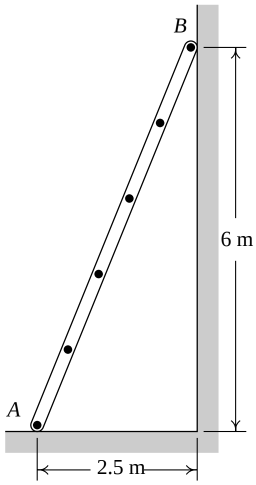
**FEUP - MIEIC** **FÍSICA I - EIC0010 - 2008/2009**

**NOME:**____________________________________________ **LOG-IN FEUP:**____________

Exame final — 30 de Junho de 2009

**Duração**: Duas horas. Com consulta de formulário. Pode usar calculadora, mas **apenas para fazer contas** e nunca como meio de cópia ou de consulta!

**1.** (3 valores). Uma escada (ver figura à direita) está apoiada numa superfície horizontal (ponto A) e numa parede vertical (ponto B). Entre a escada e a superfície horizontal o coeficiente de atrito estático é $\mu$, enquanto que o atrito da escada com a parede vertical é desprezável. Admitindo que o centro de gravidade da escada se encontra a metade do seu comprimento, calcule o valor mínimo de $\mu$, para garantir que a escada permaneça em equilíbrio estático.




**2.** (5 valores). Uma partícula com massa igual a 1 kg desloca-se ao longo do eixo dos $x$. Em unidades SI, a força tangencial sobre a partícula é dada pela expressão $F = x^3 - 4\,x$.

(a) Determine os pontos de equilíbrio do sistema.

(b) Encontre as expressões para a energia potencial e a energia mecânica, em função da posição $x$ e da velocidade $v$.

(c) Escreva as equações de evolução e calcule a matriz jacobiana.

(d) Caracterize cada um dos pontos de equilíbrio do sistema.

(e) Desenhe, no espaço de fase, um ciclo, uma órbita homoclínica e uma órbita heteroclínica, se existirem (se algumas das 3 não existirem, diga quais).

**PERGUNTAS**. *Cotação:* Respostas certas, 0.8, erradas, $-0.2$, em branco, 0. Cada pergunta tem uma única resposta. Serão avaliadas apenas as respostas que apareçam na caixa de **Resposta** (e não na folha de exame ou de rascunho).

**3.** Uma partícula desloca-se ao longo do eixo dos $x$ com uma aceleração que aumenta em função do tempo: $a = 7\,t$ (unidades SI). No instante $t = 0$, a partícula encontra-se em repouso no ponto $x = 4$ m. Calcule a posição da partícula em $t = 5$ s.

**(A)** 149.8 m **(C)** 929.0 m **(E)** 449.5 m
**(B)** 74.9 m **(D)** 374.6 m

**Resposta:** ☐

**4.** Uma partícula desloca-se numa dimensão, sob a acção de uma força conservativa e uma força de atrito suficientemente fraca. Desprezando a força de atrito, o sistema tem um centro num ponto P do espaço de fase. Quando a força de atrito for tida em conta, o ponto P será:

**(A)** nó repulsivo
**(B)** nó atractivo
**(C)** ponto de sela
**(D)** foco repulsivo
**(E)** foco atractivo

**Resposta:** ☐

**5.** As equações de evolução de um sistema linear, de segunda ordem, são: $\dot{x} = ax + by \qquad \dot{y} = cx + dy$
onde $a$, $b$, $c$ e $d$ são parâmetros reais, todos positivos excepto $b$ que é negativo. Assim, o ponto de equilíbrio é:

**(A)** atractivo **(D)** nó
**(B)** repulsivo **(E)** ponto de sela
**(C)** foco

**Resposta:** ☐

**6.** Um sistema dinâmico com duas variáveis de estado tem exactamente dois pontos de equilíbrio, P e Q. O ponto P é ponto de sela e o ponto Q é foco repulsivo. Qual das seguintes afirmações sobre o sistema é verdadeira?

**(A)** Podem existir ciclos.
**(B)** Pode existir uma órbita heteroclínica.
**(C)** O sistema pode ser linear.
**(D)** O sistema pode estar em estado de equilíbrio estável.
**(E)** Pode existir uma órbita homoclínica.

**Resposta:** ☐

**7.** A equação de van der Pol: $\ddot{x} + 2\,\epsilon(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$, para qualquer valor do parâmetro positivo $\epsilon$, tem sempre um único ponto de equilíbrio em $x = \dot{x} = 0$ e um ciclo limite atractivo. Designando o tipo de ponto de equilíbrio assim:

1. foco atractivo.
2. foco repulsivo.
3. nó atractivo.
4. nó repulsivo.
5. ponto de sela.

Que tipo de ponto de equilíbrio pode ter a equação de van der Pol?

**(A)** 1 ou 2 **(C)** 3, 4 ou 5 **(E)** 1 ou 3
**(B)** 3 ou 4 **(D)** 2 ou 4

**Resposta:** ☐

**8.** As unidades J/(m·kg) (joule sobre metro vezes quilograma) podem ser usadas para medir:

(**A**) Energia.
(**B**) Aceleração.
(**C**) Trabalho.
(**D**) Velocidade.
(**E**) Quantidade de movimento.

**Resposta:** ☐

**9.** Um objecto desloca-se numa trajectória curva, mantendo o módulo da sua velocidade constante. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(**A**) A aceleração é tangente à trajectória.
(**B**) O módulo da aceleração é constante.
(**C**) A aceleração é nula.
(**D**) A aceleração é constante.
(**E**) A aceleração é perpendicular à trajectória.

**Resposta:** ☐

**10.** A força resultante sobre uma partícula que se desloca sobre o eixo dos $y$ é $\vec{F} = (y-3)(11-y)\vec{e}_y$. Em $t = 0$ a partícula encontra-se em repouso no ponto $y = 7$. Onde se encontrará a partícula após um tempo muito elevado?

(**A**) Oscilando à volta de $y = 11$
(**B**) Oscilando à volta de $y = 3$
(**C**) Muito afastada, em $y \to \infty$
(**D**) Em $y = 11$
(**E**) Em $y = 3$

**Resposta:** ☐

**11.** Um sistema não linear com duas variáveis de estado tem um foco atractivo num ponto P. Quais poderão ser os dois valores próprios da matriz jacobiana no ponto P?

(**A**) 1 e 2 (**C**) 1 e -1 (**E**) 1+i e 1-i
(**B**) -1+i e -1-i (**D**) -1 e -2

**Resposta:** ☐

**12.** A força resultante sobre um objecto de massa 2 kg é $\vec{F} = 1\,\vec{e}_x + 9\,t\,\vec{e}_y$ (SI) no intervalo $0 < t < 4$ s e nula em $t > 4$ s. Sabendo que a velocidade do objecto em $t = 0$ era $1\,\vec{e}_x$ m/s, calcule a velocidade em $t = 6$ s.

(**A**) $5.0\,\vec{e}_x + 72.0\,\vec{e}_y$ (**D**) $3.0\,\vec{e}_x + 36.0\,\vec{e}_y$
(**B**) $4.0\,\vec{e}_x + 81.0\,\vec{e}_y$ (**E**) $4.0\,\vec{e}_x + 27.0\,\vec{e}_y$
(**C**) $3.0\,\vec{e}_x + 18.0\,\vec{e}_y$

**Resposta:** ☐

**13.** A matriz de um sistema linear no espaço de fase $(x, y)$ foi armazenada na variável `J`, no Maxima. O comando `eigenvectors(J)` produz: `[[[-1,-2], [1,1]], [1,-1], [1,1/3]]` que tipo de ponto de equilíbrio é a origem?

(**A**) ponto de sela. (**D**) foco atractivo.
(**B**) foco repulsivo. (**E**) centro.
(**C**) nó atractivo.

**Resposta:** ☐

**14.** As equações $\dot{x} = x(2-y)$, $\dot{y} = y(2-x)$ definem um sistema:

(**A**) Presa-predador.
(**B**) Conservativo.
(**C**) De duas espécies com cooperação.
(**D**) De duas espécies com competição.
(**E**) Linear.

**Resposta:** ☐

**15.** O comando
`a:rk([f,g],[y,z],[0,1],[x,0,1,0.1])`
do Maxima foi usado para resolver numericamente um sistema de equações. Qual dos comandos seguintes produz uma lista com os valores de `y`?

(**A**) `makelist(a[2][i],i,1,11)`
(**B**) `makelist(a[3][i],i,1,11)`
(**C**) `makelist(a[i][3],i,1,11)`
(**D**) `makelist(a[i][1],i,1,11)`
(**E**) `makelist(a[i][2],i,1,11)`

**Resposta:** ☐

**16.** Um sistema dinâmico com duas variáveis de estado tem uma curva de evolução com conjunto limite negativo num ponto P. Em relação à lista seguinte:

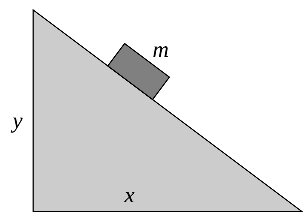
1. foco atractivo.
2. foco repulsivo.
3. nó atractivo.
4. nó repulsivo.
5. centro.

Que tipo de ponto de equilíbrio pode ser o ponto P?

(**A**) 1 ou 3 (**C**) 2 ou 4 (**E**) 5
(**B**) 3 ou 4 (**D**) 1 ou 2

**Resposta:** ☐

**17.** Um bloco de massa 6 kg desce deslizando sobre a superfície de um plano inclinado com base $x = 5$ m e altura $y = 3$ m. Admitindo que a aceleração da gravidade é $g = 9.8$ m/s$^2$, calcule o módulo da reacção normal do plano sobre o bloco.




(**A**) 58.80 N (**C**) 49.00 N (**E**) 60.50 N
(**B**) 25.21 N (**D**) 50.42 N

**Resposta:** ☐

Folha Nº /

FEUP FACULDADE DE ENGENHARIA
UNIVERSIDADE DO PORTO

Curso MIEIC

Data 30/6/09

Disciplina Física 1

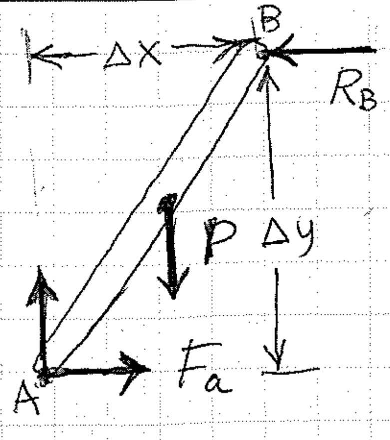
Ano 1º Semestre 2º

Nome Jaime Villate

Espaço reservado para o avaliador

PONTOS 1 e 4

① Forças externas:




equação 1: $\sum_{i=1}^{n} T_{Ai} = 0 \Longrightarrow R_B \Delta y - P \frac{\Delta x}{2} = 0$

$$\Longrightarrow R_B = \frac{\Delta x}{2\Delta y} P$$

equação 2: $\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0 \Longrightarrow F_a = R_B = \frac{\Delta x}{2\Delta y} P$

equação 3: $\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0 \Longrightarrow R_A = P$

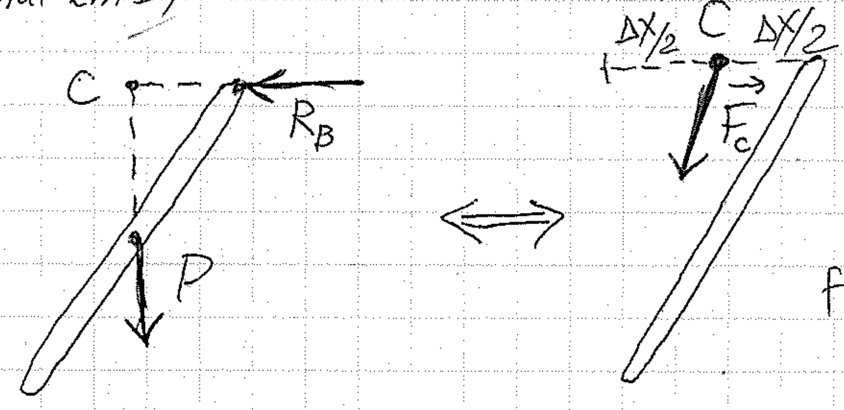
$$\mu \geq \frac{F_a}{R_A} \Longrightarrow \mu \geq \frac{\Delta x}{2\Delta y} \qquad \frac{\Delta x}{2\Delta y} = \frac{2.5}{12}$$

$$\mu \geq 0.21$$

O valor mínimo de $\mu$ é 0.21

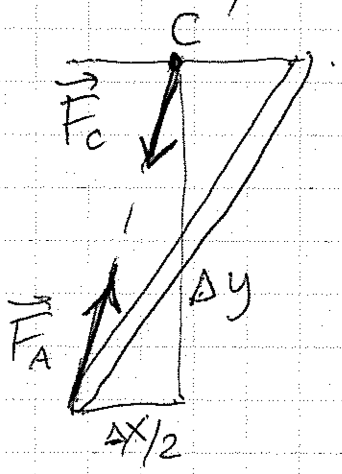
① Outro método diferente:

ⓐ Combinam-se as forças P (peso) e $R_B$ (reacção normal em B)




uma única força em C.

ⓑ Para que o sistema esteja em equilíbrio, $\vec{F}_c$ deverá apontar para A e a força em A deverá apontar para C:




$$\vec{F}_C = -\vec{F}_A$$

$$\mu \geq \frac{F_a}{R_A} \qquad \frac{F_a}{R_A} = \frac{F_{Ax}}{F_{Ay}} = \frac{\Delta X/2}{\Delta y}$$

$$\Rightarrow \mu \geq \frac{\Delta X}{2y}$$

$$\mu_{min} = \frac{\Delta X}{2\Delta y} = \frac{2.5}{2 \cdot 6} = 0.21$$

② ⓐ pontos de equilíbrio: $\begin{cases} F=0 \\ v=0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3-4x=0 \\ v=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x+2)(x-2)=0 \\ v=0 \end{cases}$$

Existem três pontos de equilíbrio $(x,v)$:

$$(0,0)\ ,\ (2,0)\ ,\ (-2,\ 0)$$

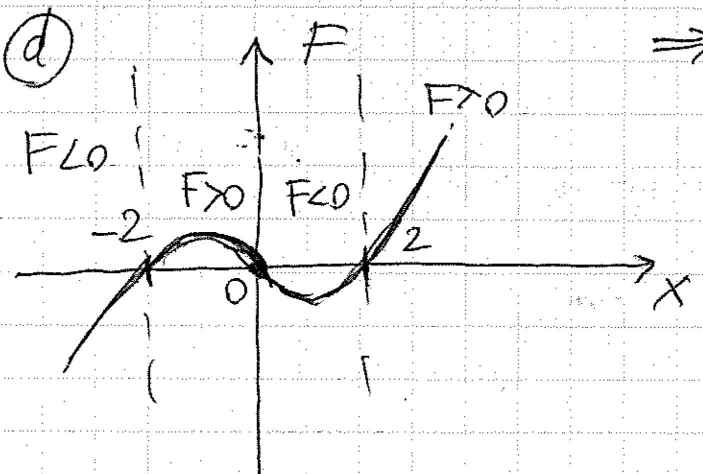
ⓑ $U(x) = -\int F\,dx = -\int (x^3-4x)\,dx = -\frac{x^4}{4}+2x^2$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + U(x) = \frac{1}{2}v^2 - \frac{x^4}{4} + 2x^2$$

ⓒ $\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = \frac{F}{m} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = x^3-4x \end{cases}$

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial v} \\ \frac{\partial (x^3-4x)}{\partial x} & \frac{\partial (x^3-4x)}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3x^2-4 & 0 \end{bmatrix}$$

ⓓ




$\Rightarrow$ $(-2,0)$ é ponto de equilíbrio instável

$(0,0)$ é ponto de equilíbrio estável

$(2,0)$ é ponto de equilíbrio instável

(Como $\lim_{x\to+\infty} F = +\infty$, o gráfico é como indicado)

Trata-se dum sistema conservativo e, portanto, só pode ter pontos de sela ou centros. Assim:

(-2,0) é ponto de sela

(0,0) é um centro

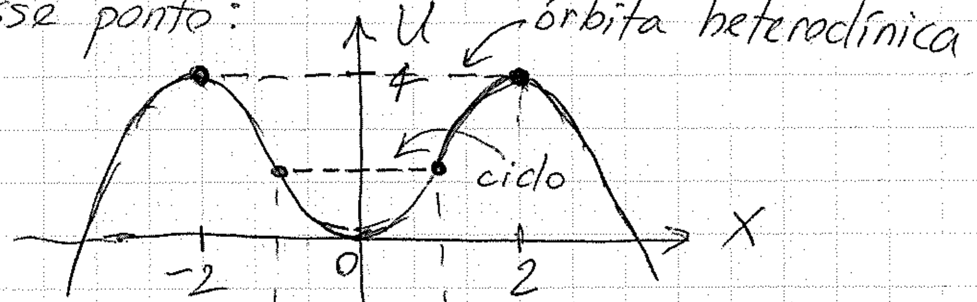
(2,0) é ponto de sela

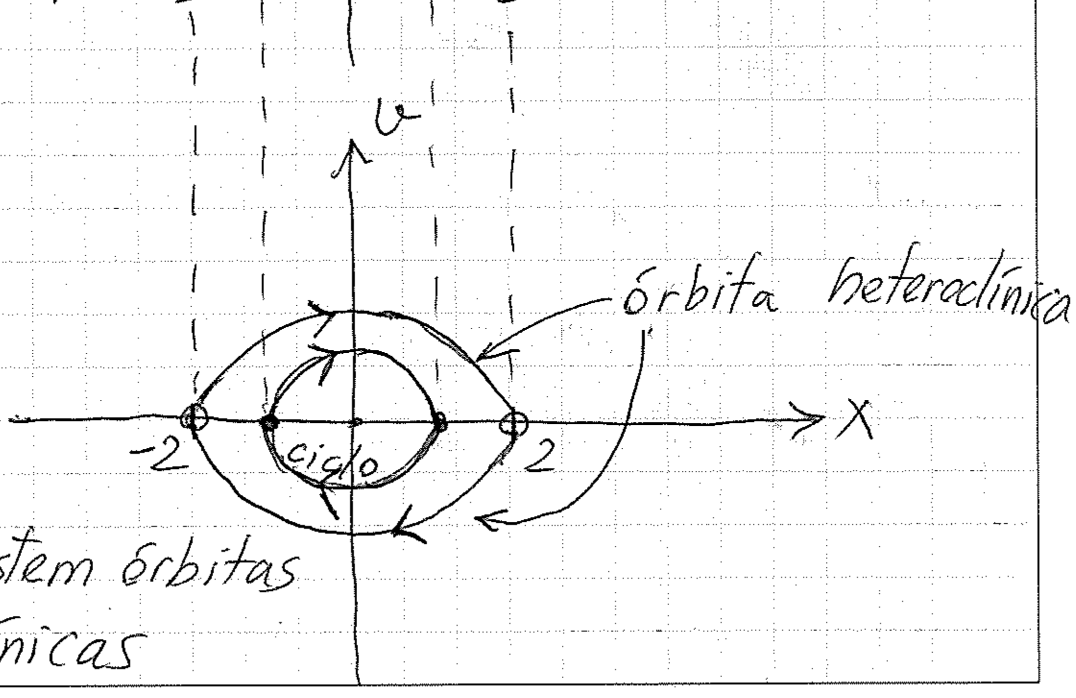
(e) Energia potencial nos pontos de equilíbrio:

$$U(-2) = -\frac{(-2)^4}{4} + 2(-2)^2 = -4 + 8 = 4$$

$$U(0) = 0 \qquad U(2) = -\frac{2^4}{4} + 2 \cdot 2^2 = 4$$

por serem pontos de equilíbrio instável, U é máximo local em $x = \pm 2$. E como $x=0$ é estável, U é mínimo local nesse ponto:




Não existem órbitas homoclínicas

## Perguntas

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **3.** A | **6.** E | **9.** E | **12.** D | **15.** E |
| **4.** E | **7.** D | **10.** A | **13.** C | **16.** C |
| **5.** B | **8.** B | **11.** B | **14.** D | **17.** D |