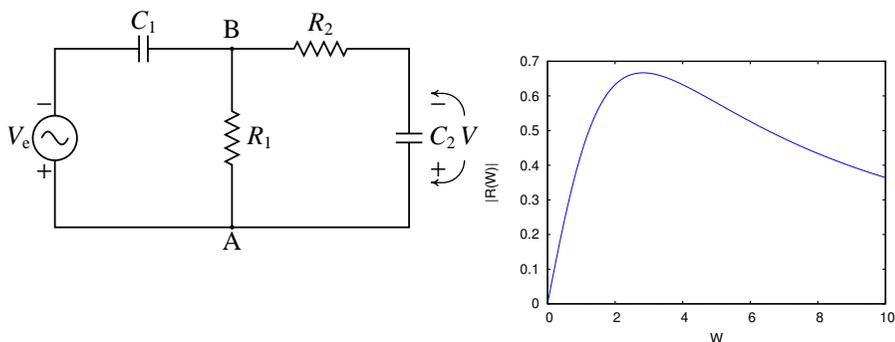
$$|R(\omega)| = \frac{t_C \omega}{\sqrt{1 + (t_C \omega)^2}} \quad \arg(R(\omega)) = \frac{\pi}{2} - \arctan(t_C \omega) \quad (12.42)$$

A figura 12.11 mostra a função resposta de frequência para um filtro passa-alto com frequência angular de corte ( $1/t_C$ ) igual a 0.5. Note-se que quando  $\omega_c = 1/t_C$ ,  $R$  tem módulo  $1/\sqrt{2} = 0.707$  e argumento igual a  $\pi/4$ .



**Figura 12.11.:** Módulo e argumento da função resposta de frequência de um filtro passa-alto com frequência angular de corte  $\omega_c = 0.5$ .

Vários filtros podem ser combinados, em forma sequencial, e a função de resposta é o produto das funções de todos os filtros na sequência. Por exemplo, o circuito na figura 12.12 é a combinação de um filtro passa-alto, com frequência angular de corte  $\omega_1 = 1/(R_1 C_1)$  e um filtro passa-baixo, com frequência angular de corte  $1/(R_2 C_2)$ .



**Figura 12.12.:** Filtro passa-banda e módulo da sua função de resposta de frequência com frequências de corte de 2 e 4.

A tensão entre os pontos A e B é a saída do filtro passa-alto, que constitui a tensão de entrada do filtro passa-baixo. Como tal, multiplicando as funções resposta do filtro passa-alto (equação (12.41)) e do filtro passa-baixo (problema 7 do capítulo anterior) obtém-se:

$$R(\omega) = \frac{i t_{C_1} \omega}{(1 + i t_{C_1} \omega)(1 + i t_{C_2} \omega)} \quad (12.43)$$

onde as constantes de tempo são  $t_{C_1} = R_1 C_1$  e  $t_{C_2} = R_2 C_2$

O filtro passa-alto atenua as frequências angulares menores que  $\omega_1 = 1/t_{C_1}$  e o filtro passa-baixo atenua as frequências maiores que  $\omega_2 = 1/t_{C_2}$ . Utilizando condensadores e resistências com valores que verifiquem  $\omega_1 < \omega_2$ , o filtro atenuará as frequências fora da banda compreendida entre  $\omega_1$  e  $\omega_2$ , deixando passar as frequências angulares na banda  $[\omega_1, \omega_2]$ ; esse tipo de filtro é designado **passa-banda**. A figura 12.12 mostra o módulo da função resposta de frequência para o caso  $\omega_1 = 2$ ,  $\omega_2 = 4$ .

Um filtro ideal deveria ter uma função de resposta nula, para as frequências que se pretende eliminar, e 1 nas outras frequências. Com circuitos mais complicados conseguem-se obter filtros com comportamento mais próximo do ideal. Outro fator a ter em conta é a resposta transitória, que tem sido ignorada por ser nula após algum tempo, ma num filtro de boa qualidade é necessário garantir que a resposta transitória desaparece o mais rapidamente possível.

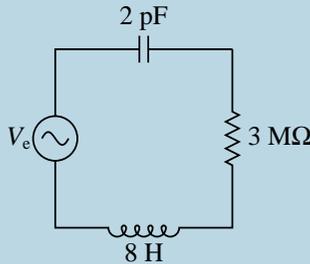
## 12.8. Ressonância

Nos circuitos com condensadores e indutores em série, a reatância equivalente  $X$  é função contínua da frequência  $f$ . Quando  $f$  se aproxima de infinito, o limite da reatância é  $+\infty$  e quando  $f$  se aproxima de zero, o limite da reatância é  $-\infty$ . Nesses dois limites o módulo da impedância equivalente é  $+\infty$ , que implica corrente nula no circuito.

Existe uma frequência intermédia, designada de **frequência de ressonância**, para a qual a reatância é nula e o módulo da impedância é mínimo; isso implica que o ângulo da impedância ( $\varphi$ ) é nulo, o fator de potência ( $\cos \varphi$ ) é 1 e a corrente máxima e a potência média atingem valores máximos em ordem a  $f$ . Ou seja, quando a frequência da fonte é igual à frequência de ressonância do circuito, a tensão e a corrente oscilam em fase e diz-se que o circuito está em **ressonância** com a fonte. A frequência (ou frequências) de ressonância é um valor característico de cada circuito. Nos circuitos em que os indutores e condensadores não estão em série, a frequência de ressonância é a que produz o valor máximo possível para  $I_{\text{máx}}$  e nessas condições a reatância não é necessariamente nula nem o fator de potência igual a 1.

### Exemplo 12.3

Calcule a frequência de ressonância do circuito e a potência média máxima que pode fornecer a este circuito uma fonte com tensão máxima  $V_{\text{máx}}$ .



**Resolução.** Com a resistência em  $M\Omega$  e a capacidade em  $pF$ , convém usar  $\mu s$  para a unidade de tempo e, portanto,  $MHz$  para a frequência e  $H$  para a indutância.

A impedância total do circuito é a soma das 3 impedâncias:

$$Z = 3 + i8\omega - \frac{i}{2\omega} = 3 + i\left(8\omega - \frac{1}{2\omega}\right)$$

Observe-se que a parte real da impedância equivalente não depende da frequência, porque o condensador e o indutor estão em série e, como tal, o valor mínimo do módulo da impedância obtém-se quando a parte imaginária seja igual a zero:

$$8\omega - \frac{1}{2\omega} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad f = \frac{\omega}{2\pi} = 0.0398$$

No sistema de unidades utilizado, a frequência de ressonância é  $f = 0.0398 \text{ MHz} = 39.8 \text{ kHz}$ .

Se a fonte tivesse essa frequência, a impedância equivalente seria real,  $Z = 3 \text{ M}\Omega$ , e a corrente máxima teria o valor  $I_{\text{máx}} = V_{\text{máx}}/3$  ( $\mu\text{A}$ , se  $V_{\text{máx}}$  estiver em volts). A potência média máxima é  $\bar{P} = V_{\text{máx}} I_{\text{máx}}/2 = V_{\text{máx}}^2/6$  ( $\mu\text{W}$ , se  $V_{\text{máx}}$  estiver em volts).

---

No circuito do exemplo anterior, a tensão de entrada carrega e descarrega o condensador. Inicialmente, a carga no condensador oscila com a frequência de oscilação da tensão na fonte; mas quando a carga no condensador é elevada, a diferença de potencial do condensador pode contrariar a tensão da fonte, impedindo a entrada de mais carga.

A situação é semelhante a uma massa pendurada de uma mola elástica, na qual atua outra força externa que tenta manter a massa oscilando para cima e para baixo. Se a força externa não oscila com a uma frequência igual à frequência própria de oscilação da mola elástica, há momentos em que a força externa está a tentar fazer subir a massa, enquanto a mola elástica faz força no sentido oposto.

No caso do circuito, se a fonte não existisse mas o condensador tivesse uma carga inicial, começaria a descarregar, produzindo corrente. No momento em que o condensador descarrega completamente, o indutor faz com que a corrente persista por alguns instantes, recarregando o condensador com cargas de sinais opostos à carga inicial. O ciclo repete-se, com uma frequência própria do circuito. No entanto, a resistência faz com que a carga do condensador seja menor em cada ciclo, até desaparecer (equilíbrio estável). Existe ressonância quando a fonte oscila com a frequência própria do circuito.

Se a resistência fosse nula, quando a frequência da fonte fosse a frequência de ressonância,  $Z$  seria nula e aparentemente  $I_{\text{máx}} = V_{\text{máx}}/Z$  seria infinita. No entanto, a corrente não aumenta instantaneamente até esse valor, mas sim gradualmente, com as oscilações da carga no condensador. Quando essa carga máxima se torna muito elevada, há rutura do dielétrico no condensador ou a corrente elevada queima o indutor.

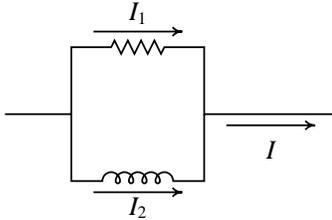
## Perguntas

1. No circuito representado no diagrama,

$$I_1(t) = \cos(\omega t + 2\pi/3)$$

$$I_2(t) = \sqrt{3} \cos(\omega t + \pi/6)$$

Calcule  $I(t)$ .

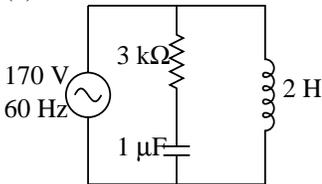


- A.  $3 \cos(\omega t - \pi/2)$   
 B.  $2 \cos(\omega t - \pi/3)$   
 C.  $3 \cos(\omega t + \pi/2)$   
 D.  $\sqrt{3} \cos(\omega t + \pi/2)$   
 E.  $2 \cos(\omega t + \pi/3)$
2. Um condensador de  $2.73 \mu\text{F}$  e uma resistência de  $1166 \Omega$  estão ligados em série a uma fonte de tensão alternada com frequência de  $50 \text{ Hz}$  e tensão máxima de  $325 \text{ V}$ . Calcule a corrente eficaz na resistência.
- A.  $247 \text{ mA}$       D.  $212 \text{ mA}$   
 B.  $139 \text{ mA}$       E.  $170 \text{ mA}$   
 C.  $99 \text{ mA}$
3. Um condensador de  $2.73 \mu\text{F}$  e uma resistência de  $1166 \Omega$  estão ligados em série a uma fonte de tensão alternada de  $50 \text{ Hz}$ . Pode-se concluir então que a tensão da fonte está:
- A. Adiantada  $90^\circ$  em relação à corrente.  
 B. Adiantada  $45^\circ$  em relação à corrente.  
 C. Atrasada  $90^\circ$  em relação à corrente.  
 D. Atrasada  $45^\circ$  em relação à corrente.  
 E. Em fase com a corrente.
4. Qual das afirmações seguintes é verdadeira, em relação a uma bobina de  $2 \text{ mH}$  e um condensador de  $5 \text{ pF}$ ?
- A. O valor absoluto da reatância da bobina é menor.  
 B. O valor absoluto da reatância do condensador é menor.  
 C. Se a corrente for contínua, o valor absoluto da reatância da bobina é menor.  
 D. Se a corrente for contínua, o valor absoluto da reatância do condensador é menor.  
 E. Se a corrente for contínua, a reatância dos dois dispositivos é nula.
5. Num circuito RLC de corrente alternada, em série, quando a reatância equivalente for nula, qual das seguintes afirmações é verdadeira:
- A. A impedância é nula.  
 B. O fator de potência é nulo.  
 C. O ângulo de defasamento é nulo.  
 D. A corrente é nula.  
 E. A tensão é nula.

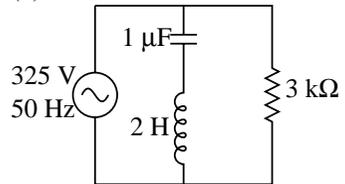
## Problemas

1. A resistência de uma bobina é  $150 \Omega$  e a sua indutância é  $1.4 \text{ H}$ . A bobina é ligada à rede elétrica com tensão máxima  $325 \text{ V}$  e frequência de  $50 \text{ Hz}$ . Encontre a expressão para a corrente na bobina em função do tempo  $t$ .
2. Uma bobina, com indutância de  $36 \text{ mH}$  e resistência de  $40 \Omega$ , liga-se em paralelo com um condensador de  $32 \text{ nF}$  e com uma fonte de tensão alternada  $V(t) = 345 \cos(150\pi t)$  (em volts, e o tempo  $t$  em segundos). Calcule: (a) A corrente máxima na bobina. (b) A corrente eficaz no condensador. (c) A potência média dissipada na bobina.
3. Demonstre que a transformada inversa da equação (12.3) conduz à corrente alternada indicada em 12.5
4. No problema 12 do capítulo 10, calcule a frequência do circuito e os valores máximos da corrente e da carga.
5. Nos dois circuitos representados na figura, calcule a corrente e a tensão em todos os elementos do circuito.

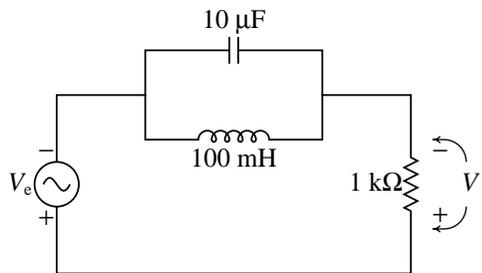
(a)



(b)

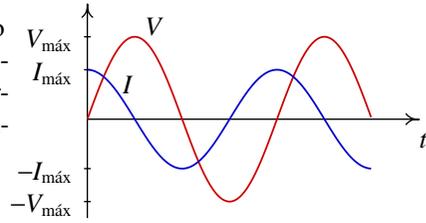


6. A figura mostra um filtro **rejeita-banda** que atenua as frequências angulares próximas de  $1 \text{ kHz}$ . (a) Calcule a função de resposta  $R(\omega)$  do circuito. (b) Mostre que para  $\omega = 1 \text{ kHz}$ ,  $R(\omega)$  é igual a zero. (c) Calcule o módulo de  $R(\omega)$  e desenhue o seu gráfico para  $\omega$  entre  $0$  e  $2 \text{ kHz}$ .

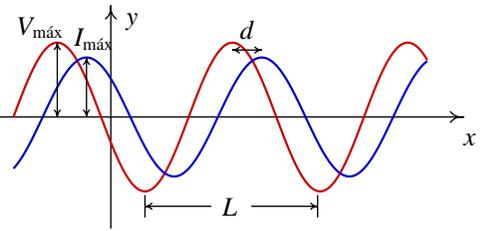


7. Num segmento de um circuito de corrente alternada a tensão é  $24 \cos(\pi t/10 + 1.5)$  (em volt, com  $t$  em milissegundos) e a corrente é  $8 \cos(\pi t/10 + 2.0)$  ( $\mu\text{A}$ , com  $t$  em ms). (a) Calcule a resistência e reatância desse segmento. (b) O segmento do circuito avariou e pretende-se substituí-lo com resistências, condensadores ou indutores, mas o orçamento só permite comprar dois dispositivos. Quais dispositivos deviam ser comprados, com que valores e como deviam ser ligados no circuito?

8. A figura mostra a tensão e a corrente num condensador. A corrente é produzida pela tensão: se não houver tensão elétrica, não há corrente. Como se explica então que no instante  $t = 0$  a corrente seja diferente de zero, sendo a tensão nula?



9. A figura mostra o ecrã de um osciloscópio onde aparecem a tensão e a corrente num elemento de um circuito. As distâncias  $L$  e  $d$  foram medidas diretamente no ecrã, obtendo-se os valores  $L = 6$  cm,  $d = 1$  cm. O osciloscópio também permite determinar que a tensão máxima é  $V_{\text{máx}} = 36$  V e a corrente máxima é  $I_{\text{máx}} = 12$  mA. Com esses dados, calcule a parte real e a parte imaginária da impedância do elemento do circuito.



## Respostas

**Perguntas:** 1. E. 2. B. 3. D. 4. C. 5. C.

### Problemas

1.  $I(t) = 0.669 \sin(314.16t - 1.2421)$  A.

2. (a) 7.94 A. (b) 3.68 mA (c) 1.261 kW.

3. A expressão para a transformada da corrente é  $\tilde{I} = \frac{I_0 s}{s^2 + \omega^2} = \text{Re} \left( \frac{I_0}{s - i\omega} \right)$ ,  
onde  $\omega = \sqrt{1/(LC)}$  e a transformada inversa é a expressão (12.5).

4.  $f = 1.779$  kHz,  $I_{\text{máx}} = 20$  mA,  $Q_{\text{máx}} = 1.789$   $\mu$ C.

5. (a) Tensões em V, correntes em mA, tempo em ms.

condensador:  $V = 113 \cos(0.378t - 0.847)$      $I = 42.5 \cos(0.378t + 0.724)$

resistência:  $V = 127 \cos(0.378t + 0.724)$      $I = 42.5 \cos(0.378t + 0.724)$

indutor:  $V = 170 \cos(0.378t)$      $I = 225 \cos(0.378t - \pi/2)$

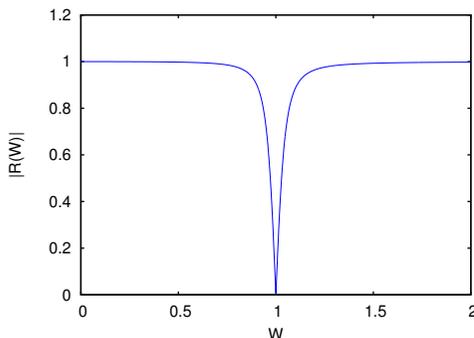
(b) Tensões em V, correntes em mA, tempo em ms.

condensador:  $V = 405 \cos(0.314t)$      $I = 127 \cos(0.314t + \pi/2)$

resistência:  $V = 325 \cos(0.314t)$      $I = 108 \cos(0.314t)$

indutor:  $V = 79.9 \cos(0.314t + \pi)$      $I = 127 \cos(0.314t + \pi/2)$

6. (a)  $R(\omega) = \frac{10\omega^2 - 10}{10\omega^2 - 10 - i\omega}$     (c)  $|R(\omega)| = \frac{10|\omega^2 - 10|}{\sqrt{100\omega^4 - 199\omega^2 + 100}}$



7. (a) resistência 2.63 M $\Omega$  e reatância  $-1.44$  M $\Omega$ . (b) Uma resistência de 2.63 M $\Omega$  e um condensador de 2.21 nF, ligados em série.

8. A tensão e corrente apresentadas no gráfico apenas poderão ter essas formas sinusoidais algum tempo após ter sido ligada a fonte, quando a resposta transitória já tiver desaparecido. Se a fonte de tensão fosse ligada apenas no instante  $t = 0$ , a corrente não poderia ter nesse instante um valor diferente de zero; em vez da função sinusoidal no gráfico, teríamos uma função que parte de zero e se aproxima gradualmente da função sinusoidal (resposta transitória mais resposta sinusoidal).
9.  $z = (1.5 + i 2.598) \text{ k}\Omega$

## 13. Eletrodinâmica



**James Clerk Maxwell (1831–1879)**

Maxwell nasceu em Edimburgo. Com 14 anos escreveu o seu primeiro artigo científico sobre curvas com mais de dois focos. Em 1854 obteve o título de matemático pela Universidade de Cambridge. Entre 1855 e 1856, desenvolveu e demonstrou matematicamente a teoria das linhas de campo de Faraday, mostrando como é possível descrever os campos elétrico e magnético, e a sua relação, com umas poucas equações matemáticas. Em 1856 regressou à Escócia para acompanhar a doença do seu pai. Nessa época recebeu um prémio pela melhor explicação sobre a natureza dos anéis de Saturno; Maxwell demonstrou que a estabilidade dos anéis era devida a serem formados por muitas rochas pequenas. Em 1860 aceitou um emprego em Londres onde permaneceu até 1866. Durante esse período calculou a velocidade de propagação do campo eletromagnético concluindo que era igual à da luz e que portanto esta devia ser uma onda eletromagnética. A partir do estudo estatístico do movimento das moléculas, e independentemente de Boltzmann, formulou uma teoria cinética dos gases que reproduz as propriedades fenomenológicas da termodinâmica.

Da mesma forma que um campo magnético variável induz um campo elétrico, veremos neste capítulo que a variação temporal do campo elétrico induz um campo magnético; isto foi descoberto por Maxwell, de forma teórica, a partir da sua observação de que, quando existem campos elétricos dependentes do tempo, a lei de Ampère não é compatível com a conservação da carga. Para garantir a conservação da carga, Maxwell introduziu na lei da Ampère um termo dependente da derivada do campo elétrico, a designada corrente de deslocamento.

Incluindo a corrente de deslocamento, Maxwell mostrou que as leis de Ampère, Faraday e Gauss, juntamente com a condição de que a divergência do campo magnético é nula, formavam um sistema de equações que definiam de forma consistente o campo eletromagnético. Estas quatro equações de Maxwell sintetizam a teoria eletromagnética e levaram Maxwell a descobrir a verdadeira natureza da luz, como veremos no Capítulo 13.

### 13.1. Corrente de deslocamento

A lei de Ampère (9.19) relaciona a densidade de corrente num ponto com o rotacional do campo magnético:

$$\vec{J} = \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B}. \quad (13.1)$$

Como a divergência do rotacional de qualquer campo vetorial é zero, a equação anterior implica que a divergência da densidade de corrente é nula, em qualquer ponto. Isto está em contradição com o princípio fundamental da conservação da carga elétrica; como vimos no Capítulo 6, a expressão da conservação da carga em termos matemáticos é a equação de continuidade, que na forma diferencial é

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (13.2)$$

Assim, a lei de Ampère só poderá ser válida para correntes estacionárias, onde não exista aumento ou diminuição da carga volúmica em qualquer ponto. Para encontrar a forma mais geral do rotacional do campo  $\vec{B}$ , que reproduza a lei de Ampère no caso particular das correntes estacionárias, vamos partir da equação de continuidade. Se substituirmos a carga volúmica na Equação (13.2), usando a lei de Gauss (4.38), obtemos

$$\vec{\nabla} \cdot \left( \vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = 0. \quad (13.3)$$

O termo entre parênteses é um campo vetorial  $\vec{F}$  com divergência igual a zero:

$$\vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{F}. \quad (13.4)$$

No caso particular em que a derivada do campo elétrico seja zero, a densidade de corrente será igual ao campo  $\vec{F}$  e para que a lei de Ampère seja válida, o campo  $\vec{F}$  deverá ser igual a

$$\vec{F} = \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B}, \quad (13.5)$$

e a divergência de  $\vec{F}$  é nula como precisávamos, já que a divergência do rotacional de qualquer campo é sempre nula. As Equações (13.4) e (13.5) conduzem à **lei de Ampère- Maxwell**:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (13.6)$$

Quando existem correntes não-estacionárias, a acumulação ou redução da carga em alguns pontos implica campos elétricos variáveis que introduzem um termo adicional:

$$\vec{J}_d = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (13.7)$$

conhecido como **densidade de corrente de deslocamento**.

A forma integral da lei de Ampère-Maxwell obtém-se multiplicando escalarmente os dois lados da Equação (13.6) por  $d\vec{A}$  e integrando sobre uma superfície S:

$$\iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot d\vec{A} = \mu_0 \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{A}. \quad (13.8)$$

O integral no lado esquerdo pode ser escrito como um integral de linha, usando o teorema de Stokes (4.30). O integral de  $\vec{J}$ , no lado direito, é a corrente através da curva C e o integral de  $\vec{E}$  é o fluxo elétrico  $\Phi$ . Assim, o resultado obtido é semelhante à lei de Ampère, com uma corrente modificada:

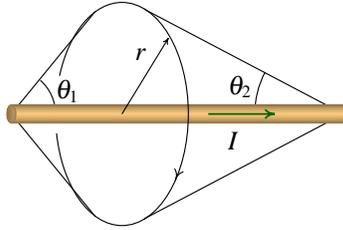
$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 (I_C + I_d), \quad (13.9)$$

onde C é a curva fronteira de S,  $I_C$  é a corrente através da superfície S e a **corrente de deslocamento**  $I_d$  é definida da seguinte forma:

$$I_d = \epsilon_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t}. \quad (13.10)$$

### Exemplo 13.1

Um fio retilíneo, de comprimento  $L$  é percorrido por uma corrente  $I$  (Figura 13.1). Calcule o campo magnético produzido, usando a lei de Ampère-Maxwell. Mostre que se obtém o mesmo resultado usando a lei de Biot-Savart.



**Figura 13.1:** Fio isolado com corrente elétrica.

Os pontos à mesma distância  $r$  do fio e equidistantes de um dos extremos são equivalentes e, portanto, as linhas de campo são círculos  $C$  perpendiculares ao fio e com centro nele (Figura 13.1). Ao longo do círculo  $C$ , de raio  $r$ , o integral de linha do campo  $\vec{B}$  é

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = 2\pi r B. \quad (13.11)$$

A corrente no fio não é estacionária, pois existe acumulação de carga nos dois extremos: carga positiva no extremo em que a corrente aponta e negativa no oposto. Estas cargas produzem um fluxo elétrico variável através do círculo  $C$ . Como as cargas nos extremos aumentam, o fluxo que elas produzem também aumenta, gerando uma corrente de deslocamento. No extremo do lado direito acumula-se carga positiva  $q > 0$ , e no extremo do lado esquerdo uma carga igual e oposta  $-q$ . No sentido definido para a circunferência  $C$  na Figura 13.1, as duas cargas produzem um fluxo elétrico negativo através do círculo com fronteira em  $C$ ; cada fluxo pode ser calculado usando a Equação (2.14):

$$\Phi_1 = -k q \Omega_1, \quad \Phi_2 = -k q \Omega_2,$$

onde  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$  são os ângulos sólidos da curva  $C$  a partir dos dois extremos. Para um cone pode mostrar-se que o ângulo sólido  $\Omega$  depende do ângulo  $\theta$  (ver problema 2):

$$\Omega = 2\pi(1 - \cos \theta); \quad (13.12)$$

portanto, o fluxo elétrico total através de  $C$  é

$$\Phi = 2\pi k q (\cos \theta_1 + \cos \theta_2 - 2).$$

A derivada temporal de  $q$  é exactamente a corrente  $I$ ; a derivada do fluxo elétrico, multiplicada por  $\epsilon_0$  é igual à corrente de deslocamento:

$$I_d = 2\pi k \epsilon_0 \frac{dq}{dt} (\cos \theta_1 + \cos \theta_2 - 2) = \frac{I}{2} (\cos \theta_1 + \cos \theta_2 - 2).$$

A corrente  $I_C$  que atravessa o círculo delimitado por  $C$  é a própria corrente  $I$ ; a corrente total na lei de Ampère-Maxwell será

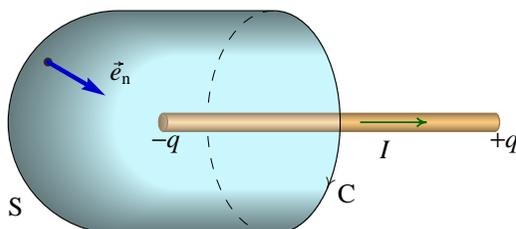
$$I_t = I_C + I_d = \frac{I}{2}(\cos \theta_1 + \cos \theta_2) . \quad (13.13)$$

Substituindo (13.11) e (13.13) na lei de Ampère-Maxwell (13.9), obtemos

$$B = \frac{k_m I}{r}(\cos \theta_1 + \cos \theta_2) ,$$

que é o mesmo resultado obtido no Exemplo 9.1 do Capítulo 9, usando a lei de Biot-Savart. Quando o fio é muito comprido, os ângulos  $\theta_1$  e  $\theta_2$  são aproximadamente retos e a corrente de deslocamento é quase nula.

No cálculo da corrente total, podíamos ter usado, em vez do círculo de raio  $r$ , qualquer outra superfície com fronteira em  $C$ . Por exemplo, usemos a superfície  $S$  indicada na Figura 13.2; essa superfície não corta o fio e, portanto,  $I_C$  será igual a zero. Contudo, a corrente de deslocamento compensará a diminuição de  $I_C$ , resultando a mesma corrente total. O fluxo  $\Phi_2$  da carga positiva continua sendo o mesmo que no caso do círculo:



**Figura 13.2.:** Outra forma de definir a superfície  $S$  delimitada por  $C$ .

$$2\pi k q(\cos \theta_2 - 1) ;$$

o fluxo da carga  $-q$  não é igual ao do círculo, pois a superfície  $S$  está agora à esquerda da carga e o versor normal ( $\hat{n}$  na Figura 13.2) aponta na direção da carga; assim, o fluxo  $\Phi_1$  é positivo. Para calcular  $\Phi_1$  imaginemos uma superfície fechada, formada por  $S$  mais o círculo com fronteira em  $C$ ; através dessa superfície fechada, com  $-q$  no seu interior, o fluxo para dentro é igual a  $4\pi k q$ . O fluxo no círculo é igual e de sinal contrário ao fluxo calculado na primeira parte do problema (o versor normal tem agora o sentido oposto), de tal forma que

$$\Phi_1 = 4\pi k q + 2\pi k q(\cos \theta_1 - 1) .$$

O fluxo total é

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = 2\pi k q(\cos \theta_1 + \cos \theta_2) ;$$

e multiplicando a sua derivada por  $\epsilon_0$  obtemos a corrente de deslocamento:

$$I_d = \frac{I}{2}(\cos \theta_1 + \cos \theta_2),$$

a qual é idêntica à corrente calculada no primeiro caso. A corrente  $I$ , neste exemplo, não é estacionária ( $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} \neq 0$ ), mas a corrente total ( $I_d + I_C$ ) é, já que é proporcional ao rotacional do campo  $\vec{B}$ ; a corrente total através de qualquer superfície fechada é sempre nula.

## 13.2. Equações de Maxwell

Em capítulos anteriores já foram introduzidas as equações básicas da eletrostática e da magnetostática. No caso de campos não estáticos vimos, no Capítulo 10 e na secção anterior, como devem ser modificadas as equações básicas; nesse caso, os campos elétrico e magnético já não são independentes. Antes de fazermos um sumário das equações básicas, vamos ver que também existe uma relação importante entre a constante de Coulomb e a constante magnética.

A constante  $\mu_0 \epsilon_0$  que aparece na lei de Ampère-Maxwell, pode ser calculada a partir da constante de Coulomb  $k$  e da constante magnética  $k_m$ :

$$\mu_0 \epsilon_0 = \frac{k_m}{k} = \frac{1}{9 \times 10^{16}} \frac{\text{s}^2}{\text{m}^2} = \frac{1}{c^2}, \quad (13.14)$$

onde  $c$  é a velocidade da luz no vácuo ( $c = 3 \times 10^8$  m/s). Esta relação entre as constantes eletromagnéticas e a velocidade da luz não é coincidência, mas é devida ao facto da luz ser uma onda eletromagnética, como veremos no próximo capítulo.

As quatro equações fundamentais que definem os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  são as equações que definem as suas divergências e rotacionais, nomeadamente a lei de Gauss (4.38), a lei de Faraday (10.36), a Equação (9.21) e a lei de Ampère-Maxwell (13.6), representadas, respetivamente, pelas seguintes equações:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (13.15a)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (13.15b)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (13.15c)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (13.15d)$$

Estas quatro equações, conhecidas como **equações de Maxwell**, definem os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  em qualquer ponto, dentro de qualquer meio, em função da carga

volúmica e da densidade de corrente. A densidade de corrente depende do movimento das cargas o qual é determinado a partir das leis da mecânica e considerando que a força eletromagnética sobre uma partícula com carga  $q$  é a Força de Lorentz,

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) . \quad (13.16)$$

Dentro da matéria o problema seria intratável se considerássemos todas as cargas e correntes existentes dentro dos átomos; de qualquer forma, a escala de distâncias relevante a nível experimental é várias ordens de grandeza maior do que um átomo. Assim, é mais conveniente incluir os campos das cargas e correntes polarizadas nos átomos em dois novos campos  $\vec{D}$  e  $\vec{H}$  introduzidos nos Capítulos 5 e 9. Em função destes campos as equações de Maxwell são

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_0 , \quad (13.17a)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} , \quad (13.17b)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 , \quad (13.17c)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}_0 + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} , \quad (13.17d)$$

onde  $\rho_0$  é a carga volúmica “livre”, excluindo as cargas polarizadas nos átomos,  $\vec{J}_0$  é a densidade de corrente “livre”, sem incluir correntes de polarização,  $\vec{D}$  é o deslocamento elétrico e  $\vec{H}$  é o campo magnético no meio.

As Equações (13.17) são as equações de Maxwell a nível macroscópico. Para as resolver é preciso relacionar o deslocamento elétrico e o campo magnético no meio com o campo elétrico e o campo magnético. O caso mais simples é o dos meios **isotrópicos** e **lineares**, nos quais os campos  $\vec{D}$  e  $\vec{H}$  são paralelos e diretamente proporcionais a  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$ :

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} , \quad \vec{B} = \mu \vec{H} , \quad (13.18)$$

onde  $\epsilon$  é a permissividade elétrica do meio e  $\mu$  é a permeabilidade magnética.

As Equações de Maxwell também podem ser escritas na forma integral. Integram-se (13.17a) e (13.17c) sobre uma superfície fechada  $S$  e aplica-se de seguida o teorema da divergência; as Equações (13.17b) e (13.17d) integram-se ao longo de uma curva fechada  $C$ , e aplica-se de seguida o teorema de Stokes. Obtemos assim

o resultado:

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{A} = q_0, \quad (13.19a)$$

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \iint_{S_C} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{A}, \quad (13.19b)$$

$$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0, \quad (13.19c)$$

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{r} = I_0 + \iint_{S_C} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{A}. \quad (13.19d)$$

Estas equações são válidas para quaisquer superfície fechada  $S$ , curva fechada  $C$  e superfície  $S_C$  delimitada por  $C$ . Para uma determinada distribuição de cargas e correntes, as Equações de Maxwell definem completamente o campo eletromagnético. Portanto, estas quatro equações são as equações básicas da eletrodinâmica.

### 13.3. Transformação de Galileu do campo eletromagnético

A derivada do campo elétrico na Equação (13.15d) implica que pode existir campo magnético sem existirem correntes, já que a variação temporal do campo elétrico é também uma fonte do campo magnético. A variação temporal do campo elétrico pode ser devida a variações nas suas fontes ou simplesmente a um deslocamento global das fontes; no caso de um deslocamento das fontes, no referencial em movimento com as fontes não existe variação temporal do campo elétrico e, conseqüentemente, o campo magnético não pode ser igual ao do referencial em movimento.

Já vimos algo semelhante no Capítulo 10 quando estudámos o campo elétrico em referenciais em movimento. Consideremos uma distribuição de carga  $\rho(t)$  fixa num referencial  $R'$  que se desloca com velocidade  $\vec{v}$ . Não existe corrente no referencial  $R'$  e assim, de acordo com a Equação (13.15d), o rotacional do campo  $\vec{B}'$  será igual a  $\partial \vec{E}' / \partial t$ , dividida por  $c^2$ . A derivada do campo  $\vec{E}'$ , em movimento, calcula-se aplicando a derivada convetiva (Equação 10.26) ao campo  $\vec{E}$ :

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}' = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}'}{\partial t} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\vec{v}}{c^2} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \frac{1}{c^2} \vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{E}); \quad (13.20)$$

usando a lei de Gauss (Equação 13.15a) o termo  $\vec{v}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E})$  é igual a  $\rho \vec{v} / \epsilon_0$ . O produto  $\rho \vec{v}$  é a densidade de corrente  $\vec{J}$  e a constante  $\epsilon_0 c^2$  é igual a  $1 / \mu_0$ :

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}' = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \vec{J} - \frac{1}{c^2} \vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{E}); \quad (13.21)$$

usando a lei de Ampère-Maxwell (Equação 13.15d) os dois primeiros termos no lado direito podem ser substituídos pelo rotacional de  $\vec{B}$ . Assim, obtemos

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}' = \vec{\nabla} \times \left( \vec{B} - \frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{E} \right); \quad (13.22)$$

esta equação implica que

$$\vec{B}' = \vec{B} - \frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{E} + \vec{C}, \quad (13.23)$$

onde  $\vec{C}$  é um campo com rotacional igual a zero. A relação anterior é válida para qualquer velocidade  $\vec{v}$ ; no caso particular  $\vec{v} = 0$  os dois campos  $\vec{B}'$  e  $\vec{B}$  deverão ser iguais o que implica  $\vec{C} = 0$ . Obtemos, assim, o campo  $\vec{B}'$  em função de  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  que, juntamente com a Equação (10.20), constitui a **transformação de Galileu** do campo eletromagnético:

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}, \quad (13.24a)$$

$$\vec{B}' = \vec{B} - \frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{E}. \quad (13.24b)$$

Estas equações relacionam os campos ( $\vec{E}'$ ,  $\vec{B}'$ ) no referencial em movimento, com os campos no laboratório, em qualquer ponto  $\vec{r}$  e em qualquer instante  $t$ . A distinção entre “laboratório” e “referencial em movimento” é importante, já que as equações de Maxwell são variantes em relação à transformação entre referenciais inerciais. Vejamos o que isto quer dizer; seguindo a mesma convenção usada no Capítulo 10, podemos definir o mesmo sistema de eixos coordenados nos dois referenciais R (laboratório) e R' (referencial em movimento), num instante que designamos por  $t = 0$ ; assim, num instante  $t$  qualquer, a origem do referencial R' encontra-se na posição  $t\vec{v}$  relativa ao referencial R e a relação entre a posição de uma partícula nos dois referenciais é a transformação de Galileu:

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t. \quad (13.25)$$

A transformação inversa é  $\vec{r} = \vec{r}' + \vec{v}t$ , que tem a mesma forma da transformação de Galileu já que a velocidade do laboratório R, relativa a R', é  $-\vec{v}$ . Os referenciais R e R' são, assim, tratados de forma idêntica, sendo completamente arbitrária a escolha do referencial a que chamamos laboratório. As derivadas da Equação (13.25) dão a transformação da velocidade e da aceleração, que também não permitem distinguir entre referenciais inerciais.

No caso da transformação de Galileu do campo eletromagnético, a situação já não é simétrica. Para obter a transformação inversa de (13.24), substituímos  $\vec{B}$  e  $\vec{E}$  nas Equações (13.24a) e (13.24b) e obtemos

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v} \times \left( \vec{B}' + \frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{E}' \right) = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}' + \vec{\beta}(\vec{\beta} \cdot \vec{E}') - \beta^2 \vec{E}', \quad (13.26a)$$

$$\vec{B}' = \vec{B} - \frac{\vec{v}}{c^2} \times (\vec{E}' - \vec{v} \times \vec{B}') = \vec{B} - \frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{E}' + \vec{\beta}(\vec{\beta} \cdot \vec{B}') - \beta^2 \vec{B}', \quad (13.26b)$$

onde usamos a propriedade distributiva do produto vetorial:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}, \quad (13.27)$$

e  $\vec{\beta}$  é definida por

$$\vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c}. \quad (13.28)$$

Podemos eliminar  $(\vec{\beta} \cdot \vec{B})$  e  $(\vec{\beta} \cdot \vec{E})$  observando que, multiplicando escalarmente (13.24a) e (13.24b) por  $\vec{\beta}$ , obtêm-se as seguintes relações:

$$\vec{\beta} \cdot \vec{E}' = \vec{\beta} \cdot \vec{E}, \quad (13.29a)$$

$$\vec{\beta} \cdot \vec{B}' = \vec{\beta} \cdot \vec{B}. \quad (13.29b)$$

Substituindo em (13.26), obtemos as transformações inversas:

$$\vec{E} = \gamma^2 (\vec{E}' - \vec{v} \times \vec{B}') - \gamma^2 \vec{\beta} (\vec{\beta} \cdot \vec{E}'), \quad (13.30a)$$

$$\vec{B} = \gamma^2 (\vec{B}' + \frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{E}') - \gamma^2 \vec{\beta} (\vec{\beta} \cdot \vec{B}'), \quad (13.30b)$$

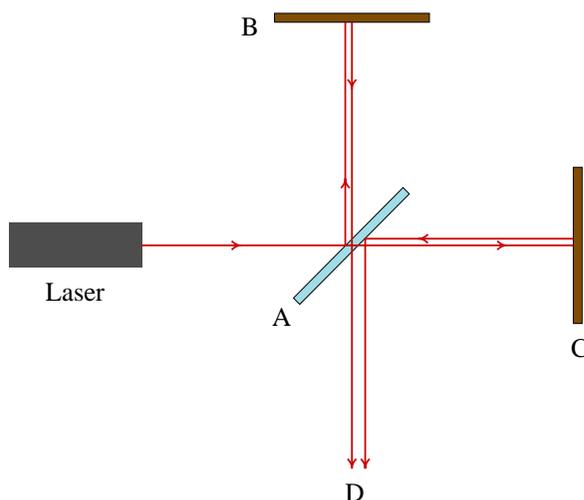
em que  $\gamma$  é o **factor de dilatação de Lorentz**, definido pela seguinte expressão:

$$\gamma^2 = \frac{1}{1 - \beta^2}. \quad (13.31)$$

A transformação inversa não tem a mesma forma da transformação inicial. Por exemplo, se o campo magnético fosse nulo no referencial R, ao passar para o referencial R' obteríamos um campo  $\vec{E}'$  igual ao campo  $\vec{E}$ , enquanto que, se o campo magnético fosse nulo no referencial R', passando para o referencial R observaríamos um campo  $\vec{E}$  diferente de  $\vec{E}'$ . Na prática, a diferença é muito pequena já que para as velocidades a que estamos habituados  $\beta$  é várias ordens de grandeza menor que 1, e  $\gamma$  é praticamente 1; nesse caso, a transformação inversa mantém a mesma forma da transformação inicial.

A situação complica-se quando consideramos a própria luz, pois, em princípio, seria fácil descobrir qual é o verdadeiro referencial R onde as equações de Maxwell são exactas: bastaria medir a velocidade de propagação da luz no vazio e compará-la com o valor de  $c$ . O meio hipotético no qual se propaga o campo eletromagnético, e que constituiria o referencial R, foi chamado éter. Durante as quatro últimas décadas do século XIX foram feitas várias experiências de ótica para descobrir a velocidade da Terra no éter. Algumas experiências foram bem explicadas pela teoria do éter, mas várias modificações tiveram que ser feitas para conseguir explicar novos resultados que continuavam a surgir e que contrariavam todos os esforços para manter a teoria do éter. Assim, por exemplo, chegou a admitir-se que o éter era um meio material no sentido em que podia também ser arrastado parcialmente pelos objetos, em particular pela Terra.

A experiência que parece ter dado o golpe fulminante à teoria do éter foi o interferômetro de Michelson e Morley, que é capaz de medir pequeníssimas diferenças na velocidade de propagação da luz em diferentes direções. A Figura 13.3 mostra um diagrama simplificado do interferômetro de Michelson e Morley. Um feixe de luz é separado em dois, no espelho semi-transparente A; os dois feixes são refletidos nos espelhos B e C, chegando ao ponto D onde são observadas franjas de interferência entre os feixes. As franjas mais claras aparecem nos pontos onde a diferença entre os percursos dos dois feixes for um múltiplo inteiro do comprimento de onda, produzindo interferência construtiva.



**Figura 13.3.:** Interferômetro de Michelson e Morley.

Deslocando um dos espelhos B ou C do interferômetro, modifica-se o tempo que demora um dos feixes a chegar até D, produzindo um deslocamento das franjas de interferência; se a velocidade da luz variasse com a direção, rodando o interferômetro conseguia-se também alterar os tempos de chegada dos feixes e deslocar as franjas.

As experiências de Michelson e Morley demonstraram que a velocidade da luz solar não varia com a direção, uma vez que ao rodar o interferômetro não observaram qualquer alteração da posição das franjas.

Hendrik Lorentz conseguiu explicar a invariância da velocidade da luz, admitindo que os corpos em movimento no éter sofrem uma contração de  $1/\gamma$ , na direção do seu movimento. A consequência dessa contração seria uma modificação da transformação de Galileu (Equação 13.25), que passaria a ser substituída pela chamada transformação de Lorentz (ver Problema 5), e as transformações dos

campos eletromagnéticos seriam idênticas para qualquer referencial. No entanto, persiste na teoria de Lorentz um efeito físico (contração) que depende da existência do referencial absoluto, já que a contração é na direção da velocidade “absoluta” e é proporcional ao módulo desta.

Em 1905, Albert Einstein publicou a sua teoria da relatividade que consegue compatibilizar as equações de Maxwell com a inexistência de referenciais absolutos. O postulado fundamental da teoria da relatividade é a invariância da velocidade da luz no vácuo; este postulado conduz a resultados surpreendentes, irreconciliáveis com os resultados da mecânica clássica; por exemplo, o facto de o intervalo de tempo entre dois eventos depender do referencial considerado. A teoria da relatividade tem tido um grande sucesso na física contemporânea; no campo do eletromagnetismo, as equações de Maxwell e a invariância da carga continuam válidas a nível relativista. A alteração fundamental é ao nível das equações de transformação dos campos; as Equações (13.24) só são válidas a velocidades não muito elevadas, de forma a que  $\beta$  seja muito menor do que 1.

### Exemplo 13.2

Calcule o campo magnético produzido por uma partícula pontual com carga  $q$  e velocidade  $\vec{v}$ .

Uma carga em repouso não produz nenhum campo magnético; contudo, quando a carga está em movimento, o campo elétrico que ela produz acompanha o seu movimento, dando origem a um campo  $\vec{B}$  induzido. Se  $R'$  for o referencial fixo à carga, os campos elétrico e magnético no referencial  $R'$ , num ponto  $\vec{r}'$ , são os seguintes:

$$\vec{E}' = \frac{kq}{r'^3} \vec{r}', \quad \vec{B}' = 0.$$

Substituindo estes campos na Equação (13.30a), obtém-se o campo magnético no referencial  $R$ :

$$\vec{B} = \frac{\gamma^2 k_m q}{r'^3} \vec{v} \times \vec{r}', \quad (13.32)$$

onde usámos a relação  $c^2 = k/k_m$  entre as constantes  $k$  e  $k_m$ . O produto  $\vec{v} \times \vec{r}'$  implica linhas de indução magnética circulares à volta da direção do movimento da partícula. A baixas velocidades, nas quais a transformação de Galileu é válida,  $\gamma \approx 1$  e a equação anterior conduz à lei de Biot-Savart para o campo produzido por um condutor com corrente.

Na época de Maxwell não tinha ainda sido descoberto o eletrão, nem existia o modelo atómico e por isso não era óbvio, como é hoje em dia, que a corrente elétrica

num fio fosse equivalente a um sistema de cargas pontuais em movimento. Tinham sido observados campos magnéticos produzidos por correntes, mas ninguém tinha observado campos magnéticos produzidos pelo movimento de partículas com carga; a carga volúmica do gás de eletrões é muito elevada, enquanto que as cargas produzidas em experiências de eletrização por fricção são muito baixas, conduzindo a campos muito fracos na Equação (13.32). O físico americano Henry Rowland, em 1878, conseguiu mostrar a existência do campo de indução magnética produzido por cargas em movimento, por meio de uma experiência com um disco carregado, de 21 cm de diâmetro, rodando a 61 rotações por segundo; para detetar o campo, foi usada uma agulha magnética cuja deflexão pode ser medida com precisão por meio de um sistema de espelhos. .

### 13.4. Energia do campo eletromagnético

Já vimos que um campo eletrostático tem uma energia potencial associada, interpretada como a energia necessária para juntar as cargas que o produzem. De igual forma, o campo eletromagnético não-estático implica uma energia associada. A força sobre um pequeno volume  $dV$  com carga volúmica  $\rho(\vec{r}, t)$ , que se desloca com velocidade  $\vec{v}$  dentro de campos eletromagnéticos  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  e  $\vec{B}(\vec{r}, t)$ , é

$$d\vec{F} = \rho(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) dV . \quad (13.33)$$

O trabalho realizado por essa força durante um intervalo de tempo  $dt$  é igual a  $d\vec{F} \cdot d\vec{r}$  e a potência fornecida é  $dP = d\vec{F} \cdot \vec{v}$ ; obtemos assim:

$$dP = d\vec{F} \cdot \vec{v} = \rho(\vec{E} \cdot \vec{v}) dV = (\vec{E} \cdot \vec{J}) dV . \quad (13.34)$$

O campo magnético não entra explicitamente na equação anterior porque a força magnética não realiza trabalho; no entanto, a potência depende implicitamente do campo magnético, já que o campo elétrico depende das variações de  $\vec{B}$ .

A potência total fornecida numa região  $R$  é o integral de volume de (13.34) e a densidade de corrente pode ser escrita em função dos campos, por meio da lei de Ampère- Maxwell (13.17d):

$$P = \iiint_R \vec{E} \cdot \left( \vec{\nabla} \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) dV . \quad (13.35)$$

A seguir, usamos a identidade vetorial

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = \vec{H} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \quad (13.36)$$

e a lei de Faraday (13.17b), para escrever (13.35) na forma

$$P = \iiint_R \left[ -\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) \right] dV . \quad (13.37)$$

O último termo na equação anterior representa um fluxo através da superfície fronteira da região  $R$ , o qual pode ser escrito como um integral de superfície usando o teorema da divergência. Num meio linear, o deslocamento elétrico e o campo magnético estão relacionados com o campo elétrico e a indução magnética segundo as Equações (13.18), e o produto escalar de qualquer vetor com a sua derivada é igual a 1/2 da derivada do quadrado do seu módulo. Assim, a equação anterior pode ser escrita na seguinte forma:

$$P = \iiint_R \left[ -\frac{1}{2\mu} \frac{\partial(B^2)}{\partial t} - \frac{\epsilon}{2} \frac{\partial(E^2)}{\partial t} \right] dV - \frac{1}{\mu} \oiint_S (\vec{E} \times \vec{B}) \cdot d\vec{A}, \quad (13.38)$$

$$P = -\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V u dV - \oiint_S \vec{S} \cdot d\vec{A}, \quad (13.39)$$

onde a **energia volúmica eletromagnética**  $u$  é definida pela equação

$$u \equiv \frac{1}{2\mu} B^2 + \frac{\epsilon}{2} E^2, \quad (13.40)$$

e o **vetor de Poynting**  $\vec{S}$  é

$$\vec{S} \equiv \frac{1}{\mu} \vec{E} \times \vec{B}. \quad (13.41)$$

A potência instantânea  $P$  é a energia mecânica fornecida pelo sistema, por unidade de tempo. Essa energia fornecida deverá ser igual à diminuição da energia eletromagnética na região  $R$ . Assim, na Equação (13.39), o integral de volume de  $u$  é a energia eletromagnética total dentro da região  $R$ , e o integral de  $\vec{S}$  sobre a superfície fechada  $S$  é o fluxo de energia eletromagnética.

O fluxo de energia eletromagnética que entra no volume  $V$  aumenta a energia mecânica ou a energia eletromagnética dentro do volume. O vetor de Poynting é a densidade de fluxo de energia eletromagnética (energia eletromagnética transferida, por unidade de área e por unidade de tempo) e a sua direção e sentido indicam a direção e sentido em que a energia é transferida.

## 13.5. Potencial vetorial

No Capítulo 3 vimos como o campo eletrostático pode ser representado em função do potencial eletrostático. Uma condição necessária para a definição do potencial é o facto do campo eletrostático ser conservativo. Em condições não estáticas, o campo elétrico não é conservativo já que o seu rotacional não é nulo, como podemos ver na lei de Faraday. Contudo, é ainda possível definir potenciais eletromagnéticos como veremos de seguida.

Qualquer campo vetorial  $\vec{F}$  verifica a propriedade

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = 0. \quad (13.42)$$

Esta propriedade e a terceira equação de Maxwell,  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ , sugerem que o campo magnético pode ser escrito na forma

$$\boxed{\vec{B} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{A}}, \quad (13.43)$$

em que  $\vec{A}$  é um campo vetorial, chamado **potencial vetorial**. Existe alguma arbitrariedade nesta definição; o rotacional de  $\vec{A}$  é uma combinação de derivadas das componentes de  $\vec{A}$  e existem muitas funções cujas derivadas são iguais. Se  $\vec{A}$  e  $\vec{A}'$  forem dois campos com o mesmo rotacional  $\vec{B}$ , isto é,

$$\vec{\nabla} \times \vec{A}' - \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla} \times (\vec{A}' - \vec{A}) = 0, \quad (13.44)$$

a diferença entre  $\vec{A}$  e  $\vec{A}'$  é um campo conservativo que pode ser calculado como o gradiente de um campo escalar  $\phi$ :

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\phi. \quad (13.45)$$

Algo semelhante acontecia no caso eletrostático em que podíamos somar ao potencial uma constante arbitrária, sem modificar o campo elétrico; o potencial eletrostático foi definido de forma única definindo um ponto onde devia ser nulo. No caso do potencial  $\vec{A}$ , não será suficiente definir um ponto onde o potencial é nulo; será preciso, por exemplo, dar um valor arbitrário à divergência de  $\vec{A}$ , já que para definir um campo vetorial são precisos o seu rotacional e a sua divergência, e a definição (13.43) só determina o rotacional de  $\vec{A}$ . Regressaremos a este ponto mais tarde.

Substituindo a Equação (13.43) na segunda equação de Maxwell (Equação 13.15b) temos

$$\vec{\nabla} \times \left( \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0. \quad (13.46)$$

Como o rotacional do gradiente de qualquer campo escalar é zero, esta última equação implica a existência de um campo escalar (o potencial escalar  $V$ ) tal que,

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla}V; \quad (13.47)$$

o que é equivalente a

$$\boxed{\vec{E} = -\vec{\nabla}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}}. \quad (13.48)$$

Assim, continua a ser possível definir o potencial escalar  $V$ , mas o campo elétrico depende tanto do potencial escalar como do potencial vetorial. No caso estático, a

derivada temporal do potencial vetorial é nula e o campo elétrico é igual a menos o gradiente do potencial escalar.

Regressando à Equação (13.45), a adição do termo  $\vec{\nabla}\phi$  ao potencial  $\vec{A}$  não altera o campo magnético, mas, de acordo com a Equação (13.48), o campo elétrico diminui em  $\vec{\nabla}(\partial\phi/\partial t)$ . Para que o campo elétrico esteja bem definido, é preciso que, ao modificar  $\vec{A}$  para  $\vec{A}'$ , o potencial escalar também seja alterado de  $V$  para

$$V' = V - \frac{\partial\phi}{\partial t} . \quad (13.49)$$

A segunda e terceira equações de Maxwell são automaticamente garantidas pela definição dos potenciais escalar e vetorial. Em função dos potenciais, a primeira e quarta equações são

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla}V) + \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} , \quad (13.50)$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \mu_0 \vec{J} - \frac{1}{c^2} (\vec{\nabla} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}) . \quad (13.51)$$

Usando as expressões da divergência do gradiente e da divergência do rotacional (Apêndice A), temos

$$\nabla^2 V + \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} , \quad (13.52)$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \frac{1}{c^2} \vec{\nabla} \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J} . \quad (13.53)$$

Para além destas duas equações temos também a liberdade de escolher arbitrariamente a divergência de  $\vec{A}$ ; uma determinada escolha de  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$  é chamada uma **calibração**. A calibração mais simples é a calibração de Coulomb:  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ , com a qual podemos transformar a Equação (13.52) na equação de Poisson da eletrostática. A Equação (13.53) é mais complicada uma vez que envolve os dois potenciais  $V$  e  $\vec{A}$ . A calibração que permite separar  $V$  e  $\vec{A}$  em duas equações com a mesma estrutura, é a calibração de Lorentz:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} . \quad (13.54)$$

Com esta relação o segundo e o terceiro termos da Equação (13.53) desaparecem e as Equações (13.52) e (13.53) podem ser escritas nas seguintes formas, respetivamente:

$$\nabla^2 V - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} , \quad (13.55)$$

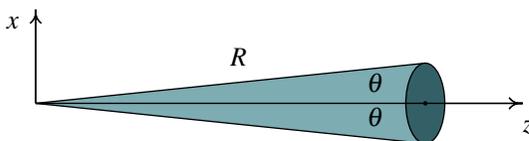
$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J} . \quad (13.56)$$

Esta forma das equações é mais simétrica e tem a grande vantagem de ser uma única equação aplicada a campos diferentes, sendo a resolução matemática semelhante nos dois casos. Nas regiões do espaço onde não existam cargas e correntes, os lados direitos das duas equações são nulos e obtém-se a chamada equação de onda, que será estudada no próximo capítulo.

## Problemas

1. Considere as quatro equações de Maxwell na forma diferencial e escreva-as na forma de oito equações escalares em função das componentes cartesianas dos campos  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ , da densidade de corrente  $\vec{J}$  e da carga volúmica  $\rho$ .
2. Os lados de um cone formam um ângulo  $\theta$  com o seu eixo. Usando coordenadas esféricas e considerando o eixo polar sobre o eixo do cone e origem no vértice, calcule a área de corte entre o cone e uma esfera de raio  $R$ . Mostre que o ângulo sólido do cone é dado pela equação

$$\Omega = 2\pi(1 - \cos\theta)$$



3. Considere um condensador de placas circulares de raio 1 cm, paralelas e planas, separadas por 1 mm de ar. Num determinado instante, existe uma corrente de 5 A que entra na placa superior e sai da placa inferior.
  - (a) Calcule a variação do campo elétrico entre as placas, por unidade de tempo.
  - (b) Calcule a corrente de deslocamento entre as placas e mostre que é igual a 5 A.
  - (c) Porque razão as duas correntes são iguais?
4. Use as equações da transformação de Galileu, (13.24) e (13.25), para escrever as equações de Maxwell num sistema em movimento  $R'$ . Mostre que a primeira e terceira equações de Maxwell são iguais no sistema em movimento (são invariantes) enquanto que a segunda e a quarta equações variam (as leis da eletrodinâmica são variantes em relação à transformação de Galileu).

5. As transformações de Lorentz dos campos elétrico e magnético são as seguintes:

$$\vec{E}' = \gamma(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \vec{\beta}(\vec{\beta} \cdot \vec{E}), \quad (13.57)$$

$$\vec{B}' = \gamma\left(\vec{B} - \frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{E}\right) - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \vec{\beta}(\vec{\beta} \cdot \vec{B}), \quad (13.58)$$

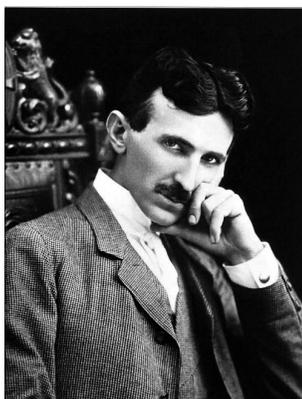
$$(13.59)$$

Demonstre que as transformações inversas, para  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  em função de  $\vec{E}'$  e  $\vec{B}'$ , são as mesmas, mudando o sinal da velocidade  $\vec{v}$ . (Sugestão: Admita que as transformações inversas têm a mesma forma, com  $-\vec{v}$  em vez de  $\vec{v}$ , e demonstre que o produto das duas transformações é a identidade.)

## Respostas

3. (a)  $1,8 \times 10^{15} \text{ N}/(\text{C} \cdot \text{s})$ . (b)  $I_d = \epsilon_0 A \frac{dE}{dt} = 5 \text{ A}$ .

## 14. Ondas eletromagnéticas e luz



**Nicola Tesla (1856–1943)**

Tesla nasceu na Croácia. Foi engenheiro e estudou nas Universidades de Gratz na Áustria e na de Praga na República Checa. Em 1884 emigrou para os Estados Unidos da América onde trabalhou para Edison. Três anos depois criou o seu próprio laboratório onde inventou o motor de indução que funciona com corrente alternada não precisando de escovas. Trabalhou para Westinghouse impulsionando o uso da corrente alternada na rede elétrica *versus* a utilização de corrente contínua defendida por Edison. O sistema de corrente alternada acabaria por se impor, devido às suas vantagens. Tesla registou inúmeras patentes entre as quais se destacam a bobina de Tesla, uma lâmpada precursora das lâmpadas fluorescentes e uma bomba que funcionava sem aspas. Tinha uma personalidade bastante excêntrica vivendo num mundo de fantasia, razão pela qual não lhe foi dado o devido crédito. Em 1914 processou judicialmente Marconi arguindo ter inventado a rádio antes dele. Ganhou o processo em 1943 quando a Corte Suprema de Justiça deliberou a favor de Tesla retirando a patente a Marconi.

Estudando as equações básicas do eletromagnetismo, Maxwell descobriu, em 1865, a possibilidade da existência de campos eletromagnéticos, inclusive na ausência de cargas e correntes; estas soluções correspondem a ondas eletromagnéticas que se propagam no vácuo, à velocidade da luz. Maxwell concluiu que a luz deveria também ser uma onda eletromagnética. As ondas eletromagnéticas só foram produzidas em laboratório, a partir de campos elétricos e magnéticos, em 1888, por Heinrich Hertz. Hoje em dia, o ar à nossa volta é preenchido por ondas eletromagnéticas produzidas “artificialmente”: ondas de rádio, televisão, radar, telemóveis, etc.

Outros investigadores tinham também observado relações entre as propriedades elétricas, magnéticas e óticas de alguns materiais; em 1845 Faraday observou que um campo magnético forte modifica o estado de polarização da luz que passa através de um pedaço de vidro. Desde a época de Newton e Huygens que existia uma polémica entre aqueles que, como Huygens, pensavam que a luz era uma onda e aqueles que, como Newton, defendiam a teoria corpuscular da luz, na qual um feixe de luz é um feixe de partículas.

O trabalho de Maxwell e dos seus seguidores, nomeadamente Kirchhoff, resolveria o conflito a favor da teoria ondulatória da luz; mas, por outro lado, a unificação da ótica com o eletromagnetismo conduziria, anos mais tarde, ao descobrimento do efeito fotoelétrico. No início do século xx, o efeito fotoelétrico constituía um dos fenómenos não explicados de forma satisfatória pela física clássica. A explicação de Einstein do efeito fotoelétrico, considerando a luz composta por partículas (fotões), foi uma das origens da actual dualidade onda-corpúsculo da mecânica quântica. Ironicamente, foi o próprio Hertz quem descobriu o efeito fotoelétrico, durante as suas experiências para demonstrar que a luz é uma onda eletromagnética.

## 14.1. Ondas eletromagnéticas

Na ausência de cargas e correntes, as equações de Maxwell (13.15) tomam a forma

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0, \quad (14.1a)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (14.1b)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (14.1c)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (14.1d)$$

Obviamente, uma das soluções deste sistema é  $\vec{E} = \vec{B} = 0$  em qualquer ponto. Mas, como vimos no capítulo anterior, um campo pode ser nulo num referencial

em movimento e diferente de zero num outro referencial. Será então possível que existam soluções triviais como  $\vec{E}' = \vec{B}' = 0$  num dado referencial mas que não o sejam no referencial de laboratório? Para estudar essa possibilidade, usemos as equações de transformação dos campos (Equações 13.24), igualando os campos no referencial  $R'$  a zero<sup>1</sup>:

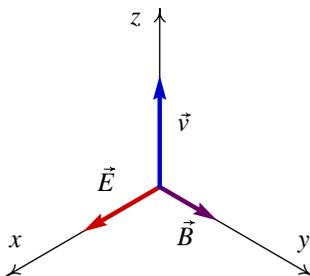
$$\vec{E} = -\vec{v} \times \vec{B}, \quad \vec{B} = \frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{E}. \quad (14.2)$$

A primeira equação implica que  $\vec{E}$  é perpendicular tanto a  $\vec{B}$  como a  $\vec{v}$ ; a segunda equação mostra que  $\vec{B}$  também é perpendicular a  $\vec{v}$ . Os três vetores definem assim um sistema de coordenadas cartesianas onde, por exemplo, o eixo dos  $x$  aponta no sentido do campo elétrico, o eixo dos  $y$  tem o sentido do campo magnético e a velocidade do referencial  $R'$  é no sentido do eixo dos  $z$  (Figura 14.1). Como os três vetores são perpendiculares, as equações anteriores conduzem às seguintes relações entre os módulos:

$$E = vB, \quad c^2 B = vE, \quad (14.3)$$

as quais implicam que a velocidade do referencial  $R'$  é a velocidade da luz, e o módulo do campo elétrico é igual ao módulo do campo de indução magnética multiplicado por  $c$ :

$$\boxed{E = cB}. \quad (14.4)$$



**Figura 14.1.:** Campos elétrico e magnético de uma onda eletromagnética e velocidade de propagação.

No capítulo precedente foi referido que sempre que existem campos elétrico e magnético não paralelos, surge uma densidade de fluxo de energia eletromagnética dada pelo vetor de Poynting, que neste caso será

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} = c \epsilon_0 E^2 \hat{v}, \quad (14.5)$$

<sup>1</sup>A velocidade  $v$  será, de facto, a velocidade máxima  $c$ , o que tira credibilidade à transformação de Galileu dos campos; no entanto, o resultado relativista é o mesmo usando a transformação de Lorentz.

onde  $\hat{v}$  é o versor na direção e sentido de propagação da onda, perpendicular aos campos e no sentido da regra da mão direita de  $\vec{E}$  para  $\vec{B}$ . Consequentemente, existem soluções não triviais no vácuo, chamadas **ondas eletromagnéticas**, nas quais, em cada ponto, os campos elétrico e magnético são campos cruzados e transportam energia eletromagnética na direção perpendicular aos campos (direção de propagação da onda).

Em cada ponto por onde passa uma onda eletromagnética que se propaga no vácuo, existe uma energia volúmica dada pela Equação (13.40), com  $\mu$  e  $\epsilon$  substituídas por  $\mu_0$  e  $\epsilon_0$ , respetivamente:

$$u \equiv \frac{\epsilon_0}{2} (c^2 B^2 + E^2) = \epsilon_0 E^2. \quad (14.6)$$

Embora, numa onda eletromagnética, o campo  $\vec{B}$  seja muito menor que o campo  $\vec{E}$ , como indica a Equação (14.4), a contribuição de cada campo para a energia da onda é a mesma.

## 14.2. Equação de onda eletromagnética

Para encontrar a forma explícita dos campos de uma onda eletromagnética, em função do tempo e da posição, é preciso resolver o sistema de Equações (14.1). Os rotacionais da segunda e quarta equações são

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{B}, \quad (14.7a)$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{E}. \quad (14.7b)$$

Os lados esquerdos podem ser simplificados aplicando a propriedade do rotacional de um rotacional (Apêndice A) e nos lados direitos podemos usar a segunda e quarta equações de Maxwell para obter

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \quad (14.8a)$$

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}. \quad (14.8b)$$

Finalmente, de acordo com a primeira e terceira equações de Maxwell, a divergência dos dois campos é nula, o que conduz à chamada **equação de onda** para os campos elétrico e magnético:

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \quad (14.9a)$$

$$\nabla^2 \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}. \quad (14.9b)$$

Estas duas equações têm a mesma forma matemática, sendo as suas soluções semelhantes; a equação de onda aparece em vários campos da física e as suas soluções já tinham sido estudadas por d'Alembert e outros matemáticos antes da época de Maxwell. É claro que as Equações (14.9) são só duas das quatro equações iniciais e, portanto, ainda teremos que usar a segunda ou quarta equação de Maxwell para calcular um dos campos em função do outro; assim, só será preciso resolver uma das equações de onda. A equação de onda é linear: uma combinação linear de soluções (funções de onda) é também solução, isto é, a sobreposição de duas ondas dá outra onda que se obtém somando as funções de onda das ondas iniciais. Estudaremos alguns tipos de ondas nas secções seguintes.

### 14.3. Ondas planas

Como já foi dito, os campos eléctrico e magnético numa onda eletromagnética são perpendiculares entre si e perpendiculares à direcção de propagação da onda. Contudo, a direcção dos campos não tem que ser a mesma em pontos diferentes. No caso de os campos terem sempre a mesma direcção diz-se que é uma **onda plana polarizada**; a direcção de polarização é, por definição, a direcção do campo eléctrico. Consideremos uma onda plana polarizada na direcção de  $\hat{j}$ , que se propaga na direcção do eixo dos  $z$ , como na Figura 14.1:

$$\vec{E} = E \hat{j}, \quad \vec{B} = B \hat{k}. \quad (14.10)$$

De acordo com a primeira e a terceira equações de Maxwell, a divergência de cada um destes campos tem que ser nula:

$$\frac{\partial E}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial B}{\partial z} = 0; \quad (14.11)$$

ou seja  $E$  não depende da variável  $y$  e  $B$  não depende da variável  $z$ . Mas, como em qualquer ponto o módulo do campo eléctrico é  $E = cB$ , nem  $E$  nem  $B$  podem depender de  $y$  ou de  $z$ :

$$\vec{E} = E(x, t) \hat{j}, \quad \vec{B} = B(x, t) \hat{k}. \quad (14.12)$$

Substituindo o campo eléctrico na equação de onda (14.9a), os dois lados da equação são vetores na direcção  $\hat{j}$  e obtemos a equação de onda escalar

$$\boxed{\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}}. \quad (14.13)$$

Para resolver esta equação, vamos rescrevê-la na forma de um operador que actua sobre a função  $E(x, t)$ :

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) E = 0. \quad (14.14)$$

O operador pode ser factorizado da seguinte forma:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}\right) \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}\right) E = 0, \quad (14.15)$$

onde a ordem dos dois operadores nos parênteses é indiferente. Para que o resultado anterior seja zero, é preciso que se verifique uma das duas equações:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}\right) E = 0, \quad \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}\right) E = 0. \quad (14.16)$$

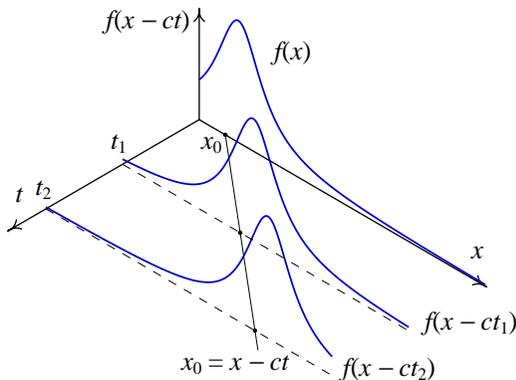
Consideremos a primeira equação:

$$c \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial E}{\partial t} = 0. \quad (14.17)$$

O lado esquerdo tem exactamente a forma da derivada convetiva (ver Equação 10.23), em que a velocidade, neste caso, é na direcção de  $\hat{i}$  e o seu módulo é igual a  $c$ . Segundo a Equação (10.27), esta derivada convetiva é a variação do campo  $E$  no referencial  $R'$  que acompanha o movimento da onda, com velocidade  $c$  na direcção de  $\hat{i}$ :

$$\frac{dE}{dt} = 0, \quad \text{ao longo das retas } x' = x - ct; \quad (14.18)$$

nomeadamente, por cada valor possível de  $x'$  temos um ponto correspondente em  $R'$  que se desloca na direcção positiva do eixo  $x$ , descrevendo uma trajetória retilínea no domínio  $(x, t)$  da função  $E$  (ver Figura 14.2). Ao longo destas retas **caraterísticas**, a derivada de  $E$  é nula e, portanto, o valor de  $E$  é constante; por exemplo, a reta  $x_0 = x - ct$  que aparece representada no plano  $xt$  na Figura 14.2 é a caraterística correspondente a  $x' = x_0$ . O valor constante de  $E$  ao longo da



**Figura 14.2.:** Onda plana propagando-se na direcção positiva do eixo dos  $x$ .

reta característica pode ser diferente em características diferentes; se a função  $f(x')$  representa os valores de  $E$  nas diferentes características, o valor de  $E$  em qualquer ponto do seu domínio será

$$E(x, t) = f(x - ct), \quad (14.19)$$

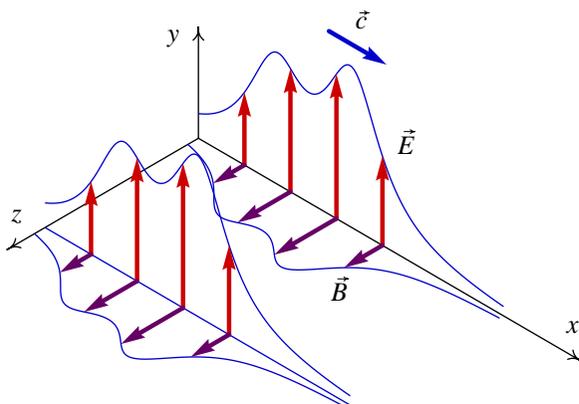
em que  $f$  pode ser qualquer função, correspondendo ao valor de  $E$  ao longo do eixo dos  $x$ , no instante  $t = 0$ . Esta solução representa uma onda que se propaga no sentido positivo do eixo dos  $x$ .

A segunda das Equações (14.16) resolve-se de forma idêntica, com a diferença que agora a onda se propaga no sentido negativo do eixo dos  $x$ , a qual conduzirá a funções de onda da forma  $g(x + ct)$ . A forma geral das ondas planas que se propagam na direção do eixo dos  $x$  será uma sobreposição de uma onda propagando-se no sentido positivo (função de  $x - ct$ ) e outra onda propagando-se no sentido negativo (função de  $x + ct$ )

$$E(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct). \quad (14.20)$$

As duas funções podem ser determinadas a partir de condições fronteira, por exemplo, na origem o campo em função do tempo é  $f(-ct) + g(ct)$ ; no instante  $t = 0$ , o campo  $E$  em função de  $x$  é igual a  $f(x) + g(x)$ .

A Figura 14.3 mostra um exemplo de campos elétrico e magnético de uma onda plana, num dado instante de tempo  $t$ . Para  $t + \Delta t$ , o gráfico seria semelhante, mas deslocado uma distância  $c\Delta t$  no sentido positivo do eixo dos  $x$ .



**Figura 14.3.:** Campos de uma onda eletromagnética plana que se propagando-se no sentido positivo do eixo dos  $x$ .

Temos considerado apenas o caso de polarização linear, em que os campos  $\vec{E}$  têm sempre a mesma direção, mas, de facto, existem também ondas planas com campos que rodam (polarização circular ou elíptica) como veremos na próxima secção.

## 14.4. Ondas harmônicas

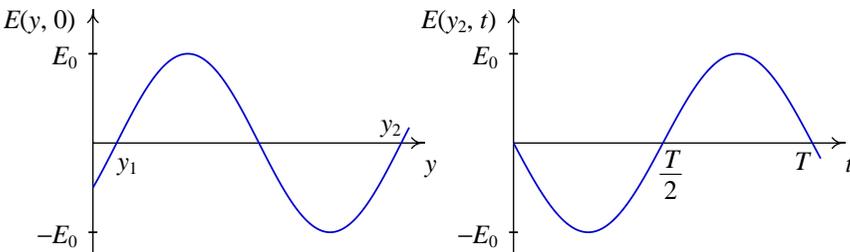
Um caso importante das ondas eletromagnéticas são as ondas periódicas que se repetem durante um intervalo de tempo. Como vimos no Capítulo 11, qualquer função periódica pode ser representada como uma série de funções seno e cosseno com diferentes frequências. Quando a função de onda  $f(x \pm ct)$  é uma função seno ou cosseno, a respectiva onda é chamada **onda harmônica** ou **monocromática**. Uma dada função sinusoidal, com período  $\lambda$ , é dada pela função

$$\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}u + \varphi_0\right). \quad (14.21)$$

Se  $u$  for, por exemplo, igual a  $(y - ct)$ , a função  $f$  corresponderá a uma onda plana propagando-se na direção de  $\hat{j}$ . Se a onda estiver polarizada na direção de  $\hat{i}$ , o campo elétrico será

$$\vec{E} = E_0 \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(y - ct) + \varphi_0\right] \hat{i}. \quad (14.22)$$

A constante  $E_0$  é a **amplitude** do campo elétrico, o ângulo  $\varphi = [2\pi(y - ct)/\lambda + \varphi_0]$  é chamado **fase** e a constante  $\varphi_0$  é chamada **fase inicial**. Quando dois pontos têm fases iguais, em qualquer instante, diz-se que estão em fase. O **comprimento de onda**,  $\lambda$ , é igual à distância entre dois pontos consecutivos em fase, na direção de propagação da onda; por exemplo, os pontos  $y_1$  e  $y_2$  da Figura 14.4.



**Figura 14.4.:** Campo elétrico de uma onda eletromagnética harmônica, plana e polarizada, em função da posição (esquerda) e em função do tempo (direita).

O campo  $E$  observado num ponto fixo oscila sinusoidalmente. O **período**  $T$  é o tempo que demora uma oscilação completa do campo. Durante cada oscilação, a onda desloca-se um comprimento de onda  $\lambda$ , com velocidade constante  $c$ , e conseqüentemente,

$$T = \frac{\lambda}{c}. \quad (14.23)$$

A **frequência** da onda é o inverso do período,  $f = 1/T$ , e portanto, igual ao número total de oscilações do campo por unidade de tempo, que é igual ao número

de comprimentos de onda por unidade de tempo. A **frequência angular**  $\omega$  é o aumento, em radianos, da fase num ponto qualquer, por unidade de tempo; temos então que

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}. \quad (14.24)$$

De maneira análoga, como o comprimento de onda  $\lambda$  é a distância entre dois pontos consecutivos com a mesma fase, o inverso de  $\lambda$ , chamado **número de onda**, representa o número de pontos que se encontram em fase, por unidade de comprimento. Este número, multiplicado por  $2\pi$ , determina o aumento da fase por unidade de comprimento e é chamado **número de onda angular**:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (14.25)$$

Em função da frequência angular e do número de onda angular, a onda harmônica é

$$\vec{E} = E_0 \sin(ky - \omega t + \varphi_0) \hat{i}. \quad (14.26)$$

Como o período e o comprimento de onda estão relacionados pela Equação (14.23), a frequência angular e o número de onda angular devem verificar a igualdade:

$$\boxed{c = \frac{\omega}{k}}. \quad (14.27)$$

Podem existir ondas harmônicas planas propagando-se em qualquer outra direção diferente do eixo dos  $y$ . É costume definir o **vetor de propagação**  $\vec{k}$  com módulo igual ao número de onda angular  $k$  e na direção de propagação da onda; na Equação (14.26)  $y$  é a projeção da posição  $\vec{r}$  de um ponto, na direção de propagação  $\hat{j}$ ; assim,  $ky$  deverá ser substituído por  $k$  multiplicado pela projeção de  $\vec{r}$  na direção de propagação ( $\vec{k} \cdot \vec{r}$ ) e a forma mais geral da onda harmônica plana é

$$\boxed{\vec{E} = E_0 \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_0) \hat{p}}, \quad (14.28)$$

onde o **vetor de polarização**  $\hat{p}$  define a direção do campo elétrico, que pode ser qualquer direção perpendicular ao vetor de propagação  $\vec{k}$ .

A sobreposição de duas ondas harmônicas planas origina uma outra onda eletromagnética plana, já que a equação de onda é linear (Problema 6). A sobreposição de ondas harmônicas planas permite “construir” ondas planas mais complicadas, que não são necessariamente harmônicas. E qualquer onda periódica pode ser obtida como sobreposição de ondas harmônicas, por meio da série de Fourier.

**Exemplo 14.1**

Uma onda plana polarizada circularmente é uma onda na qual os módulos dos campos são constantes, mas rodam no plano perpendicular à direção de propagação. Demonstre que a sobreposição das seguintes ondas harmônicas

$$\vec{E}_1 = E_0 \cos(kx - \omega t) \hat{j} \quad \vec{E}_2 = E_0 \sin(kx - \omega t) \hat{k}$$

é uma onda polarizada circularmente.

O campo vetorial total é

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = E_0[\cos(kx - \omega t) \hat{j} + \sin(kx - \omega t) \hat{k}]$$

e o seu módulo é

$$|\vec{E}| = E_0[\cos^2(kx - \omega t) + \sin^2(kx - \omega t)]^{1/2} = E_0.$$

O ângulo que o campo total faz com o eixo dos  $y$  é igual a

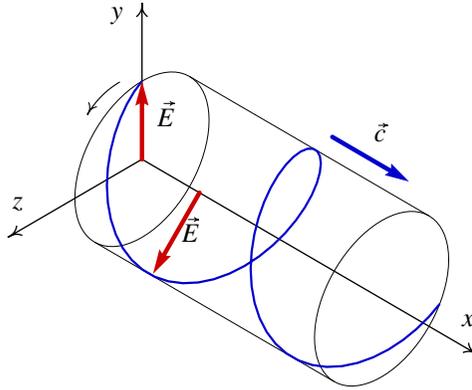
$$\theta = \arctg\left(\frac{E_z}{E_y}\right) = \arctg[\text{tg}(kx - \omega t)] = kx - \omega t.$$

Em qualquer ponto com  $x$  constante, o módulo do campo elétrico é constante e igual a  $E_0$ , e roda sobre o plano  $yz$  com velocidade angular

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\omega.$$

Para interpretar o sinal negativo, temos que ter em conta que o sentido positivo das rotações no plano  $yz$  é definido a partir de  $\hat{i}$ , pela regra da mão direita; assim, numa rotação positiva o vetor  $\vec{E}$  desloca-se de  $\hat{j}$  para  $\hat{k}$ ; o sinal negativo, neste caso, indica que num ponto fixo o campo roda no sentido de  $\hat{k}$  para  $\hat{j}$  como se mostra na Figura 14.5. Colocando o dedo polegar da mão direita na direção de propagação ( $\hat{i}$ ), o campo em cada ponto roda na direção negativa (oposta aos outros dedos) e por isso diz-se que a onda tem **helicidade** negativa. No entanto, se nos deslocarmos na direção positiva de  $x$  (direção de propagação) num determinado instante, a onda aparece como uma hélice que roda na direção da mão direita (positiva); assim sendo, diz-se que este tipo de onda tem **polarização circular direita**.

A sobreposição de duas ondas planas da mesma frequência e amplitude, com diferença de fase de  $\pm\pi/2$  e polarizadas em direções perpendiculares, produz ondas polarizadas circularmente. Se a amplitude das duas ondas sobrepostas fosse diferente, a onda resultante seria uma onda com polarização elíptica, em que os vetores  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  descreveriam uma elipse, no plano perpendicular à propagação da onda.



**Figura 14.5.:** Onda eletromagnética plana com polarização circular direita.

### Exemplo 14.2

O campo elétrico

$$\vec{E} = E_0 \sin(kx) \cos(\omega t) \hat{j}, \quad (14.29)$$

corresponde a uma onda estacionária, na qual os pontos onde o campo é máximo, mínimo ou nulo permanecem fixos. Demonstre que a onda estacionária é solução da equação de onda e pode ser obtida a partir da sobreposição de duas ondas harmónicas planas, com a mesma frequência, mas propagando-se em direções opostas.

As derivadas parciais da componente  $y$  do campo são

$$\frac{\partial E}{\partial x} = E_0 k \cos(kx) \cos(\omega t),$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = -E_0 k^2 \sin(kx) \cos(\omega t) = -k^2 E,$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -E_0 \omega \sin(kx) \sin(\omega t),$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = -E_0 \omega^2 \sin(kx) \cos(\omega t) = -\omega^2 E,$$

logo, se  $\omega$  e  $k$  verificarem a condição

$$\frac{\omega}{k} = c,$$

o campo será solução da equação de onda plana:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \frac{k^2}{\omega^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}.$$

Para decompor a onda estacionária em ondas planas, usamos a identidade trigonométrica

$$\sin(kx) \cos(\omega t) = \frac{1}{2} [\sin(kx + \omega t) + \sin(kx - \omega t)],$$

a qual conduz a

$$\vec{E} = \frac{E_0}{2} \sin(kx + \omega t) \hat{j} + \frac{E_0}{2} \sin(kx - \omega t) \hat{j}.$$

Os dois termos descrevem ondas harmônicas, polarizadas na direção de  $\hat{j}$ , com a mesma frequência  $\omega/2\pi$ , que se propagam em direções opostas. O campo magnético é a sobreposição dos campos associados a cada onda:

$$\vec{B} = -\frac{E_0}{2c} \sin(kx + \omega t) \hat{k} + \frac{E_0}{2c} \sin(kx - \omega t) \hat{k}.$$

## 14.5. Ondas esféricas

As ondas planas constituem simplesmente uma aproximação válida dentro de uma região pequena quando comparada com a distância à fonte, já que uma onda eletromagnética real costuma propagar-se em várias direções, e não numa direção única. Se a fonte que produz a onda poder ser considerada uma fonte pontual, a propagação da onda será nas direções radiais com origem na fonte; assim, o vetor de polarização estará sobre o plano dos versores  $\hat{\theta}$  e  $\hat{\phi}$ . Consideremos uma onda que em cada ponto está polarizada na direção de  $\hat{\phi}$ ; a forma geral do campo elétrico será

$$\vec{E} = E(r, \theta, \phi, t) \hat{\phi}. \quad (14.30)$$

Se a fonte for isotrópica (isto é, emitir igualmente em todas as direções) existirá simetria esférica e a função de onda dependerá apenas da distância à origem  $r$  e do tempo  $t$ . Usando a expressão do Laplaciano para vetores com simetria esférica (Apêndice A), obtemos<sup>2</sup>

$$\nabla^2 E(r, t) \hat{\phi} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} [rE(r, t)] \hat{\phi}, \quad (14.31)$$

e a equação de onda (Equação 14.9a) implica que

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rE)}{\partial r^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}. \quad (14.32)$$

Multiplicando os dois lados da equação por  $r$ , e como as variáveis  $r$  e  $t$  são independentes, obtemos

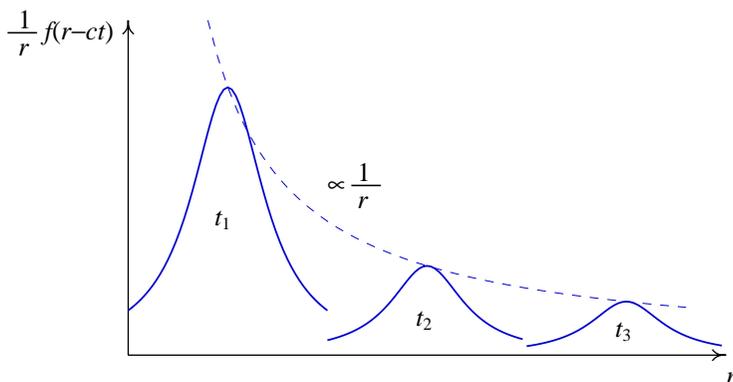
$$\frac{\partial^2 (rE)}{\partial r^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 (rE)}{\partial t^2}. \quad (14.33)$$

<sup>2</sup>O versor  $\hat{\phi}$  depende das coordenadas  $\theta$  e  $\phi$ , mas é independente de  $r$ .

Esta é a equação da onda plana, para a função  $rE$ . Portanto,  $rE$  deverá ser uma onda plana  $f(r, t)$  que se propaga na direção radial:

$$E(r, t) = \frac{1}{r} f(r \pm ct) ; \quad (14.34)$$

o sinal positivo corresponde a ondas que se propagam na direção da origem. Como considerámos ondas emitidas por uma fonte pontual na origem, devemos apenas manter o sinal negativo. A função  $f(r - ct)/r$  representa uma onda que se propaga na direção radial, afastando-se da origem, mas cuja forma não permanece constante, diminuindo à medida que a onda se afasta da origem (Figura 14.6).



**Figura 14.6.:** Funções de onda esférica em 3 instantes  $t_1 < t_2 < t_3$ .

Os pontos que se encontram em fase formam esferas com centro na origem, chamadas **frentes de onda**. O campo magnético calcula-se a partir da lei de Faraday; como o campo elétrico é na direção de  $\hat{\phi}$ , o seu rotacional, em coordenadas esféricas, é

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rE)}{\partial r} \hat{\theta} = \frac{1}{r} f'(r - ct) \hat{\theta} . \quad (14.35)$$

Integrando em ordem a  $t$  e multiplicando por  $-1$ , obtém-se o campo de magnético

$$\vec{B} = \frac{1}{cr} f(r - ct) \hat{\theta} . \quad (14.36)$$

Os campos elétrico e magnético são perpendiculares e o seu produto vetorial tem a direção radial. O módulo do campo  $\vec{B}$  é  $c$  vezes menor do que o módulo de  $\vec{E}$ . A onda também podia estar polarizada na direção do versor  $\hat{\theta}$  ou em qualquer direção perpendicular à direção radial.

No caso de  $f$  ser uma função sinusoidal, teremos uma onda esférica harmónica; a forma geral do campo elétrico será

$$E(r, t) = \frac{E_0}{r} \sin(kr - \omega t + \varphi_0) . \quad (14.37)$$

A amplitude da onda diminui à medida que  $r$  aumenta.

## 14.6. Intensidade das ondas eletromagnéticas

A densidade de fluxo energético de uma onda,  $\phi$ , é igual à energia transportada pela onda através de uma superfície normal à sua direção de propagação, por unidade de área e por unidade de tempo. Por exemplo, a densidade de fluxo energético da luz solar que entra na atmosfera terrestre é aproximadamente  $1.4 \text{ kW/m}^2$ .

No caso das ondas eletromagnéticas, o fluxo de energia, por unidade de área, é igual ao módulo do vetor Poynting; a partir da Equação (14.5), obtemos

$$\phi = c \epsilon_0 E^2 . \quad (14.38)$$

O resultado da Equação 14.38 é um valor instantâneo, já que o campo elétrico é variável; no caso de uma onda periódica, o valor médio de  $E^2$  é

$$\overline{E^2} = \frac{1}{T} \int_0^T E^2 dt ; \quad (14.39)$$

se a onda for harmônica e plana, o campo elétrico é dado pela Equação (14.28), e usando a identidade trigonométrica

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} , \quad (14.40)$$

obtemos o resultado

$$\overline{E^2} = \frac{E_0^2}{2T} \int_0^T [1 - \cos 2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_0)] dt . \quad (14.41)$$

A função cosseno tem um período igual a  $2T$ , de maneira que o seu integral entre 0 e  $T$  é nulo:

$$\overline{E^2} = \frac{E_0^2}{2} ; \quad (14.42)$$

assim, a densidade média de fluxo energético é diretamente proporcional ao quadrado da amplitude do campo elétrico:

$$\overline{\phi} = \frac{\epsilon_0}{2} c E_0^2 . \quad (14.43)$$

O fluxo energético<sup>3</sup>  $\Phi_e$  é a energia total emitida, por unidade de tempo. Uma fonte pontual, isotrópica, emite uma onda esférica que se propaga em todas as direções; se a densidade de fluxo energético for  $\phi$ , a uma distância  $r$ , o fluxo energético será

$$\Phi_e = 4\pi r^2 \overline{\phi} . \quad (14.44)$$

<sup>3</sup>Também chamado potência radiante

Se conseguíssemos diminuir o ângulo sólido ( $\Omega$ ) da onda emitida por uma fonte pontual, a sua intensidade aumentaria já que a radiação estaria mais concentrada; por exemplo, se em vez de emitir em todas as direções ( $\Omega = 4\pi$ ) a fonte emitisse apenas em metade do espaço ( $\Omega = 2\pi$ ), a sua intensidade aumentaria para o dobro. Consequentemente, define-se a **intensidade** de uma onda como o fluxo energético, por unidade de ângulo sólido:

$$I = \frac{\Phi_e}{\Omega} . \quad (14.45)$$

No caso da fonte pontual isotrópica, o ângulo sólido é  $4\pi$  e o fluxo energético é dado pela Equação (14.44); obtemos, assim, a intensidade:

$$I = r^2 \phi . \quad (14.46)$$

A densidade média de fluxo energético calcula-se de forma análoga à utilizada no caso da onda plana, mas substituindo  $E_0$  por  $E_0/r^2$  na Equação (14.41), o que conduz a

$$\phi = \frac{\epsilon_0}{2r^2} c E_0^2 , \quad (14.47)$$

e a intensidade é diretamente proporcional ao quadrado da amplitude do campo elétrico:

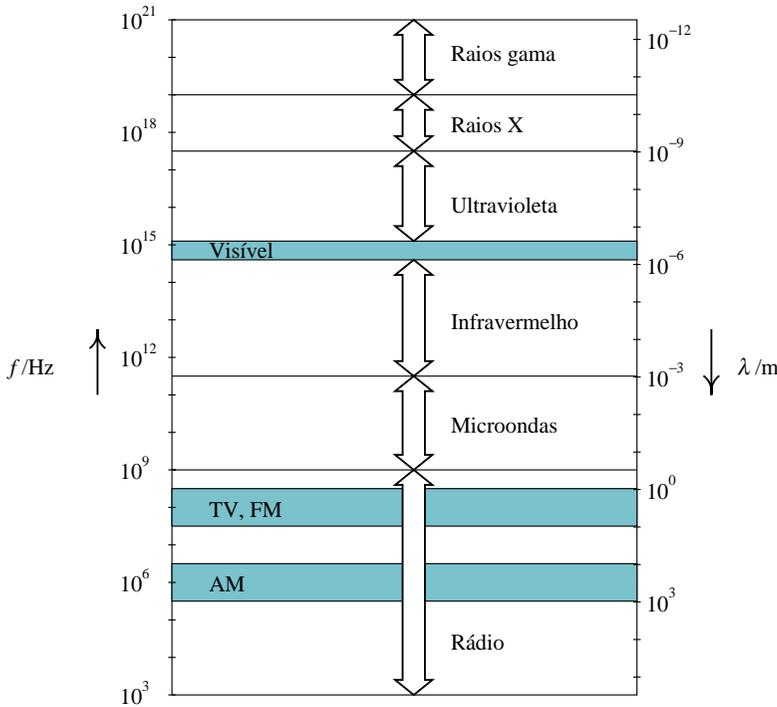
$$I = \frac{\epsilon_0}{2} c E_0^2 . \quad (14.48)$$

## 14.7. Espectro eletromagnético

Numa onda harmónica o comprimento de onda,  $\lambda$ , e a frequência,  $f$ , não podem variar independentemente, mas estão relacionadas pela condição  $\lambda f = c$ ; por outro lado a amplitude dos campos elétrico e magnético também não pode variar arbitrariamente pois deve verificar  $E_0/B_0 = c$ . Dada a frequência ou o comprimento de onda, é possível classificar a onda dentro do **espectro eletromagnético** e determinar as suas propriedades. A amplitude dos campos determina a intensidade mas não a classificação no espectro.

Em princípio, podem existir ondas eletromagnéticas com qualquer valor de  $\lambda$  entre 0 e  $\infty$ . A Figura 14.7 mostra o espectro de ondas conhecidas, com os valores de  $\lambda$  e de  $f$  característicos de cada classe.

Os principais mecanismos de produção de ondas eletromagnéticas são a aceleração de cargas num condutor (antenas), a radiação de **corpo negro** emitida por sistemas termodinâmicos à temperatura maior que o zero absoluto e as transições entre níveis de energia em sistemas quânticos como átomos ou núcleos. À medida que a frequência aumenta e o comprimento de onda diminui, os mecanismos de emissão envolvem sistemas mais pequenos. De igual forma, a interação de uma onda eletromagnética é maior com objetos de tamanhos da ordem de grandeza de  $\lambda$ .

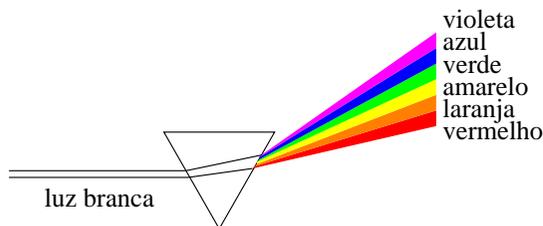


**Figura 14.7.:** Espectro eletromagnético

Desta forma, as ondas de radar não conseguem penetrar objetos muito pequenos, enquanto que a luz ultravioleta consegue. A radiação x, caracterizada por comprimentos de onda da ordem de  $10^{-10}$  metros, atravessa facilmente as células. A radiação gama com  $\lambda$  ainda menor, pode mesmo penetrar nos cromossomos e alterar o conteúdo genético sendo, portanto, bastante perigosa.

Usualmente, as ondas eletromagnéticas não se apresentam com uma frequência  $f$  definida, como no caso das ondas harmônicas, mas são uma sobreposição de ondas harmônicas com uma distribuição de frequências particular. Por exemplo, a luz solar tem um espectro contínuo de frequências na banda visível, que pode ser separado por meio de um prisma (Figura 14.8). A permissividade elétrica é tanto maior quanto maiores forem as frequências, o que implica uma menor velocidade da luz, quanto maior for a frequência; o índice de refração, que é inversamente proporcional à velocidade no meio, será maior para a luz com maior frequência (violeta) e menor para a luz com menor frequência (vermelha).

A decomposição espectral permite também descobrir linhas de absorção e de emissão que podem ser usadas para determinar a composição química da fonte. A luz produzida por um gás em combustão ou por um gás pelo qual passa uma descarga elétrica, é formada apenas por algumas frequências isoladas; no prisma, a



**Figura 14.8.:** Decomposição espectral da luz solar por um prisma.

decomposição por frequências produz uma seqüência de linhas que se aproximam de um limite (séries espectrais). Cada elemento químico tem um espectro próprio. O espectro de absorção é produzido quando uma luz policromática atravessa o gás; o espectro apresenta linhas escuras correspondentes às frequências absorvidas no gás. A espectroscopia permite determinar a composição química de fontes distantes, como por exemplo as estrelas.

## 14.8. Ondas eletromagnéticas em meios materiais

Nas secções anteriores temos considerado unicamente ondas no vácuo. Nos meios materiais, as equações de Maxwell (Equações 13.15) podem ser substituídas pelas equações para meios macroscópicos (Equações 13.17). Se o meio for isotrópico e linear e não existirem cargas nem correntes livres, o sistema de equações obtido será semelhante ao sistema (14.1), com  $\epsilon_0$  e  $\mu_0$  substituídas pela permissividade elétrica  $\epsilon$  e a permeabilidade magnética  $\mu$  do material. A velocidade das ondas eletromagnéticas no meio já não será a velocidade da luz no vácuo ( $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ ), mas será igual a

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}. \quad (14.49)$$

Nos condutores, os elétrons de condução atenuam rapidamente qualquer campo elétrico externo, e por isso não permitem a propagação das ondas eletromagnéticas, sendo opacos à luz. A permeabilidade da maior parte dos materiais, excepto os ferromagnéticos, é muito próxima a  $\mu_0$ , e a velocidade das ondas eletromagnéticas é, aproximadamente,

$$v \approx \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu_0}} = c \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\epsilon}} = \frac{c}{\sqrt{K}}, \quad (14.50)$$

onde  $K$  é a constante dielétrica, a qual verifica a Equação (5.45). Contudo, a constante dielétrica tem uma forte dependência com a frequência; mesmo a frequências muito baixas o valor obtido de  $K$  é diferente do valor medido estaticamente num

condensador. A dependência de  $K$  com a frequência determina diferentes velocidades para diferentes componentes harmônicas de uma onda, dando origem a **dispersão**.

No vazio, já foi demonstrado que as ondas eletromagnéticas são transversais, ou seja, os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  e o vetor de propagação são perpendiculares. Para investigar a possível existência de outras soluções das equações de Maxwell nos meios materiais, pode usar-se o método da transformada de Fourier, que é semelhante ao método da transformada de Laplace usado no capítulo 11 para resolver as equações dos circuitos. A transformada de Fourier de um campo vetorial que depende do tempo  $t$  e da posição  $\vec{r}$  é outro campo vetorial definido da forma seguinte:

$$\mathcal{F}\{\vec{F}\} = \int \iiint \vec{F}(t, \vec{r}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} dV dt, \quad (14.51)$$

onde o integral no tempo é calculado num intervalo de um período  $T = 2\pi/\omega$ , e o volume de integração é um paralelepípedo com arestas iguais aos comprimentos de onda  $(\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z)$ , definidos como  $2\pi/k_x$ ,  $2\pi/k_y$  e  $2\pi/k_z$ , respetivamente. Observe-se que  $\mathcal{F}\{\vec{F}\}$  não depende de  $(t, \vec{r})$ , mas depende da frequência angular,  $\omega$  e do vetor de propagação,  $\vec{k}$ .

A transformada da divergência de  $\vec{F}$  será dada por

$$\int \iiint \vec{\nabla} \cdot \vec{F} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} dV dt. \quad (14.52)$$

Usando a propriedade distributiva da divergência,

$$\vec{\nabla} \cdot (f\vec{F}) = \vec{\nabla} f \cdot \vec{F} + f\vec{\nabla} \cdot \vec{F}, \quad (14.53)$$

e como o gradiente da função exponencial é ela própria multiplicada por  $i\vec{k}$ , obtemos o resultado

$$\int \iiint [\vec{\nabla} \cdot (e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \vec{F}) - i\vec{k} \cdot \vec{F} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}] dV dt. \quad (14.54)$$

O teorema da divergência permite escrever o primeiro integral de volume como o fluxo de  $\vec{F}$  vezes a função exponencial, através do paralelepípedo com arestas  $(\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z)$ , integral esse que será nulo, já que tanto  $\vec{F}$  como a exponencial são funções periódicas. O segundo integral pode ser escrito como o produto da constante  $-i\vec{k}$  pela transformada de Fourier do campo  $\vec{F}$ . Portanto, a transformada da divergência é dada por

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} \longrightarrow -i\vec{k} \cdot \mathcal{F}\{\vec{F}\}. \quad (14.55)$$

De forma análoga, pode mostrar-se que as transformadas do rotacional e da derivada em ordem ao tempo, de  $\vec{F}$ , são as seguintes:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} \longrightarrow -i\vec{k} \times \mathcal{F}\{\vec{F}\}, \quad (14.56)$$

$$\frac{\partial \vec{F}}{\partial t} \longrightarrow i\omega \mathcal{F}\{\vec{F}\}. \quad (14.57)$$

Podemos, assim, calcular as transformadas de Fourier de cada uma das equações de Maxwell (Equações 13.17), quando não existem cargas nem correntes livres:

$$\vec{k} \cdot \mathcal{F}\{\vec{D}\} = 0, \quad (14.58a)$$

$$\vec{k} \times \mathcal{F}\{\vec{E}\} = \omega \mathcal{F}\{\vec{B}\}, \quad (14.58b)$$

$$\vec{k} \cdot \mathcal{F}\{\vec{B}\} = 0, \quad (14.58c)$$

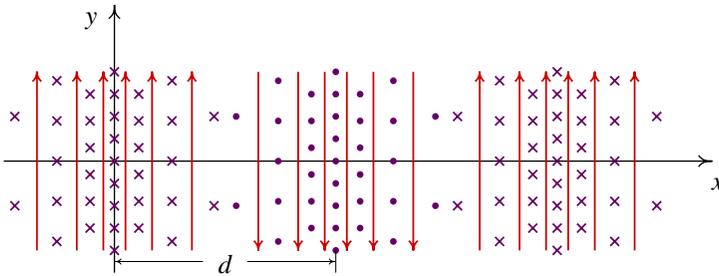
$$\vec{k} \times \mathcal{F}\{\vec{H}\} = -\omega \mathcal{F}\{\vec{D}\}. \quad (14.58d)$$

A primeira e terceira equações implicam que o deslocamento elétrico  $\vec{D}$  e o campo magnético  $\vec{B}$  são perpendiculares ao vetor de propagação (a direção de cada componente harmônica do campo é a mesma direção da correspondente transformada de Fourier). No vácuo, o deslocamento elétrico é igual ao campo elétrico  $\vec{E}$  e, assim, as ondas eletromagnéticas são sempre **ondas transversais**: os campos apontam na direção perpendicular à propagação da onda. No entanto, nos meios materiais a segunda e quarta Equações (14.58) admitem soluções em que  $\vec{E}$  ou  $\vec{H}$  oscilam na direção do vetor de propagação  $\vec{k}$ . Por exemplo,  $\vec{E}$  pode ser paralelo a  $\vec{k}$ , se  $\vec{B}$  for igual a zero; nesse caso, o vetor de Poynting é nulo, e trata-se de ondas que não transportam energia. A este tipo de ondas chamam-se ondas eletromagnéticas longitudinais ou **estáticas**.

## Problemas

- Uma onda harmônica plana, polarizada, com  $\lambda = 3$  m, propaga-se na direção do versor  $\hat{j}$ . Escreva as equações dos campos elétrico e magnético, considerando que:
  - O versor de polarização é  $\hat{p} = (\hat{i} + \hat{k})/\sqrt{2}$ .
  - $\hat{p} = (\hat{i} + \sqrt{3}\hat{k})/2$ .
  - A onda tem polarização circular negativa.
- Considere uma onda eletromagnética plana, polarizada linearmente na direção do eixo dos  $x$ , que se propaga na direção positiva do eixo dos  $y$ . A sua frequência é de 12 MHz e a sua amplitude é  $E_0 = 0,008$  V/m.
  - Calcule o período e o comprimento de onda.
  - Escreva as funções de onda dos campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$ .
- Uma antena de televisão tem, aproximadamente, 1,5 metros de comprimento. Faça um estimativa da frequência das ondas de televisão.
- A radiação eletromagnética do Sol chega à atmosfera da Terra com uma densidade de fluxo energético de  $1.4 \times 10^3$  W/m<sup>2</sup>. Qual será a densidade de fluxo energético da radiação solar, na superfície de Mercúrio? Qual é o fluxo energético emitido pelo Sol? (A distância da Terra ao Sol é, aproximadamente, 149.6 Gm, e do Mercúrio ao Sol, aproximadamente, 57.9 Gm.)

5. Uma fonte pontual, isotrópica e monocromática radia um fluxo energético de 100 W.
- (a) Calcule a densidade de fluxo energético à distância de 2 m.
- (b) Calcule as amplitudes dos campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  nessa região.
6. Demonstre que a equação de onda é linear, isto é, que qualquer combinação linear de duas soluções é também solução.
7. A figura seguinte representa o campo eletromagnético de uma onda plana de 420 MHz, no instante  $t = 0$ . As linhas de campo verticais representam o campo elétrico e as linhas perpendiculares à folha de papel são as linhas de campo magnético. Calcule a distância  $d$  e determine a expressão do vetor do campo magnético em função do tempo e da coordenada  $x$ .



8. Uma estação de rádio transmite na frequência de 90.8 MHz.
- (a) Calcule o comprimento de onda correspondente a esta frequência.
- (b) Faça uma estimativa do comprimento da antena que permita melhorar a recepção da estação.
9. As órbitas de Marte e da Terra estão, aproximadamente, sobre o mesmo plano. A distância média de Marte ao Sol é de 229 Gm e a distância média da Terra ao Sol é de 150 Gm. Suponha que está em comunicação com um astronauta em órbita à volta de Marte. Se o tempo médio de resposta do astronauta às suas mensagens for  $t_1$ , quando a Terra está entre o Sol e Marte e  $t_2$  quando o Sol está entre a Terra e Marte, calcule  $\Delta t = t_2 - t_1$ .
10. Uma onda eletromagnética plana propaga-se no sentido negativo do eixo dos  $y$ . Num dado instante  $t = 0$  o campo elétrico é  $\vec{E} = E_0 \sin(2,25 \times 10^7 y) \hat{k}$ , onde  $y$  é medido em metros.
- (a) Calcule o comprimento de onda.
- (b) Calcule a frequência.
- (c) Diga qual é o vetor de polarização.

11. Uma lâmina metálica muito extensa encontra-se sobre o plano  $xy$ . A lâmina é ligada a uma fonte variável que produz um campo elétrico uniforme no plano  $xy$ , mas variável no tempo segundo a equação:

$$\vec{E} = E_0 \sin(\omega t) \hat{i},$$

onde  $E_0$  e  $\omega$  são constantes. O campo elétrico na lâmina origina uma onda eletromagnética plana. Escreva as funções que representam os campos elétrico e magnético da dita onda, em função do tempo e da posição.

12. O campo elétrico de uma onda estacionária no vácuo é dado pela função:

$$\vec{E} = E_0 \cos(ky) \cos(\omega t) \hat{i}$$

- (a) Calcule o campo magnético.  
 (b) Encontre o vetor de Poynting em qualquer ponto e em qualquer instante.  
 (c) Calcule a densidade média de fluxo energético,  $\phi$ , em qualquer ponto.

## Respostas

1. (a) e (b)  $\vec{E} = E_0 \sin[2\pi \times 10^8(t - y/c)] \hat{e}$ .  
 (c)  $\vec{E} = E_0 \{\sin[2\pi \times 10^8(t - y/c + \varphi_0)] \hat{i} + \cos[2\pi \times 10^8(t - y/c + \varphi_0)] \hat{k}\}$ .  
 Nos 3 casos  $B_y = 0$ ,  $B_x = E_z/c$  e  $B_z = -E_x/c$ .
2. (a)  $T = 83.33 \text{ ns}$ ,  $\lambda = 25 \text{ m}$ .  
 (b)  $\vec{E} = 0.008 \cos(0.2513 y - 75.40 \times 10^6 t + \varphi_0) \hat{i}$ ,  
 $\vec{B} = -2.67 \times 10^{-11} \cos(0.2513 y - 75.40 \times 10^6 t + \varphi_0) \hat{k}$  (unidades SI).
3. Ordem de grandeza de  $10^8 \text{ Hz}$ .
4. Em Mercúrio:  $9.346 \times 10^3 \text{ W/m}^2$ . Potência:  $3.94 \times 10^{26} \text{ W}$ .
5. (a)  $1.99 \text{ W/m}^2$ . (b)  $E_0 = 38.7 \text{ N/C}$ ,  $B_0 = 1.29 \text{ mG}$ .
7.  $d = 35.7 \text{ cm}$ ,  $\vec{B} = -B_0 \cos[2\pi(4.2 \times 10^8 t + 1.40 x)] \hat{k}$  ( $t$  em segundos e  $x$  em metros).
8. (a)  $3,3 \text{ m}$  (b) Ordem de grandeza de  $1 \text{ m}$ .
9.  $2000 \text{ s}$  ( $33,3 \text{ minutos}$ ).
10. (a)  $279 \text{ nm}$ . (b)  $1.074 \times 10^{15} \text{ Hz}$ . (c) O versor  $\hat{k}$ .

$$11. \vec{E} = \begin{cases} E_0 \sin(\omega t - kz) \hat{i}, & z > 0 \\ E_0 \sin(\omega t + kz) \hat{i}, & z < 0. \end{cases} \quad \vec{B} = \begin{cases} \frac{E_0}{c} \sin(\omega t - kz) \hat{j}, & z > 0 \\ -\frac{E_0}{c} \sin(\omega t + kz) \hat{j}, & z < 0. \end{cases}$$

$$12. (a) \vec{B} = -\frac{E_0}{c} \sin(ky) \sin(\omega t) \hat{k}.$$

$$(b) \vec{S} = \frac{c\epsilon_0 E_0^2}{4} \sin(2ky) \sin(2\omega t) \hat{j}.$$

$$(c) 0.$$

# A. Análise vetorial

## A.1. Vetores

Um vetor livre  $\vec{A}$  tem um módulo ou norma  $A$  e uma direção definida por um versor (vetor com módulo unitário)  $\hat{A}$ :

$$\vec{A} = A \hat{A} . \quad (\text{A.1})$$

O produto escalar entre dois vetores é um número, igual ao produto da projeção de um dos vetores sobre o outro, pelo módulo do segundo vetor:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta , \quad (\text{A.2})$$

onde  $\theta$  é o ângulo formado pelos vetores. O produto vetorial entre dois vetores é um vetor perpendicular a eles, na direção da regra da mão direita (página 154), e com módulo igual a

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = AB \sin \theta . \quad (\text{A.3})$$

Em coordenadas cartesianas, o vetor tem três componentes  $A_x$ ,  $A_y$  e  $A_z$ , que são as projeções do vetor sobre os três versores  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  e  $\hat{k}$  que definem, respectivamente, os três eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ :

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k} . \quad (\text{A.4})$$

A soma (+), o produto escalar ( $\cdot$ ) e o produto vetorial ( $\times$ ) entre dois vetores  $\vec{A}$  e  $\vec{B}$  calculam-se da seguinte forma, em função das componentes cartesianas:

$$\vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x) \hat{i} + (A_y + B_y) \hat{j} + (A_z + B_z) \hat{k} , \quad (\text{A.5})$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z , \quad (\text{A.6})$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_y B_z - A_z B_y) \hat{i} + (A_z B_x - A_x B_z) \hat{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \hat{k} . \quad (\text{A.7})$$

O produto vetorial pode também ser escrito na forma de um determinante:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} . \quad (\text{A.8})$$

O módulo de um vetor  $\vec{A}$  representa-se por  $A$  ou  $|\vec{A}|$  e o seu valor, em função das suas componentes cartesianas, é dado por

$$A = \sqrt{\vec{A} \cdot \vec{A}} = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} . \quad (\text{A.9})$$

Um resultado bastante útil é o obtido para o módulo da diferença entre dois vetores

$$|\vec{A} - \vec{B}|^2 = (\vec{A} - \vec{B}) \cdot (\vec{A} - \vec{B}) = A^2 + B^2 - 2\vec{A} \cdot \vec{B}, \quad (\text{A.10})$$

ou, em função do ângulo  $\theta$  entre os dois vetores (teorema do cosseno),

$$|\vec{A} - \vec{B}|^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cos \theta. \quad (\text{A.11})$$

Os produtos escalar e vetorial verificam as seguintes propriedades distributivas:

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}), \quad (\text{A.12})$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}, \quad (\text{A.13})$$

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})(\vec{B} \cdot \vec{D}) - (\vec{A} \cdot \vec{D})(\vec{B} \cdot \vec{C}). \quad (\text{A.14})$$

## A.2. Curvas, superfícies e volumes

Uma curva  $C$  é o conjunto dos pontos do espaço cuja posição  $\vec{r}(u)$  é uma função contínua de um parâmetro real  $u$ . O elemento diferencial de percurso, sobre a curva, é

$$ds = \left| \frac{d\vec{r}}{du} \right| du. \quad (\text{A.15})$$

Uma superfície  $S$  é formada pelos pontos do espaço cuja posição  $\vec{r}(u, v)$  é uma função contínua de dois parâmetros reais  $u$  e  $v$ , tal que  $\partial\vec{r}/\partial u$  e  $\partial\vec{r}/\partial v$  sejam vetores linearmente independentes. O vetor diferencial de área  $d\vec{A}$  correspondente à superfície  $S$  é

$$d\vec{A} = \left( \frac{\partial\vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial\vec{r}}{\partial v} \right) du dv. \quad (\text{A.16})$$

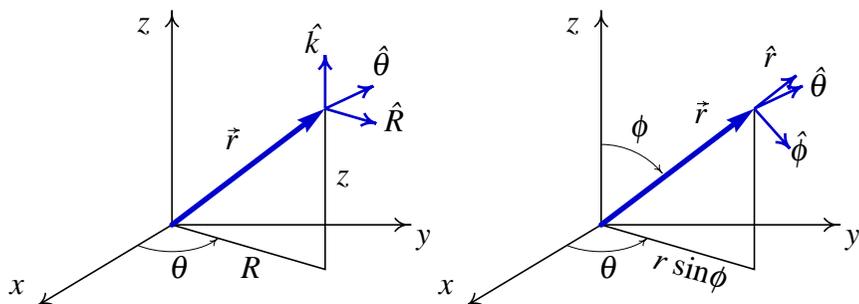
O módulo desse vetor é o elemento diferencial de superfície e a sua direção é a direção normal à superfície.

Quando  $\vec{r}$  é função de três parâmetros  $u_1, u_2$  e  $u_3$ , e as suas três derivadas parciais são vetores linearmente independentes, obtemos um espaço a três dimensões. Do ponto de vista geométrico o espaço é único; contudo, existem diferentes representações paramétricas (sistemas de coordenadas). O vetor de posição,  $\vec{r}$ , depende de três coordenadas  $u_1, u_2$  e  $u_3$ . Os **factores de escala** são definidos como o módulo de cada uma das três derivadas parciais de  $\vec{r}$ :

$$h_i = \left| \frac{\partial\vec{r}}{\partial u_i} \right| \quad (i = 1, 2, 3). \quad (\text{A.17})$$

O deslocamento infinitesimal é igual a

$$d\vec{r} = h_1 du_1 \hat{u}_1 + h_2 du_2 \hat{u}_2 + h_3 du_3 \hat{u}_3, \quad (\text{A.18})$$



**Figura A.1.:** Coordenadas cilíndricas (esquerda) e esféricas (direita).

onde os versores  $\hat{u}_i$  apontam na direção na qual a coordenada  $u_i$  aumenta. Se o sistema de coordenadas for ortogonal (as três derivadas parciais de  $\vec{r}$  são perpendiculares), o elemento diferencial de volume é igual a

$$dV = h_1 h_2 h_3 du_1 du_2 du_3. \quad (\text{A.19})$$

No caso das coordenadas cartesianas, os factores de escala são todos iguais a 1 e  $dV = dx dy dz$ .

### A.3. Coordenadas cilíndricas e esféricas

Em coordenadas cilíndricas, as coordenadas de um ponto na posição  $\vec{r}$  são a sua projeção  $R$  sobre o plano  $xy$ , o ângulo  $\theta$  que esta projeção faz com o eixo dos  $x$  e a coordenada  $z$  (Figura A.1). Os três versores correspondentes são  $\hat{R}$ ,  $\hat{\theta}$  e  $\hat{k}$ , respetivamente. Os versores  $\hat{R}$  e  $\hat{\theta}$  dependem do ângulo  $\theta$ . O vetor posição em coordenadas cilíndricas é

$$\vec{r} = R \hat{R} + z \hat{k}, \quad (\text{A.20})$$

que corresponde ao deslocamento diferencial<sup>1</sup>

$$d\vec{r} = dR \hat{R} + R d\theta \hat{\theta} + dz \hat{k}. \quad (\text{A.21})$$

Assim, os factores de escala são

$$h_R = h_z = 1 \quad h_\theta = R. \quad (\text{A.22})$$

As coordenadas esféricas de um ponto na posição  $\vec{r}$  são o módulo do vetor  $\vec{r}$ , o ângulo  $\phi$  que este vetor faz com o eixo dos  $z$  e o ângulo  $\theta$  que a projeção de  $\vec{r}$  sobre

<sup>1</sup>A derivada parcial  $\partial \hat{R} / \partial \theta$  é igual ao versor  $\hat{\theta}$ .

o plano  $xy$  faz com o eixo dos  $x$  (Figura A.1). Os versores correspondentes são  $\hat{r}$ ,  $\hat{\theta}$  e  $\hat{\phi}$ , respetivamente. O versor  $\hat{\theta}$  depende de  $\theta$ , e os versores  $\hat{r}$  e  $\hat{\phi}$  dependem de  $\theta$  e de  $\phi$ . O vetor posição em coordenadas esféricas é

$$\vec{r} = r \hat{r} , \quad (\text{A.23})$$

e o deslocamento diferencial é igual a

$$d\vec{r} = dr \hat{r} + r d\phi \hat{\phi} + r \sin \phi d\theta \hat{\theta} . \quad (\text{A.24})$$

Os correspondentes factores de escala são

$$h_r = 1 \quad h_\phi = r \quad h_\theta = r \sin \phi . \quad (\text{A.25})$$

Um caso especial são as coordenadas polares, que são um caso particular das coordenadas cilíndricas com  $z = 0$  ou um caso particular das coordenadas esféricas com  $\phi = \pi/2$ .

## A.4. Operadores vetoriais

Um campo escalar  $f(\vec{r})$  é uma função que a cada ponto com posição  $\vec{r}$  associa um valor escalar  $f$ . Um campo vetorial  $\vec{F}(\vec{r})$  associa um valor vetorial  $\vec{F}$  a cada ponto do espaço. O gradiente, em coordenadas generalizadas, calcula-se usando a definição dada no Capítulo 3 [Equação (3.24)], e o resultado é

$$\vec{\nabla} f = \frac{1}{h_1} \frac{\partial f}{\partial u_1} \hat{e}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial f}{\partial u_2} \hat{e}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial f}{\partial u_3} \hat{e}_3 . \quad (\text{A.26})$$

Usando as definições do Capítulo 4, a divergência e o rotacional têm a seguinte forma geral:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial(h_2 h_3 F_1)}{\partial u_1} + \frac{\partial(h_1 h_3 F_2)}{\partial u_2} + \frac{\partial(h_1 h_2 F_3)}{\partial u_3} \right] , \quad (\text{A.27})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \hat{e}_1 & h_2 \hat{e}_2 & h_3 \hat{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1 F_1 & h_2 F_2 & h_3 F_3 \end{vmatrix} . \quad (\text{A.28})$$

O gradiente, a divergência e o rotacional são operadores lineares. Algumas propriedades importantes dos campos escalares  $f$  e  $g$  e dos campos vetoriais  $\vec{F}$  e  $\vec{G}$  são as se-

guintes:

$$\vec{\nabla}(\vec{F} \cdot \vec{G}) = (\vec{F} \cdot \vec{\nabla})\vec{G} + (\vec{G} \cdot \vec{\nabla})\vec{F} + \vec{F} \times (\vec{\nabla} \times \vec{G}) + \vec{G} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F}), \quad (\text{A.29})$$

$$\vec{\nabla} \cdot (f\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{\nabla}f + f \vec{\nabla} \cdot \vec{F}, \quad (\text{A.30})$$

$$\vec{\nabla} \times (f\vec{F}) = \vec{\nabla}f \times \vec{F} + f \vec{\nabla} \times \vec{F}, \quad (\text{A.31})$$

$$\nabla^2(fg) = f\nabla^2g + 2(\vec{\nabla}f \cdot \vec{\nabla}g) + g\nabla^2f, \quad (\text{A.32})$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla}f) = \nabla^2f, \quad (\text{A.33})$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}f) = \vec{0}, \quad (\text{A.34})$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = 0, \quad (\text{A.35})$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) - \nabla^2\vec{F}, \quad (\text{A.36})$$

$$\vec{\nabla} \cdot (f\vec{\nabla}g) = \vec{\nabla}f \cdot \vec{\nabla}g + f \nabla^2g, \quad (\text{A.37})$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{G} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) - \vec{F} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{G}), \quad (\text{A.38})$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{F}(\vec{\nabla} \cdot \vec{G}) - \vec{G}(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) + (\vec{G} \cdot \vec{\nabla})\vec{F} - (\vec{F} \cdot \vec{\nabla})\vec{G}, \quad (\text{A.39})$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla}f \times \vec{\nabla}g) = 0. \quad (\text{A.40})$$

A derivada de um campo escalar  $f$ , na direção de um versor  $\hat{s}$ , e igual à projeção do gradiente sobre o versor  $\hat{s}$

$$\left(\frac{dV}{ds}\right)_{\hat{s}} = \vec{\nabla}f \cdot \hat{s}. \quad (\text{A.41})$$

Um campo escalar  $f(r)$  com simetria esférica, só depende da variável  $r$  e o seu gradiente e Laplaciano são, respetivamente:

$$\vec{\nabla}f(r) = \frac{df}{dr} \hat{r}, \quad (\text{A.42})$$

$$\nabla^2f(r) = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{df}{dr} \right) = \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (rf). \quad (\text{A.43})$$



## B. Transformada de Laplace

Neste apêndice apresenta-se apenas um sumário sobre a transformada de Laplace. Um estudo mais completo do tema encontra-se nos livros de matemática para engenharia ou nos livros sobre equações diferenciais, por exemplo: Farlow, *An Introduction to Differential Equations and their Applications*.

Define-se a transformada de Laplace de uma função  $f(t)$  como o integral:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (\text{B.1})$$

Note-se que o resultado desse integral já não depende de  $t$  mas sim do parâmetro  $s$ , que se admite ser um número real.

Neste livro, para representar a transformada de Laplace, utiliza-se um til por cima da letra que representa a função. Por exemplo,  $\tilde{g}(s)$  é a função obtida por aplicação da transformada de Laplace à função  $g(t)$ .

A variável  $s$  tem as unidades de inverso do tempo, ou seja unidades de frequência, já que o expoente  $st$  é adimensional. Assim sendo,  $g(t)$  e  $\tilde{g}(s)$  costumam ser designadas de representações da função no **domínio do tempo** e no **domínio da frequência**, respetivamente.

Tal como no caso da derivação, uma forma rápida de calcular a transformada de uma função é por meio de algumas regras simples que se vão obter nas secções seguintes. A transformada inversa de uma função  $\tilde{f}(s)$  é a função  $f(t)$  cuja transformada de Laplace é igual a  $\tilde{f}(s)$ .

Para que a transformada de Laplace de uma função  $f(t)$  exista, é necessário que  $f(t)$  observe as duas propriedades seguintes:

1. A função tem de ser **parcelarmente contínua**, isto é,  $f(t)$  pode ter alguns pontos isolados onde é descontínua, mas é necessariamente contínua em cada intervalo entre dois pontos de descontinuidade.
2. A função  $f(t)$  deve ser de **ordem exponencial**: existe um número real  $a$  tal que o limite

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |f(t)| e^{-at} \quad (\text{B.2})$$

existe. O domínio da respetiva transformada de Laplace  $\tilde{f}(t)$  é  $s > a$ .

Note-se que no cálculo da transformada de Laplace não interessa a forma como a função seja definida para  $t \leq 0$ . Isto prende-se com o intervalo de integração

usado na definição da transformada. É possível usar outros intervalos diferentes, mas o intervalo  $t > 0$  é particularmente útil nos problemas físicos estudados neste livro, em que unicamente interessa a evolução de um sistema físico a partir de um instante inicial arbitrado  $t = 0$ .

## B.1. Propriedades da transformada de Laplace

### B.1.1. Linearidade

Para quaisquer duas funções  $f(t)$  e  $g(t)$  e duas constantes  $a$  e  $b$ , verifica-se:

$$\mathcal{L}\{a f(t) + b g(t)\} = a \tilde{f}(s) + b \tilde{g}(s) \quad (\text{B.3})$$

e a transformada inversa também é um operador linear:

$$\mathcal{L}^{-1}\{a \tilde{f}(s) + b \tilde{g}(s)\} = a f(t) + b g(t) \quad (\text{B.4})$$

### B.1.2. Derivada da transformada

A derivada da transformada de  $f(t)$ , em ordem à frequência  $s$  é,

$$\frac{d\tilde{f}}{ds} = \frac{d}{ds} \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt = - \int_0^{\infty} t f(t) e^{-st} dt = \mathcal{L}\{t f(t)\} \quad (\text{B.5})$$

e derivando sucessivamente  $n$  vezes conclui-se que

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n \tilde{f}}{ds^n} \quad (\text{B.6})$$

### B.1.3. Transformada da derivada

A transformada da derivada de  $f(t)$  em ordem ao tempo está relacionada com a própria transformada de  $f(t)$ . Integrando por partes no integral que define a transformada, obtém-se:

$$\mathcal{L}\{f'\} = \int_0^{\infty} f' e^{-st} dt = f e^{-st} \Big|_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} f e^{-st} dt \quad (\text{B.7})$$

o último integral é a transformada de  $f(t)$  e no primeiro termo, o limite de  $f e^{-st}$  quando  $t$  tende para infinito é zero, já que  $f(t)$  é uma função de ordem exponencial. Como tal, obtém-se a relação seguinte:

$$(\tilde{f}') = s \tilde{f} - f(0) \quad (\text{B.8})$$

A transformada de derivadas de ordem superior calcula-se aplicando a mesma propriedade vezes sucessivas, por exemplo, a transformada da segunda derivada é igual a:

$$\mathcal{L}\{f''\} = s(\tilde{f}') - f'(0) = s(s\tilde{f} - f(0)) - f'(0) = s^2\tilde{f} - sf(0) - f'(0) \quad (\text{B.9})$$

#### B.1.4. Deslocamento na frequência

A transformada do produto entre uma função exponencial e outra função qualquer é:

$$\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = \int_0^{\infty} f e^{(a-s)t} dt = \tilde{f}(s-a) \quad (\text{B.10})$$

Nomeadamente, quando se multiplica uma função por  $e^{at}$ , no domínio do tempo, a sua representação no domínio das frequências é desloca-se  $a$  unidades no sentido positivo do eixo da frequência  $s$ .

#### B.1.5. Deslocamento no tempo

Define-se a função **degrau unitário**, ou função de Heaviside, como:

$$u(t-a) = \begin{cases} 0 & , t \leq a \\ 1 & , t > a \end{cases} \quad (\text{B.11})$$

Como tal, o produto,

$$u(t-a) f(t-a) \quad (\text{B.12})$$

é a função  $f(t)$  deslocada uma distância  $a$  no sentido positivo do eixo do tempo  $t$ , sendo nula para  $t < a$ . Calculando a transformada de Laplace desse produto obtém-se:

$$\mathcal{L}\{u(t-a) f(t-a)\} = \int_a^{\infty} f(t-a) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} f(r) e^{-s(r+a)} dr = e^{-as} \int_0^{\infty} f(r) e^{-sr} dr$$

e conclui-se que:

$$\mathcal{L}\{u(t-a) f(t-a)\} = e^{-as} \tilde{f}(s) \quad (\text{B.13})$$

Isto é, quando a função é deslocada  $a$  unidades no sentido positivo do tempo  $t$ , a sua representação no domínio da frequência fica multiplicada por  $e^{-as}$ .

Note-se que no caso particular  $a = 0$ , esta propriedade implica que a transformada de  $u(t) f(t)$  é idêntica à transformada de  $f(t)$ ; o produto  $u(t) f(t)$  simplesmente torna o resultado nulo para  $t \leq 0$  deixando a função igual para  $t > 0$  e como já foi

dito, no cálculo da transformada de Laplace apenas interessa a definição da função para  $t > 0$ .

Esta propriedade é muito útil para calcular as transformadas de Laplace de funções com descontinuidades. Uma outra forma equivalente é

$$\boxed{\mathcal{L}\{u(t-a)f(t)\} = e^{-as}\mathcal{L}\{f(t+a)\}} \quad (\text{B.14})$$

## B.2. Transformadas de funções importantes

### B.2.1. Polinómios

A transformada de  $t^p$ , onde  $p$  é qualquer número real, pode ser simplificada usando a mudança de variável  $u = st$

$$\mathcal{L}\{t^p\} = \int_0^{\infty} t^p e^{-st} dt = \int_0^{\infty} \left(\frac{u}{s}\right)^p e^{-u} \frac{du}{s} = s^{-(p+1)} \int_0^{\infty} u^p e^{-u} du \quad (\text{B.15})$$

e este último integral é a **função gama** de  $p + 1$ ; como tal, a transformada de  $t^p$  é

$$\boxed{\mathcal{L}\{t^p\} = \frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}} \quad (\text{B.16})$$

em particular, quando  $p$  é um número inteiro positivo  $n$ , a função gama de  $n + 1$  é igual ao fatorial de  $n$  e obtém-se:

$$\boxed{\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}} \quad (\text{B.17})$$

e para  $n = 0$

$$\boxed{\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}} \quad (\text{B.18})$$

### B.2.2. Funções exponenciais

Aplicando a propriedade de deslocamento na frequência  $s$ , com  $f(t) = 1$  e tendo em conta que  $\mathcal{L}\{1\} = 1/s$ , obtém-se a transformada da função exponencial,

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a} \quad (\text{B.19})$$

e como a derivada de  $1/(s-a)$  é  $-1/(s-a)^2$ , usando a propriedade da derivada da transformada conclui-se:

$$\boxed{\mathcal{L}\{te^{at}\} = \frac{1}{(s-a)^2}} \quad (\text{B.20})$$

O mesmo resultado pode ser obtido a partir da transformada de  $t$  e usando a propriedade de deslocamento em  $s$ .

### B.2.3. Funções sinusoidais

Para calcular a transformada de Laplace das funções sinusoidais é conveniente usar a fórmula de Euler:

$$f(t) = f_{\text{máx}} \cos(\omega t + \varphi) = \operatorname{Re} \left( f_{\text{máx}} e^{i(\omega t + \varphi)} \right) = \operatorname{Re} \left( f_{\text{máx}} e^{i\varphi} e^{i\omega t} \right) \quad (\text{B.21})$$

onde  $\operatorname{Re}\{z\}$  é a função que dá a parte real dum número complexo  $z$ . Assim sendo, a transformada de Laplace da função sinusoidal  $f(t)$  é:

$$\tilde{f}(s) = \mathcal{L} \left\{ \operatorname{Re} \left( f_{\text{máx}} e^{i\varphi} e^{i\omega t} \right) \right\} = \operatorname{Re} \left( f_{\text{máx}} e^{i\varphi} \mathcal{L} \left\{ e^{i\omega t} \right\} \right) = \operatorname{Re} \left( \frac{f_{\text{máx}} e^{i\varphi}}{s - i\omega} \right) \quad (\text{B.22})$$

Por simplicidade, costuma-se omitir a função  $\operatorname{Re}$ , ficando implícito que só interessa a parte real. Definindo o **fator**  $\mathbf{F}$  da função sinusoidal  $f(t)$  como o produto  $f_{\text{máx}} e^{i\varphi}$ , a transformada de Laplace da função sinusoidal é então:

$$\mathcal{L} \{ f_{\text{máx}} \cos(\omega t + \varphi) \} = \frac{\mathbf{F}}{s - i\omega} \quad (\text{B.23})$$

onde  $\mathbf{F}$  é o respetivo fator. Como  $\sin x = \operatorname{Re}(-i e^{ix})$ , conclui-se também que:

$$\mathcal{L} \{ f_{\text{máx}} \sin(\omega t + \varphi) \} = \frac{-i\mathbf{F}}{s - i\omega} \quad (\text{B.24})$$

### B.2.4. Função impulso unitário

A função **impulso unitário**, ou função delta de Dirac,  $\delta(t - a)$ , é a derivada da função degrau unitário  $u(t - a)$ . Note-se que não é realmente uma função, porque em  $t = a$  a função  $u(t - a)$  é descontínua e a sua derivada não existe.

Pode imaginar-se  $\delta(t - a)$  imaginando uma função degrau que não muda abruptamente de 0 para 1, em  $t = a$ , mas sim aumenta gradualmente de 0 para 1 num pequeno intervalo que inclui  $t = a$ ; como tal,  $\delta(t - a)$  é nula excepto nesse pequeno intervalo em que o degrau unitário passa de 0 para 1 e a área total sob  $\delta(t - a)$  deve ser igual a 1; no limite em que o comprimento desse intervalo se aproxima para zero, o valor de  $\delta(t - a)$  aproxima-se de infinito, em  $t = a$ , e de zero em qualquer outro valor de  $t$ .

Uma função  $f(t)$ , contínua em  $a$ , verifica a propriedade seguinte:

$$\int_{-\infty}^t f(z) \delta(z - a) dz = \begin{cases} 0 & , t \leq a \\ f(a) & , t > a \end{cases} \quad (\text{B.25})$$

A transformada da função impulso unitário é a transformada da derivada da função degrau unitário. Aplicando a propriedade da transformada da derivada, obtém-se:

$$\mathcal{L}\{\delta(t-a)\} = e^{-as} \quad (\text{B.26})$$

As propriedades da transformada de Laplace e as transformadas das funções calculadas nas secções anteriores encontram-se resumidas na tabela B.1.

Função	Transformada
$f(t)$	$\tilde{f}(s)$
$t^n$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$e^{at} f(t)$	$\tilde{f}(s-a)$
$f'(t)$	$s\tilde{f}(s) - f(0)$
$\int_0^t f(z) dz$	$\frac{1}{s}\tilde{f}(s)$
$t f(t)$	$-\frac{d\tilde{f}}{ds}$
$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^\infty \tilde{f}(r) dr$
$u(t-a) f(t-a)$	$e^{-as}\tilde{f}(s)$
$u(t-a) f(t)$	$e^{-as}\mathcal{L}\{f(t+a)\}$
$\delta(t-a)$	$e^{-as}$
$f\left(\frac{t}{a}\right)$	$a\tilde{f}(as)$
$f_{\text{máx}} \cos(\omega t + \varphi)$	$\frac{\mathbf{F}}{s - i\omega}$
$f_{\text{máx}} \sin(\omega t + \varphi)$	$\frac{-i\mathbf{F}}{s - i\omega}$

**Tabela B.1.:** Propriedades da transformada de Laplace.

## C. Unidades SI e constantes

O sistema de unidades usado oficialmente em Portugal e na maior parte do mundo é o **Sistema Internacional** de unidades (SI). As unidades SI de base são as seguintes:

**Tabela C.1.:** Unidades SI de base

<b>Grandeza</b>	<b>Nome</b>	<b>Símbolo</b>
Comprimento	metro	m
Massa	quilograma	kg
Tempo	segundo	s
Intensidade da corrente elétrica	ampere	A
Temperatura termodinâmica	kelvin	K
Quantidade de matéria	mole	mol
Intensidade luminosa	candela	cd

Outras unidades suplementares são o radiano (rad) usado para medir ângulos planos e o esterradiano (sr) usado para medir ângulos sólidos. A temperatura também pode ser medida em graus Celsius ( $^{\circ}\text{C}$ ;  $273.15\text{ K} = 0\text{ }^{\circ}\text{C}$ ).

Na Tabela C.2 apresentam-se algumas unidades derivadas; cada uma delas pode ser expressa também em termos de unidades SI de base. Os prefixos (Tabela C.3) que precedem às unidades representam múltiplos ou submúltiplos da unidade.

Na Tabela C.4 encontram-se os valores correntemente aceites para algumas constantes fundamentais. A aceleração da gravidade não é uma constante, mas costuma usar-se como valor de referência  $g = 9,81\text{ m/s}^2$ . Outras propriedades e constantes de alguns materiais aparecem ao longo do texto nas tabelas seguintes:

- Série triboelétrica, Tabela 1.1, página 4;
- Constante dielétrica e rigidez dielétrica, Tabela 5.1, página 102;
- Resistividade e coeficiente de temperatura de metais, Tabela 6.1, página 119.

Tabela C.2.: Unidades SI derivadas

Grandeza	Nome	Símbolo	Equivalente
Frequência	hertz	Hz	1/s
Força	newton	N	kg·m/s <sup>2</sup>
Pressão e tensão	pascal	Pa	kg/(m·s <sup>2</sup> )
Energia, trabalho e quantidade de calor	joule	J	kg·m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup>
Potência	watt	W	kg·m <sup>2</sup> /s <sup>3</sup>
Carga elétrica	coulomb	C	A·s
Potencial elétrico, força eletromotriz	volt	V	kg·m <sup>2</sup> /(A·s <sup>3</sup> )
Resistência elétrica	ohm	Ω	kg·m <sup>2</sup> /(A <sup>2</sup> ·s <sup>3</sup> )
Condutância elétrica	siemens	S	A <sup>2</sup> ·s <sup>3</sup> /(kg·m <sup>2</sup> )
Capacidade elétrica	farad	F	A <sup>2</sup> ·s <sup>4</sup> /(kg·m <sup>2</sup> )
Fluxo de indução magnético	weber	Wb	kg·m <sup>2</sup> /(A·s <sup>2</sup> )
Indução magnética	tesla	T	kg/(A·s <sup>2</sup> )
Indutância	henry	H	kg·m <sup>2</sup> /(A <sup>2</sup> ·s <sup>2</sup> )
Fluxo luminoso	lúmen	lm	cd·sr
Iluminação	lux	lx	cd·sr/m <sup>2</sup>

Tabela C.3.: Prefixos SI

Factor	Prefixo	Símbolo	Factor	Prefixo	Símbolo
10 <sup>18</sup>	exa	E	10 <sup>-1</sup>	deci	d
10 <sup>15</sup>	peta	P	10 <sup>-2</sup>	centi	c
10 <sup>12</sup>	tera	T	10 <sup>-3</sup>	mili	m
10 <sup>9</sup>	giga	G	10 <sup>-6</sup>	micro	μ
10 <sup>6</sup>	mega	M	10 <sup>-9</sup>	nano	n
10 <sup>3</sup>	quilo	k	10 <sup>-12</sup>	pico	p
10 <sup>2</sup>	hecto	h	10 <sup>-15</sup>	femto	f
10 <sup>1</sup>	deca	da	10 <sup>-18</sup>	ato	a

**Tabela C.4.:** Valores de algumas constantes fundamentais

<b>Constante</b>	<b>Símbolo</b>	<b>Valor</b>	<b>Unidades</b>
Permeabilidade do vazio	$\mu_0$	$4\pi$	$10^{-7}$ N/A <sup>2</sup>
Permitividade do vazio	$\epsilon_0$	8,854 188	$10^{-12}$ F/m
Velocidade da luz no vazio	$c$	2,997 925	$10^8$ m/s
Carga elementar	$e$	1,602 177	$10^{-19}$ C
Massa do elétron	$m_e$	9,109 390	$10^{-31}$ kg
Massa do próton	$m_p$	1,672 623	$10^{-27}$ kg
Massa do neutrão	$m_n$	1,674 929	$10^{-27}$ kg
Constante de Avogadro	$N_A$	6,022 137	$10^{23}$ 1/mol



# Bibliografia

- Alonso, Marcelo. e Finn, Edward J. *Física*. Addison-Wesley, Reading, U. S. A., 1999.
- Bessonov, L. *Electricidade Aplicada para Engenheiros*. Lopes da Silva Editora, Porto, Portugal, 1977.
- Brito, L., Fiolhais, M. e C. Providência. *Campo Electromagnético*, McGraw-Hill, Lisboa, 1999.
- Edwards, C. H. e Penney, D. E. *Differential Equations. Computing and Modeling*. Pearson Education, Inc., New Jersey, U. S. A., 3a edição, 2004.
- Farlow, S. J. *An Introduction to Differential Equations and their Applications*. McGraw-Hill, Singapore, 1994.
- Feynman, P. R., Leighton, R. B. e M. Sands. *The Feynman Lectures on Physics, vol. II*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1964.
- Gerthsen, C., Kneser e Vogel, H. *Física*. Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa, Portugal, 2a edição, 1998.
- Gilbert, W. *De Magnete*, Dover Publications Inc., New York, 1958.
- Hecht, Eugene. *Óptica*, Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa, 1991.
- . *Physics*, Brooks/Cole, Pacific Grove, Califórnia, 1994.
- Henriques, A.B. e Romão, J.C. *Eletromagnetismo*, IST Press, Lisboa, 2006.
- Jammer, Max. *Concepts of Force. A Study in The Foundations of Dynamics*, Harvard Univ. Press, Cambridge, Massachusetts, 1957.
- Jackson, J. D. *Classical Electrodynamics*, 2ª edição, John Wiley & Sons, New York, 1975.
- Kovach, L. D. *Advanced Engineering Mathematics*, Addison-Wesley Pub. Co., Massachusetts, 1982.
- Kreyszig, I. E. *Advanced Engineering Mathematics*, 7ª edição, J. Wiley, 1992.
- Landau, L. e Lifshitz E. *Curso Abreviado de Física Teórica, Livro 1: Mecânica y Electrodinâmica*, 2ª edição, Mir, Moscovo, 1979.
- Lévy-Leblond, J. M. e A. Butoli. *A Electricidade e o Magnetismo em Perguntas*, Gradiva, Lisboa, 1991.
- Lorentz, H. A., Einstein, Albert, Minkowski, H. e H. Weyl. *The Principle of Re-*

- lativity*, Dover Publications Inc., New York, 1952.
- Marsden, J. E. e A.J. Tromba. *Vector Calculus*, W. H. Freeman and Company, New York, 1988.
- Maxwell, James Clerk. *A Treatise on Electricity and Magnetism*, 2 volumes, Dover Publications Inc., New York, 1954.
- Mendiratta, Sushil K. *Introdução ao Electromagnetismo*, Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa, 1984.
- Oatley, C. *Electric and Magnetic Fields*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1976.
- Purcell, E. M. *Electricity and Magnetism, Berkeley Physics Course, vol. 2*, McGraw-Hill, New York, 1962.
- Sanchez, D. A., Allen Jr., R. C. e Kyner, W. T. *Differential equations*. Addison-Wesley, 2a edição, 1988.
- Spiegel, M. R., Lipschutz, S. e Spellman, D. *Vector Analysis*. Mc Graw-Hill, New York, U. S. A., 2a edição, 2009.
- Tipler, Paul A. *Physics*, Worth Publishers, New York, 1976.
- Villate, J. E. *Electromagnetismo*. McGraw-Hill, Lisboa, 1999.
- . *Dinâmica e Sistemas Dinâmicos*. edição do autor, Porto, 2013. (disponível em <http://def.fe.up.pt>)
- Whittaker, E. T. *A History of the Theories of Aether and Electricity*. Longmans, Green and Co., London, U. K., 1910.

# Índice

## Símbolos

íman, 152  
ácido sulfúrico, 122  
éter, 10  
    teoria do, 264  
órbita planetária, 27  
Ørsted, Hans C., 151, 152, 170  
ângulo sólido, 258  
ângulo sólido, 36  
ânodo, 163

## A

aceleração  
    centrípeta, 158  
    normal, 158  
    tangencial, 158  
Albany, EUA, 189  
alumínio, 119  
Ampère, André Marie, 151, 170  
amperímetro, 144  
ampere (unidade), 111, 174  
amplitude, 235, 280  
antena, 287  
Arago, D. François J., 170  
Arago, D. François J., 169  
atenuador, 229  
auto-indução, 203  
Avogadro, constante de, 309

## B

bateria de automóvel, 122  
Beauvais, França, 169  
binário, 156, 165  
Biot, Jean-Baptiste, 170  
Biot, Jean-Baptiste, 151, 169

bobina, 156, 165  
Boltzmann, Ludwig, 255  
Bourg, França, 151  
Brunswick, Alemanha, 27  
Bunsen, Robert W., 127

## C

cátodo, 163  
código de cores, 128  
cabo coaxial, 204  
calibração, 270  
    de Coulomb, 270  
    de Lorentz, 270  
campo  
    conservativo, 51, 56  
    de força, 50  
    elétrico, 9–10, 28  
        de um anel, 16  
        de um disco, 20  
        de um fio infinito, 38  
        de um plano infinito, 38  
        na atmosfera, 23  
        nos condutores, 41  
    escalar, 53  
    induzido, 104  
    magnético, 27, 152–261  
        de um fio infinito, 172  
    vetorial, 77  
candela, 307  
capacidade, 92  
    equivalente, 138  
caraterística, 278  
    tensão-corrente, 116  
carga, 1, 2  
    conservação, 3, 256

- elementar, 3, 309
  - induzida, 40
  - linear, 16
  - livre, 105
  - mássica, 159
  - por fricção, 3
  - portadores de, 111, 112, 119
  - quantização, 3
  - superficial, 18
  - volúmica, 21
  - carga pontual, 6
  - Cauchy, Augustin-Louis, 151
  - Cavendish, Henry, 103
  - Celsius, grau, 307
  - chumbo, 119, 122
  - circuito
    - delta, 147
    - elétrico, 49
    - equivalente, 129
    - estrela, 147
    - LC, 209, 232, 251
    - RC, 212
    - RC, 139
    - RLC, 214
  - City Philosophical Society*, 91
  - cobre, 114, 119
  - coeficiente
    - de auto-indução, 203
    - de indução mútua, 204
    - de temperatura, 118
  - Colónia, Alemanha, 109
  - College de France*, Paris, 169
  - Como, Itália, 49
  - comprimento de onda, 280
  - concauidade, 68
  - condensador, 91, 93
    - cilíndrico, 96
    - de placas planas paralelas, 93
    - esférico, 95
    - variável, 94
  - condensadores
    - em paralelo, 132
    - em série, 131
  - condução elétrica, 109
  - condutividade, 116
  - condutor, 13, 39
    - em equilíbrio, 39
    - em movimento num campo magnético, 193–196
    - onda eletromagnética num, 289
    - potencial e carga num, 66–68
  - cone, 258
  - constante
    - de Avogadro, 309
    - de Coulomb, 7
    - de tempo, 213
    - de Coulomb, 6
    - dielétrica, 102, 105, 289
    - magnetostática, 170
  - coordenadas
    - cartesianas, 295
    - cilíndricas, 171, 175, 297
    - esféricas, 58, 63, 88, 298
    - polares, 17, 20, 298
  - corpo negro, 287
  - corrente
    - alternada, 234
    - de deslocamento, 256, 257
    - densidade de, 113
    - eficaz, 245
    - elétrica, 110, 113
    - estacionária, 114, 256
    - induzida, 190
    - transitória, 239
    - trifásica, 185
  - coulomb (unidade), 3, 53, 308
  - Coulomb, Charles, 6
  - Croácia, 273
  - curva, 296
  - curvatura, 159
- D**
- d’Alembert, Jean, 277
  - díodo, 116
  - Davy, Humphry, 91
  - De Magnete*, 152
  - De Magnete*, 311
  - decaimento exponencial, 141

- degrau unitário, 303
- densidade de fluxo
  - energético, 268, 275, 286
- derivada
  - convetiva, 199, 278
  - direccional, 54, 299
  - parcial, 55, 79
- deslocamento, 50
  - elétrico, 105, 261
- diamagnetismo, 91, 183
- dielétrico, 91, 101
- diferença de potencial, 51–56
- dipolo elétrico, 12, 14, 71, 102
- Dirac, Paul, 305
- disco de Rowland, 267
- dispersão, 290
- divergência, 77, 298
  - teorema da, 79–80
- domínios magnéticos, 184
  
- E**
- Edimburgo, Escócia, 255
- Edison, Thomas A., 232
- Edison, Thomas Alva, 273
- efeito
  - fotoelétrico, 274
  - Hall, 167, 194
  - Joule, 122
- Einstein, Albert, 266
- elétrodo, 110, 122
- eletrólise, 91
- eletrólito, 122
- eletrão, 2, 163
  - de condução, 13, 39
  - massa, 309
- eletrão-volt, 53
- eletricidade, 49
- eletroíman, 182, 190
- eletroquímica, 91
- energia
  - armazenada num condensador, 99
  - cinética, 50
  - conservação da, 51
  - eletrostática, 97
  - mecânica, 51
  - potencial, 51
  - volúmica
    - eletromagnética, 268
    - eletrostática, 98, 99
- equação
  - de continuidade, 114, 256
  - de onda, 276, 277
- equações de Maxwell, 256, 260–262
- equivalente
  - de Norton, 130
  - de Thévenin, 130
- Erlangen, Alemanha, 109
- Escola Central de Beauvais, 169
- Escola Politécnica de Paris, 151, 169
- espectrómetro de massa, 164
- espectro
  - de absorção, 127, 289
  - de emissão, 289
  - eletromagnético, 287
- espectroscopia, 127
- espira, 156
- esterradiano, 307
- Euler, Leonhard, 235, 305
- experiência
  - de Michelson e Morley, 265
  - do disco de Rowland, 267
  
- F**
- física
  - clássica, 274
- factor
  - de escala, 296
- farad (unidade), 92, 308
- Faraday, Michael, 91, 103, 170, 189, 195–196, 255, 274
- fase, 234, 280
  - inicial, 280
- fasor, 236, 305
- fator de potência, 244
- feixe de partículas, 160, 162
- ferro, 119
- ferromagnetismo, 183

## filtro

- de velocidades, 162
- passa-alto, 226
- passa-baixo, 229
- passa-banda, 247
- rejeita-banda, 251

## fissão nuclear, 108

## fluxo

- de carga, 114
- elétrico, 28–32
- magnético, 182, 190

## fonte

- de corrente, 130
- de iões, 164
- de tensão, 130
- isotrópica, 284, 287, 292

## força

- conservativa, 51
- de Lorentz, 160, 196, 261
- elétrica, 1, 2, 51–52
- eletromotriz, 123
  - induzida, 190
- forte, 24
- magnética, 152, 154, 155, 173, 195, 198

## fotão, 274

## Fourier, Joseph, 109

## Franklin, Benjamin, 1, 5

## frentes de onda, 285

## frequência, 233, 234, 280

- angular, 233, 235, 281
- de corte, 246

## Fresnel, Augustin Jean, 151

## função

- alternada, 234
- de Heaviside, 303
- de onda, 277, 279
- de transferência, 225
- degrau unitário, 220, 303
- delta de Dirac, 305
- exponencial, 304
- gama, 304
- impulso unitário, 305
- sinusoidal, 234, 305

## G

- gás de eletrões, 115, 118, 195
- gás ideal, 117
- Galilei, Galileu, 263, 265
- galvanómetro, 144, 165
- Galvani, Luigi, 49
- garrafa de Leiden, 92
- gauss (unidade), 154
- Gauss, Karl Friedrich, 27, 28, 75, 127

## gerador

- de corrente, 91
  - alternada, 192
  - contínua, 198
- de Faraday, 196–198
- de Van der Graff, 130

## germânio, 119

## Gilbert, William, 152

## gradiente, 55, 79, 299

- em coordenadas cartesianas, 54–55
- em coordenadas esféricas, 58
- em coordenadas generalizadas, 298

## Gray, Stephen, 1

## Green, George, 75

## Guerra das Correntes, 232

## H

## hélice, 160

## hélio, 24

## Hall, Edwin H., 167

## Heaviside, Oliver, 231, 303

## helicidade, 282

## henry (unidade), 203, 308

## Henry, Joseph, 189, 190, 195

## hertz (unidade), 216, 308

## Hertz, Heinrich, 127, 274

## Huygens, Christian, 274

## I

## ião, 3

## impedância

- complexa, 239

- generalizada, 218
- impulso unitário, 224, 305
- indução
  - eletromagnética, 91, 189, 190, 196
  - eletrostática, 40
  - mútua, 204
- indutor, 182, 203
- integral
  - de linha, 16, 50, 62
  - de superfície, 19, 29–30, 62
  - de volume, 62
- intensidade de uma onda, 286–287
- interferómetro de Michelson-Morley, 265
- inversor, 229
- isótopos, 164
- isolador, 13
- isotropia, 261, 284, 286
  
- J**
- joule (unidade), 51, 53, 308
- Joule, efeito, 122
  
- K**
- Kaliningrad, Rússia, 127
- Kamerlingh Onnes, H., 120
- kelvin (unidade), 307
- Kelvin, Lord (Thomson, W.), 75
- Kirchhoff, Gustav Robert, 127, 274
  
- L**
- lúmen, 308
- lâmpada
  - fluorescente, 111
  - incandescente, 116, 125
- Laplace, Pierre S., 151
- Laplace, Pierre Simon, 211, 301
- laplaciano, 83, 299
- lei
  - de Ampère, 175–177, 184, 256
  - de Ampère-Maxwell, 257, 260
  - de Biot-Savart, 170, 266
  - de Coulomb, 5–6
  - de Faraday, 190–191, 195, 260
  - de Gauss, 28, 41, 63, 76, 260
    - na forma diferencial, 86
  - de Lenz, 190
  - de Ohm, 109, 116, 117, 215
  - de Ohm generalizada, 218
  - de Gauss, 35
- Lenz, Emil, 190
- linhas
  - de campo, 91, 255
  - de campo elétrico, 11–13, 56
  - de campo magnético, 153, 178–180, 195
  - de indução magnética, 91
- Londres, Inglaterra, 91, 231
- Lorentz, factor de dilatação de, 264
- Lorentz, força de, 160
- Lorentz, Hendrik A., 160, 198, 261, 264, 266
- lux, 308
- luz, 274
  - infravermelha, 288
  - solar, 288
  - teoria corpuscular, 151
  - teoria ondulatória, 151
  - ultravioleta, 288
  - velocidade, 255, 309
  - visível, 288
- Lyon, França, 151
  
- M**
- Möbius, anel de, 80
- módulo de um vetor, 295
- Mach, Ernst, 127
- Magnésia, 152
- malhas, 136
- Marconi, Guglielmo, 273
- Marte, 292
- massa
  - do electrão, 309
  - do neutrão, 309
  - do próton, 309
- materiais ohmicos, 116

Maxwell, James Clerk, 75, 190, 196,  
231, 255, 274

mecânica

quântica, 274

meio

isotrópico, 261, 289

linear, 261

mercúrio, 119

metro, 51, 307

Michell, John, 152

Michelson, Albert A., 265

microondas, 288

microscópio eletrônico, 160

mobilidade elétrica, 117

moléculas polares e apolares, 101

momento

dipolar, 72

momento magnético, 156

Monge, Gaspar, 169

monopólo magnético, 178

Morley, Edward W., 265

motor

de corrente contínua, 157

movimento

circular uniforme, 159

helicoidal, 159

Munique, Alemanha, 109

**N**

níquel-cromo, 119

nós, 136

núcleo, 2

número atômico, 2

número de onda, 281

angular, 281

nabla, 79

neutrão, 2, 108

massa, 309

newton (unidade), 51, 308

Newton, Isaac, 152, 274

Newton, segunda lei de, 50

Notingham, Reino Unido, 75

Nuremberga, Alemanha, 109

nuvem eletrônica, 45, 101

**O**

ohm (unidade), 116, 308

Ohm, Georg S., 109

ohmímetro, 145

onda

eletromagnética, 274, 276

esférica, 284–285

estática, 291

estacionária, 283

harmônica, 280

longitudinal, 291

monocromática, 280

plana, 277

polarizada, 277

transversal, 291

oscilador harmônico simples, 233

**P**

pára-raios, 68

pólos magnéticos, 152

paramagnetismo, 183

pares de Cooper, 120

Paris, França, 169

partícula alfa, 24

pascal (unidade), 308

passa-banda, 247

passo de uma hélice, 161

período, 234, 280

permeabilidade magnética, 184

do vazio, 309

permitividade elétrica, 105

do vazio, 35

do vazio, 309

pilha, 49, 110, 122

Poisson, equação de, 87

Poisson, Siméon Denis, 87

polarização, 2, 14, 277, 281

circular, 279, 282

da luz, 274

elétrica, 104

linear, 279

polarizadas, 14

polinômio característico, 225

pontos de sela, 60, 61

- potência  
dissipada, 121  
fornecida, 124  
instantânea, 244  
média, 245
- potencial, 75  
de ruptura, 92  
de uma carga pontual, 53  
eletrostático, 52  
vetorial, 269
- Poynting, vetor de, 268, 275
- prata, 119
- prefixos das potências de 10, 308
- Priestley, Joseph, 5
- prisma, 288
- produto  
escalar, 295  
vetorial, 295
- protão, 2  
massa, 309
- Q**  
quilograma, 307
- R**  
radar, 288  
radiano, 307  
raio, 102  
raios  
catódicos, 163  
gama, 288  
x, 70, 288
- reatância, 239  
capacitiva, 239  
indutiva, 239
- regra  
da mão direita, 153, 282  
de Cramer, 138
- regras de Kirchhoff, 136
- relatividade, teoria da, 266
- resistência, 116, 117, 239  
e temperatura, 118–119  
equivalente, 133
- resistências  
em série, 131  
em paralelo, 132
- resistividade, 117
- resposta  
de frequência, 246  
transitória, 220
- ressonância, 248
- rigidez dielétrica, 102
- rotacional, 80–83, 298
- Rowland, Henry, 267
- Royal Society*, 109
- S**  
série  
de Fourier, 281  
espectral, 289  
triboelétrica, 3
- saturação, 119
- Saturno, anéis de, 255
- Savart, Felix, 170
- segundo (unidade), 307
- semicondutores, 119
- separação  
eletrostática, 162  
magnética, 162, 164
- siemens (unidade), 308
- silício, 119
- simetria, 28, 36  
cilíndrica, 39  
esférica, 37, 58, 284, 299
- sinal, 212  
de entrada, 213  
de saída, 213
- sistema internacional de unidades,  
307
- Smithsonian Institution*, 189
- Sol  
composição química do, 127  
fluxo energético do, 291
- solenóide, 180
- spin*, 121, 183
- Stokes, George G., 75, 190
- Stokes, teorema de, 85
- Subscription Library*, 75

supercondutividade, 120  
superfície, 296  
  equipotencial, 58–61  
  fechada, 30  
  gaussiana, 36, 41  
  orientável, 80  
susceptibilidade  
  elétrica, 105  
  magnética, 184

**T**  
televisão, 291  
temperatura  
  crítica, 120  
  de Curie, 184  
tensão  
  alternada, 237  
  eficaz, 245  
teorema  
  da divergência, 79–80  
  de Stokes, 85, 257  
  do cosseno, 296  
  fundamental da álgebra, 27  
teoria cinética dos gases, 255  
tesla (unidade), 154, 308  
Tesla, Nicola, 232, 273  
Thomson, J. J., 2, 163  
Thomson, W. (Lord Kelvin), 75, 190  
trabalho, 50  
trabalho e energia, 50  
trajetória, 49  
transformação  
  de Galileu, 263, 265, 271  
  de Lorentz, 265, 272  
transformada  
  de Fourier, 290  
transformada de Laplace, 301  
triângulo de impedância, 240  
triedro de Frenet-Serret, 158  
tubo de fluxo, 28  
tubo de raios catódicos, 163  
tungstênio, 119

**U**  
Universidade  
  de Berlim, 127  
  de Cambridge, 75, 255  
  de Gotinga, 27  
  de Gratz, 273  
  de Heidelberga, 127  
  de Munique, 109  
  de Praga, 273  
  de Princeton, 189  
urânio, 108

**V**  
valor médio, 78  
velocidade  
  das ondas eletromagnéticas,  
    289  
versor, 6  
  binormal, 158  
  normal, 29, 158  
  tangencial, 158  
vetor posição, 49, 297, 298  
volt (unidade), 53, 308  
voltímetro, 144  
Volta, Alessandro, 49, 53, 110

**W**  
watt (unidade), 308  
weber (unidade), 308  
Weber, Wilhelm E., 27  
Westinghouse, George, 232, 273



Este livro pode ser descarregado livremente, em ficheiro PDF, ou consultado em versão HTML, no sítio:

**<http://def.fe.up.pt>**